

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

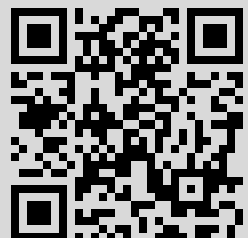
Т. Г. Елизарова, Б. Н. Четверушкин, Кинетические алгоритмы для расчёта газодинамических течений, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1985, том 25, номер 10, 1526–1533

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 176.120.240.207

20 января 2021 г., 09:43:16



УДК 519.6:533.7

## КИНЕТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

ЕЛИЗАРОВА Т. Г., ЧЕТВЕРУШКИН В. Н.

(Москва)

На основе кинетической модели получены дифференциально-разностные системы уравнений для описания газодинамических течений. Рассматриваются методы расчета, и приводятся примеры численного решения некоторых задач.

### § 1. Кинетическая модель

Как правило, разностные схемы для расчета газодинамических течений конструируются на основе непосредственного использования уравнений газовой динамики Эйлера или Навье — Стокса. При таком построении алгоритма как бы в тени остается тот факт, что сами уравнения газовой динамики при соответствующих предположениях относительно вида функции распределения могут быть получены непосредственно из уравнения Больцмана, т. е. являются следствием более сложного кинетического уравнения [1].

Из относительно небольшого числа попыток построить алгоритм расчета газодинамических течений, опираясь непосредственно на решение уравнения переноса, отметим работы [2]—[8], где использовалась следующая простая модель, описывающая перенос частиц.

Предположим, что в момент времени  $t=t^j$  в каждой точке пространства функция распределения  $f$  может быть записана в локально-максвелловском виде:

$$(1.1) \quad f^j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t^j) = \rho^j(\mathbf{x}, t^j) [2\pi RT^j(\mathbf{x}, t^j)]^{-3/2} \times \\ \times \exp\{-[\boldsymbol{\xi}_\alpha - u_\alpha^j(\mathbf{x}, t^j)]^2 [2RT^j(\mathbf{x}, t^j)]^{-1}\}, \quad \alpha=1, 2, 3,$$

где  $\rho^j$ ,  $u^j$ ,  $T^j$  — локальные макроскопические параметры течения газа,  $R$  — газовая постоянная.

Затем на отрезке времени  $t \in [t^j, t^{j+1}]$  происходит бесстолкновительный разлет газа, который описывается уравнением переноса

$$(1.2) \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^3 \xi_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = 0.$$

В момент времени  $t=t^{j+1}$  функция распределения вновь становится локально-максвелловской, но уже с новыми значениями газодинамических параметров  $\rho^{j+1}$ ,  $u^{j+1}$ ,  $T^{j+1}$ , которые определяются с помощью выражений

$$(1.3) \quad \rho^{j+1} = \int_{-\infty}^{\infty} f^{j+1} d\boldsymbol{\xi}, \quad (\rho u_\alpha)^{j+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_\alpha f^{j+1} d\boldsymbol{\xi}, \quad E^{j+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^2}{2} f^{j+1} d\boldsymbol{\xi}$$

где  $E = \rho u^2 / 2 + 3\rho RT / 2$ . В дальнейшем при переходе к моменту времени  $t = t^{j+2}$  вся процедура повторяется.

По сути дела, в данной модели исходная физическая среда заменяется на гипотетическую, в которой характерная длина свободного пробега составляет величину порядка  $\tau \tilde{v}$ , где  $\tau = t^{j+1} - t^j$ , а  $\tilde{v}$  — модуль характерной скорости, включающей в себя и скорость звука.

В настоящей статье не будут рассматриваться вопросы о соотношениях функции распределения, получаемой из кинетической модели (1.1)–(1.3) и из уравнения Больцмана. Основное внимание будет уделено получению макроскопических параметров  $\rho$ ,  $u$ ,  $T$  и их связи с решениями соответствующих газодинамических уравнений.

## § 2. Дифференциально-разностная система уравнений

Кинетическую модель (1.1)–(1.3) можно непосредственно использовать для нахождения газодинамических величин [2]–[5]. При этом, как следует из расчета модельных задач, точность численного решения оказывается в достаточной степени высокой. Однако при таком подходе приходится решать уравнение переноса (1.2), зависящее не только от пространственных переменных, но и от скоростей молекул. Это резко увеличивает (особенно при переходе к многомерным по пространству задачам) объем машинного времени, необходимого для их численного решения.

Ниже на основе кинетической модели (1.1)–(1.3) получены относительно простые уравнения типа уравнений газовой динамики, которые в дальнейшем используются для численных расчетов. Получим эту систему уравнений.

Основываясь на модели (1.1)–(1.3), определим функцию распределения на новом шаге по времени с помощью выражения

$$f^{j+1}(x, \xi, t^{j+1}) = f_0^j(x - \xi\tau, \xi, t^j),$$

где  $f_0^j$  — локально-максвелловская функция на слое  $t^j$ , которая задается с помощью (1.1),  $\tau = t^{j+1} - t^j$ .

Разложим функцию распределения в ряд Тейлора по параметру  $\xi\tau$ :

$$(2.1) \quad f^{j+1} = f_0^j - \tau \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial f_0^j}{\partial x_\alpha} \xi_\alpha + \frac{\tau^2}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{\partial^2 f_0^j}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \xi_\alpha \xi_\beta + \dots$$

с точностью до членов третьего порядка.

Для того чтобы получить значения газодинамических параметров на новом слое по времени  $t = t^{j+1}$ , умножим (2.1) на сумматорные инварианты 1,  $\xi$ ,  $\xi^2/2$  и проинтегрируем по всем скоростям молекул.

При достаточно больших скоростях  $\xi$ , когда параметр  $\xi\tau$  уже нельзя считать малым по сравнению с шагом пространственной сетки, отбрасываемые при таком разложении члены, вообще говоря, могут оказаться существенными. Однако в нашем случае ими можно пренебречь, так как сама функция распределения экспоненциально убывает с ростом  $\xi$  и область больших скоростей вносит малый вклад в соответствующие интегралы.

Учитывая локально-максвелловский характер функции распределения, интегралы, стоящие в правой части (2.1), удается свести к выражениям, представляющим собой суммы и произведения моментов различного порядка функции  $\exp(-z^2)$ . Нечетные моменты этой функции равны нулю,

а четные можно определить с помощью выражения

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} z^{2r} dz = \frac{\pi^{1/2}}{2^r} (2r-1)!!.$$

В результате подобных довольно громоздких выкладок получим следующую систему дифференциально-разностных уравнений для описания газодинамических течений:

$$(2.2a) \quad \frac{\rho^{j+1} - \rho}{\tau} + \operatorname{div}(\rho \bar{u}) = \frac{\tau}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (\rho u_\alpha u_\beta + \delta_{\alpha\beta} \rho RT),$$

$$(2.2б) \quad \frac{(\rho u_\alpha)^{j+1} - \rho u_\alpha}{\tau} + \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\rho u_\alpha u_\beta + \delta_{\alpha\beta} \rho RT) =$$

$$= \frac{\tau}{2} \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_\beta^2} (\rho u_\alpha (u_\beta^2 + RT + \delta_{\alpha\beta} \cdot 2RT)) + \tau \sum_{p, \alpha=1, p \neq \alpha}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial x_p} (\rho u_p (u_\alpha^2 + RT)) + \tau \frac{\partial^2 \rho u_\alpha u_p u_l}{\partial x_p \partial x_l}, \quad p \neq l \neq \alpha.$$

$$(2.2в) \quad \frac{E^{j+1} - E}{\tau} + \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\beta} \rho u_\beta \frac{1}{2} \left( \sum_{\alpha=1}^3 u_\alpha^2 + 5RT \right) =$$

$$= \frac{\tau}{2} \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_\beta^2} \left( \rho \left[ \frac{u_\beta^4}{2} + 4u_\beta^2 RT + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1, \alpha \neq \beta}^3 u_\alpha^2 (u_\beta^2 + RT) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{5}{2} (RT)^2 \right] \right) + \tau \sum_{p, l=1, p \neq 0}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_l} \left( \frac{1}{2} \left( \sum_{\alpha=1}^3 u_\alpha^2 + 7RT \right) \rho u_p u_l \right);$$

здесь и далее  $\rho = \rho^j$ ,  $T = T^j$ ,  $u = u^j$ .

Система уравнений (2.2) является основной. Поэтому для большей наглядности выпишем ее частный случай, соответствующий одномерному плоскопараллельному течению:

$$(2.3a) \quad \frac{\rho^{j+1} - \rho}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho u^2 + \rho RT),$$

$$(2.3б) \quad \frac{(\rho u)^{j+1} - \rho u}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + \rho RT) = \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho u^3 + 3\rho RTu),$$

$$(2.3в) \quad \frac{E^{j+1} - E}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho u^3}{2} + \frac{5}{2} \rho RTu \right) =$$

$$= \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\rho u^4}{2} + 4\rho u^2 RT + \frac{5}{2} \rho (RT)^2 \right).$$

Системы уравнений (2.2) и (2.3) отличаются от уравнений для невязкого и нетеплопроводного газа членами, которые стоят в правой части, обладают первым порядком малости по  $\tau$  и имеют смысл вязкости. Заметим, что эти уравнения (за исключением (2.2a) и (2.3a)) нельзя получить из дифференциально-разностной аппроксимации уравнений Эйлера.

Обратим внимание на слагаемые, пропорциональные второй произ-

водной от куба скорости, в правых частях уравнений (2.2б) и (2.3б). Как отмечалось в [9], использование уравнений такого типа для описания течений можно рассматривать как способ регуляризации уравнений Навье — Стокса, полезный при проведении численных расчетов.

Кинетическая модель (1.1) — (1.3) позволяет получить и другие уравнения для расчета газодинамических течений. Если вместо разложения (2.1) использовать предположение о том, что функция  $f$  является кусочно-постоянной внутри ячейки  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ ,  $\xi_{h-1} \leq \xi \leq \xi_h$ , где  $\xi_h$  — некоторое разбиение по скоростям молекул, то придем к системе уравнений, которая для плоскопараллельного случая будет выглядеть следующим образом [6]:

$$(2.4a) \quad \frac{\rho^{j+1} - \rho}{\tau} + (\rho u)_{\bar{x}} = \frac{h}{\pi^{1/2}} \left[ \frac{1}{2} (2RT)^{1/2} \rho \times \right. \\ \left. \times \exp\left(-\frac{u^2}{2RT}\right) + \rho u \left(\frac{u}{|u|} \Phi\right) \right]_{\bar{x}, x},$$

$$(2.4б) \quad \frac{(\rho u)^{j+1} - (\rho u)^j}{\tau} + (\rho u^2 + \rho RT)_{\bar{x}} = \\ = \frac{h}{\pi^{1/2}} \left[ \rho u (2RT)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2RT}\right) + 2\rho RT \left(\frac{u}{|u|} \Psi\right) + \right. \\ \left. + \rho u^2 \left(\frac{u}{|u|} \Phi\right) \right]_{\bar{x}, x},$$

$$(2.4в) \quad \frac{E^{j+1} - E}{\tau} + \left(\frac{\rho u^3}{2} + \frac{5}{2} \rho u RT\right)_{\bar{x}} = \\ = \frac{h}{4\pi^{1/2}} \left[ \rho (2RT)^{3/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2RT}\right) \left(2 + \frac{u^2}{2RT}\right) + \right. \\ \left. + \rho RT u \left(\frac{u}{|u|}\right) \left(2\Phi + \frac{1}{2} \Psi\right) + 3\rho u^2 (2RT)^{1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2RT}\right) + \right. \\ \left. + 2\rho u^3 \left(\frac{u}{|u|} \Phi\right) \right]_{\bar{x}, x}.$$

В выражениях (2.4) использовались стандартные обозначения для конечных разностей [10],  $h$  — шаг по пространственной переменной,  $\Phi$  и  $\Psi$  легко определяются с помощью заранее заготовленных таблиц значения интегралов

$$\Phi = \int_0^{\tilde{y}} e^{-y^2} dy, \quad \Psi = \int_0^{\tilde{y}} e^{-y^2} y^2 dy, \quad \tilde{y} = |u| (2RT)^{-1/2}.$$

Система уравнений (2.4) достаточно громоздка. Однако она сразу записывается в конечно-разностном виде. Опыт расчетов по ней послужил основой для выбора алгоритмов численного решения систем уравнений (2.2) и (2.3).

### § 3. Модельное уравнение переноса

Дифференциально-разностные уравнения системы (2.2) могут быть получены с помощью модельного уравнения переноса

$$(3.1) \quad \frac{f^{j+1} - f}{\tau} + \sum_{\alpha=1}^3 \xi_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha}} = I(\mathbf{x}, \xi, t) + \frac{\tau}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \xi_{\alpha} \xi_{\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}},$$

где  $I(\mathbf{x}, \xi, t)$  — интеграл столкновений.

В самом деле, умножим последовательно уравнение (3.1) на суммарные инварианты  $\varphi(\xi)=1$ ,  $\xi$ ,  $\xi^2/2$  и проинтегрируем по всем скоростям молекул  $\xi$ .

Учитывая свойство интеграла столкновений

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) I(x, \xi, t) d\xi = 0,$$

а также полагая при вычислении интегралов

$$p_{\alpha\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} f c_{\alpha} c_{\beta} d\xi, \quad q_{\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} f c^2 c_{\alpha} d\xi,$$

где  $c = \xi - u$ , как это делается при выводе уравнений Эйлера, и интеграла

$$\psi_{\alpha\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} f c^2 c_{\alpha} c_{\beta} d\xi,$$

что функция распределения  $f$  локально-максвелловская, приходим к системе уравнений (2.2).

При таком выводе более естественным становится физический смысл дополнительных членов в правых частях уравнений (2.2) и (2.3), которые можно определить через газокINETическое давление  $p$  и удельную внутреннюю энергию  $\varepsilon$ . С учетом уравнений состояния

$$(3.2) \quad p = p(T, \rho), \quad \varepsilon = \varepsilon(T, \rho)$$

система уравнений (2.3), например, примет вид

$$(3.3a) \quad \frac{\rho^{j+1} - \rho}{\tau} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho u^2 + p),$$

$$(3.3b) \quad \frac{(\rho u)^{j+1} - \rho u}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) = \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho u^3 + 3\rho u),$$

$$(3.3в) \quad \frac{E^{j+1} - E}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho u \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right) = \\ = \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \rho u^2 \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon \right) + \frac{5}{2} u^2 p + p \varepsilon + \frac{p^2}{\rho} \right),$$

где  $E = \rho u^2/2 + p\varepsilon$ .

Система уравнений (3.2), (3.3) позволяет рассматривать не только газодинамические течения с простейшим уравнением состояния  $p = \rho RT$ ,  $\varepsilon = 3RT/2$ , но и более сложные течения с реальными зависимостями давления и внутренней энергии от температуры и плотности.

Модельное кинетическое уравнение (3.1) позволяет легко учесть естественную вязкость и теплопроводность. Так же как и при выводе уравнений Навье — Стокса в процессе нахождения интегралов  $\int f c_{\alpha} c_{\beta} d\xi$  и  $\int f c^2 c_{\alpha} d\xi$ , входящих в левую часть уравнения (3.1), предположим, что функцию распределения  $f$  можно представить в виде [1]

$$f = f_0 - \frac{1}{\nu} \left( c_{\alpha} c_{\beta} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} f_0 + c^2 c_{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x_{\alpha}} f_0 \right),$$

где  $1/\nu$  — малый параметр, имеющий смысл обратной частоты молекулярных столкновений в газах. При вычислении интегралов, входящих в пра-

вую часть уравнения (3.1), ограничимся предположением о локально-максвелловском характере функции распределения  $f=f_0$ . Это можно сделать, если ограничиться членами только первого порядка малости по естественной вязкости и по модельной вязкости, входящей в правую часть системы уравнений (2.2).

Выпишем полученную таким образом систему уравнений для плоского слоя:

$$\begin{aligned} \frac{\rho^{j+1}-\rho}{\tau} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} &= \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\rho u^2+p), \\ \frac{(\rho u)^{j+1}-\rho u}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2+p) &= \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\rho u^3+3\rho u), \\ \frac{E^{j+1}-E}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho u \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} - \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) &= \\ = \frac{\partial}{\partial x} \kappa \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \rho u^2 \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon \right) + \frac{5}{2} u^2 p + p \varepsilon + \frac{p^2}{\rho} \right), \end{aligned}$$

где  $\mu$  и  $\kappa$  — соответственно, коэффициенты естественной вязкости и теплопроводности, являющиеся функциями частоты столкновений  $\nu$ .

#### § 4. Алгоритм численного решения и некоторые примеры расчета

Если рассмотреть линейный аналог схемы с центральными разностями, стоящими в левой части выражений (2.4), то она окажется абсолютно неустойчивой [10]. С другой стороны, расчеты показали устойчивость полной разностной схемы (2.4), если выполнено условие  $\tau \tilde{\nu} < h$ .

Аналогично схеме (2.4), при построении алгоритма расчета для систем уравнений (2.2), (2.3) и (3.3) заменим пространственные производные, стоящие в левых частях этих уравнений, на их центральные разности.

Для аппроксимации членов модельной вязкости, стоящих в правых частях этих уравнений, например

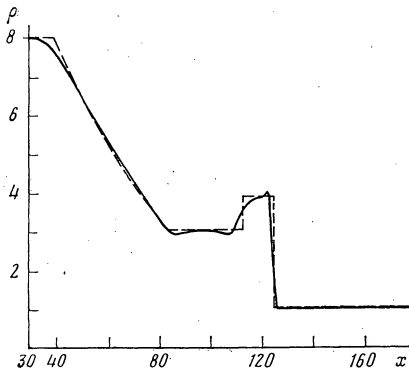
$$\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\rho u^3+3\rho u),$$

можно воспользоваться стандартной схемой

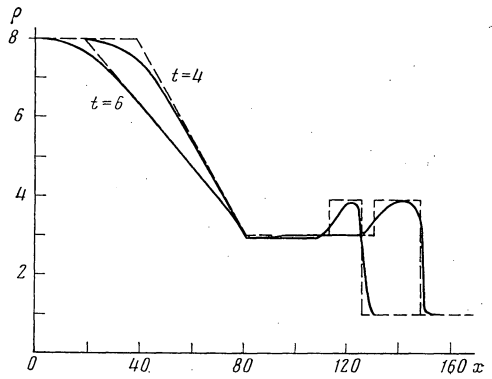
$$\frac{\tau}{2}(\rho u^3+3\rho u)_{xx}.$$

Однако при таком подходе с уменьшением  $\tau$  вязкие члены будут стремиться к нулю, что приводит в численных расчетах к возникновению сильных осцилляций за фронтом ударной волны [7]. Этот факт является следствием того, что с уменьшением шага по времени  $\tau$  системы (2.2), (2.3) и (3.3) переходят в системы уравнений с малым параметром при старшей производной.

От этой ситуации можно избавиться, одновременно уменьшая шаг пространственной сетки. Тем не менее такой подход нельзя считать удобным с точки зрения вычислительной практики. Для того чтобы уменьшение шага по времени  $\tau$  не привело к негативным последствиям, воспользуемся одной из схем (например, рассмотренной в [11]), используемых для аппроксимации уравнений с малым параметром при старшей производной.



Фиг. 1



Фиг. 2

водной:

$$(4.1) \quad \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho u^3 + 3\rho u) \approx \frac{h}{2\tilde{v}} t h^{-1} \left( \frac{h}{\tau\tilde{v}} \right) (\rho u^3 + 3\rho u)_{xx}.$$

При больших  $\tau\tilde{v}/h$  построенная аппроксимация переходит в обычную аппроксимацию вторых производных со вторым порядком точности.

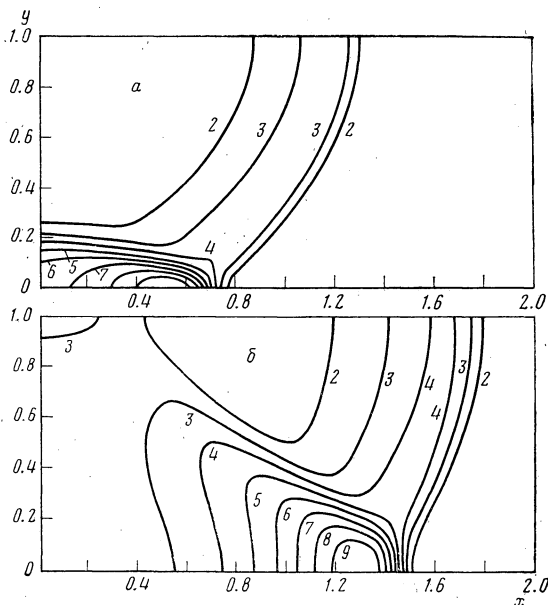
В качестве одномерного теста решалась задача о распаде сильного разрыва [12], [13]. В начальный момент слева от разрыва  $\rho=8$ ,  $T=60$ , справа  $\rho=1$ ,  $T=1$ . При этом  $u=0$ ,  $R=1$ . Сетка по  $x$  выбиралась равномерной, шаг по времени варьировался от 0.1 до  $10^{-4}$ . На фиг. 1 представлены результаты расчетов по схеме с аппроксимацией пространственных производных центральными разностями на момент времени  $t=4$  ( $\tau=0.05$ ,  $h=1$ ). Штриховая линия на фиг. 1 и 2 — точное решение. С увеличением временного шага схема начинает терять устойчивость, поскольку она является явной. При уменьшении  $\tau$  осцилляции за фронтом ударной волны увеличиваются, что тоже приводит к расходимости.

На фиг. 2 приведены результаты расчетов по схеме типа (4.1) на моменты времени  $t=4$  и  $t=6$  при  $\tau=0.01$ ,  $h=1$ . Уменьшение шага  $\tau$  начиная с некоторого  $\tau_0=0.05$  не влияет на результаты расчетов. С уменьшением пространственного шага  $h$  точность решения возрастает. Обращает на себя внимание достаточно хорошее совпадение с точным решением и крутой фронт ударной волны [7]. Погрешность полученного решения приблизительно соответствует погрешности решения по схеме (2.4) на вдвое более густой сетке.

В качестве двумерного теста рассматривалась задача об ударе цилиндрической ударной волны о плоскую границу. В начальный момент в четырех центральных ячейках задавалась зона повышенного давления  $T=100$ ,  $\rho=1$ ,  $u=0$  ( $p=\rho RT$ ,  $R=1$ ). Вне горячей зоны  $T=1$ ,  $\rho=1$  пространственный шаг сетки составлял  $\Delta x=\Delta y=0.0333$ .

После начала газодинамического разлета течение достаточно быстро становится одномерным. Таким оно остается до тех пор, пока цилиндрическая ударная волна не сталкивается с жесткой стенкой, после чего течение приобретает явно выраженный двумерный характер. На фиг. 3 представлены изолинии давления, рассчитанные на сетке  $31 \times 61$  на моменты времени  $t=0.25$  (фиг. 3, а: 2 — для 2.2, 3 — для 3.4, 4 — для 4.6, 5 — для 5.8, 6 — для 7.0, 7 — для 8.2, 8 — для 9.4, 9 — для 10.6) и  $t=0.45$  (фиг. 3, б: 2 — для 1.6, 3 — для 2.2, 4 — для 2.8, 5 — для 3.4, 6 — для 4.0, 7 — для 4.6, 8 — для 5.2, 9 — для 5.8). Линии расположены эквидистантно. Видно, как зона повышенного давления, возникающая при таком столк-





Фиг. 3

новении, с течением времени удаляется от оси  $x=0$ . При этом образуется типичная газодинамическая конфигурация, характеризующаяся одновременным наличием прямой ударной волны и отраженного течения.

#### Литература

1. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967.
2. Поткин А. В. Кинетический анализ разностных схем для газовой динамики.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, т. 15, № 6, с. 1492–1498.
3. Reitz R. D. One-dimensional compressible gaz dynamics calculations using the Boltzmann equation.— J. Comput. Phys., 1981, v. 42, № 1, p. 108–123.
4. Aristov V. V., Tcheremissine F. G. The numerical method for rarefied and continuum gas flow.— In: XIII Internat. Symposium Rarefied Gas Dynamics. Book of Abstracts. № 1. Novosibirsk, 1982, p. 147–149.
5. Аристов В. В., Черемисин Ф. Г. Решение уравнений Эйлера и Навье – Стокса на основе операторного расщепления кинетического уравнения.— Докл. АН СССР, 1983, т. 272, № 3, с. 555–559.
6. Волчинская М. И., Павлов А. Н., Четверушкин Б. Н. Об одной схеме интегрирования уравнений газовой динамики.— Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1983, № 113.
7. Елизарова Т. Г., Павлов А. Н., Четверушкин Б. Н. Использование кинетической модели для вывода уравнений, описывающих газодинамические течения.— Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1983, № 144.
8. Елизарова Т. Г., Четверушкин Б. Н. Об одном вычислительном алгоритме для расчета газодинамических течений.— Докл. АН СССР, 1984, т. 279, № 1, с. 80–83.
9. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
10. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1978.
11. Куликов Ю. Н., Четверушкин Б. Н. Неявный разностный метод определения температуры в задачах радиационной газовой динамики.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1973, т. 13, № 1, с. 136–146.
12. Жмакин А. И., Фурсенко А. А. Об одной монотонной разностной схеме сквозного счета.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1980, т. 20, № 4, с. 1021–1031.
13. Головизнин В. М. и др. Двумерные полностью консервативные разностные схемы газовой динамики с разнесенными скоростями.— Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1983, № 105.

Поступила в редакцию 4.IV.1984  
Переработанный вариант 17.VIII.1984