

УДК 517.958:539.3(4)

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛОЙ КОНВЕКЦИИ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ ПРАНДТЛЯ<sup>1)</sup>

© 1998 г. Т. Г. Елизарова\*, И. С. Калачинская\*\*, А. В. Ключникова\*\*, Ю. В. Шеретов\*\*\*

(\*125047 Москва, Миусская пл, 4а, ИММ РАН;

\*\*119899 Москва, Воробьевы горы, МГУ, ВМК;

\*\*\*170043 Тверь, ТГУ)

Поступила в редакцию 03.03.98 г.

Излагаются результаты численного моделирования задач о гравитационной и термокапиллярной конвекции в полостях прямоугольной формы при малых числах Прандтля. Результаты получены на основе квазигидродинамической системы уравнений и сопоставлены с данными расчетов с использованием системы Навье–Стокса.

### ВВЕДЕНИЕ

Для описания течений вязкой несжимаемой жидкости широко применяется система уравнений Навье–Стокса. Однако при построении численных алгоритмов решения этой системы возникает ряд трудностей, которые в значительной мере связаны с моделированием течений с большими скоростями. Это связано как с необходимостью использования очень подробных сеток для разрешения пограничных слоев, так и с проблемами построения специфических аппроксимаций или введением регуляризаторов для обеспечения устойчивости счета. Кроме того, при построении численных алгоритмов возникает необходимость использования специальных граничных условий для давления в том случае, если исходная система решается в переменных “скорость–давление”, или для вихря скорости в том случае, если алгоритм решения основан на записи системы в переменных “функция тока–вихрь скорости”. В данной работе для численного моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости рассмотрен другой подход, основанный на использовании квазигидродинамических (к.г.д.) уравнений, который в значительной мере позволяет решить указанные проблемы.

Системы уравнений этого семейства для описания течения газа впервые были предложены в [1], [2] и были названы авторами квазигазодинамическими уравнениями. Эти уравнения и тесно связанные с ними кинетически согласованные разностные схемы первоначально были получены как путем осреднения модельного уравнения Больцмановского типа, так и на основе рассмотрения численных алгоритмов решения кинетических уравнений. В обоих случаях поведение частиц газа рассматривалось как циклически повторяющийся процесс бесстолкновительного разлета и последующего мгновенного установления локально-максвелловского равновесия частиц. Численные алгоритмы, базирующиеся на этом подходе, оказались чрезвычайно эффективными при моделировании сложных задач сверхзвуковой газовой динамики как стационарного, так и нестационарного типа. В частности, на их основе было проведено численное моделирование пульсационных течений, актуальных при исследовании акустических нагрузок в реальных системах (см. [3]).

В [4] дан феноменологический вывод новой к.г.д. системы уравнений, которая отличается от классической системы Навье–Стокса дополнительными дивергентными членами. В указанном выводе существенным было предположение о том, что средний импульс единицы объема жидкости  $\mathbf{ru}$ , вообще говоря, не равен вектору плотности потока ее массы  $\mathbf{j}$ . Очевидно, что ответ на вопрос о равенстве векторов  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{ru}$  зависит от процедуры формирования средних величин – плотности  $\rho$ , гидродинамической скорости  $\mathbf{u}$ , температуры  $T$ .

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-01-00155).

В теории Навье–Стокса при построении уравнений гидродинамики используется сглаживание по физическому пространству  $\mathbb{R}_x^3$  в фиксированный момент времени  $t$ . Каждой точке  $(\mathbf{x}, t)$  ставится в соответствие множество  $M$  физически бесконечно малых объемов  $V$  в пространстве  $\mathbb{R}_x^3$ . Предполагается, что на множестве  $M$  значения средних  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $T$  постоянны и, следовательно, эти значения можно рассматривать как физические величины. При переходе от одной инерциальной системы координат к другой пространственные средние  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $T$  преобразуются по вполне определенному закону, а уравнения Навье–Стокса, описывающие их эволюцию, инвариантны относительно группы преобразований Галилея [5].

В отличие от уравнений Навье–Стокса, к.г.д. уравнения описывают эволюцию пространственно-временных средних  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $T$ . Каждой точке  $(\mathbf{x}, t)$  ставится в соответствие множество  $M_1$  физически бесконечно малых объемов  $V_1$  в фазовом пространстве  $\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_t$ . Если для любого  $V_1$  из  $M_1$  значения средних постоянны, то эти значения можно рассматривать как физические величины. Заметим, что пространственно-временные средние, вообще говоря, относительны, т.е. могут изменяться при переходе от одной инерциальной системы координат к другой. Процедура формирования пространственно-временных средних величин подробно описана в [6]. Уравнение баланса массы в локальной форме должно иметь вид

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Однако строго доказать, что  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{u}$ , невозможно. За любое физически бесконечно малое время средний импульс единицы объема успеет измениться.

В работах [4], [6], [7] для к.г.д. уравнений построена серия точных решений, обоснована процедура перехода к массовым лагранжевым координатам, рассмотрена к.г.д. система в приближении Буссинеска, изучены свойства решений типа неподвижной ударной волны и приближение ламинарного пограничного слоя, а также получен ряд следствий к.г.д. системы.

Вопросам численного моделирования на основе к.г.д. уравнений посвящены работы [8], [9]. В частности, рассмотрены известные тестовые задачи о течении несжимаемой изотермической жидкости в квадратной камере с подвижной верхней крышкой, о течении Пуазейля в плоском канале и о гравитационной конвекции в квадратной полости, подогреваемой сбоку.

В настоящей работе с помощью вычислительного алгоритма, построенного на основе к.г.д. уравнений, проведено численное исследование задач о гравитационной и термокапиллярной конвекции в прямоугольных полостях при малых числах Прандтля. Наряду с первичными (стационарными) режимами течений удалось рассчитать и вторичные (нестационарные) режимы. Результаты численных расчетов хорошо совпадают с аналогичными результатами, полученными в работах других авторов на основе модели Навье–Стокса.

При численной реализации к.г.д. уравнений не возникает проблемы с построением граничных условий для давления при решении уравнения Пуассона и используется простая аппроксимация пространственных производных. Регуляризаторы, необходимые для стабилизации счета при больших числах Грасгофа и Марангони, обеспечиваются дополнительными дивергентными членами с малым параметром, которые возникают в уравнениях благодаря введенному в рассмотрение дополнительному сглаживанию по времени.

## 1. СИСТЕМА КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ БУССИНЕСКА

Указанная в названии раздела система была выведена в [4] и может быть представлена в виде

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{w}) = 0, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \Pi - \beta \mathbf{g} T, \quad (1б)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \nabla T = \chi \Delta T. \quad (1в)$$

Здесь  $\rho = \text{const} > 0$  – среднее значение плотности,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  – гидродинамическая скорость,  $p = p(\mathbf{x}, t)$  – давление, отсчитываемое от гидростатического,  $T = T(\mathbf{x}, t)$  – отклонение температуры от ее среднего значения  $T_0$ . Величины  $\mathbf{j}$  и  $\Pi$ , интерпретируемые как вектор плотности потока

массы жидкости и тензор вязких напряжений, соответственно, вычисляются следующим образом:

$$\mathbf{j} = \rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}), \quad (2)$$

$$\Pi = \Pi_{NS} + \rho(\mathbf{u} \otimes \mathbf{w}), \quad (3)$$

где  $\Pi_{NS} = \eta[(\nabla \otimes \mathbf{u}) + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T]$  – навье-стоксовский тензор вязких напряжений,

$$\mathbf{w} = \tau \left[ (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \beta \mathbf{g} T \right]. \quad (4)$$

В уравнениях (1), а также в выражениях (2)–(4), коэффициенты динамической вязкости  $\eta$  и температуропроводности  $\chi$ , температурный коэффициент расширения жидкости  $\beta$  и характерное время  $\tau$  считаются положительными постоянными, вектор  $\mathbf{g}$  – ускорение свободного падения. Параметр  $\tau$  может быть вычислен (см. [4]) по формуле  $\tau = \eta/(\rho c_s^2)$ , где  $c_s$  – скорость звука в жидкости при температуре  $T_0$ . Величина  $\rho \mathbf{u}$  интерпретируется как пространственно-временной средний импульс единицы объема жидкости.

В записи системы (1) использованы стандартные обозначения тензорного анализа. При вычислении дивергенции от несимметричного тензора  $\Pi$  свертка осуществляется по его первому индексу.

К.г.д. система (1) может быть приведена к эквивалентному дивергентному виду

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div} \mathbf{w}, \quad (5a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \Pi_{NS} + \operatorname{div}[(\mathbf{w} \otimes \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \otimes \mathbf{w})] - \beta \mathbf{g} T, \quad (5b)$$

$$\partial T / \partial t + \operatorname{div}(\mathbf{u} T) = \operatorname{div}(\mathbf{w} T) + \chi \Delta T. \quad (5b)$$

При  $\tau \rightarrow 0$  она переходит в классическую систему уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска.

При исследовании течений в замкнутых областях для к.г.д. системы (5) используются традиционные граничные условия, принятые в теории Навье–Стокса, дополненные условием непротекания массы в виде

$$(\mathbf{j} \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma} = 0, \quad (6)$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$  – поле внешних единичных нормалей к поверхности  $\Gamma$ .

Выпишем систему (5) в безразмерном виде для случая плоских нестационарных течений:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \tau_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \tau_0 \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - \operatorname{Gr} T \right), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{2}{\operatorname{Re}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{\operatorname{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{\operatorname{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ + 2\tau_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[ u \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] + \tau_0 \frac{\partial}{\partial y} \left[ v \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] + \tau_0 \frac{\partial}{\partial y} \left[ u \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - \operatorname{Gr} T \right) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(v^2) + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{2}{\operatorname{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{\operatorname{Re}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{\operatorname{Re}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ + 2\tau_0 \frac{\partial}{\partial y} \left[ v \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - \operatorname{Gr} T \right) \right] + \tau_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[ u \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - \operatorname{Gr} T \right) \right] + \\ + \tau_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[ v \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] + \operatorname{Gr} T, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uT) + \frac{\partial}{\partial y}(vT) = \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \tau_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[ T \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] + \\ + \tau_0 \frac{\partial}{\partial y} \left[ T \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - \text{Gr} T \right) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $\text{Re}$ ,  $\text{Pr}$ ,  $\text{Gr}$  – числа Рейнольдса, Прандтля и Грасгофа соответственно,  $\tau_0$  – характерное время, также записанное в безразмерном виде. Способ обезразмеривания системы уравнений (7)–(10) и условия на границе определяются конкретной задачей и будут описаны ниже.

## 2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

Для численного решения выписанной выше системы уравнений используется метод конечных разностей. Пространственные производные в системе (7)–(10) аппроксимируются на неравномерной пространственной сетке центральными разностями вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &\approx \frac{2}{h_i + h_{i+1}} \left( \frac{f_{i+1} + f_i}{2} - \frac{f_{i-1} + f_i}{2} \right), \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\partial f}{\partial x} \right) &\approx \frac{2}{h_i + h_{i+1}} \left( \kappa_{i+1/2} \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \kappa_{i-1/2} \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \right), \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\partial f}{\partial y} \right) &\approx \frac{2}{h_i + h_{i+1}} \frac{2}{h_j + h_{j+1}} \left( \kappa_{i+1/2, j} (f_{i+1/2, j+1/2} - f_{i+1/2, j-1/2}) - \kappa_{i-1/2, j} (f_{i-1/2, j+1/2} - f_{i-1/2, j-1/2}) \right), \end{aligned}$$

где  $x_{i+1} = x_i + h_{i+1}$ ,  $i = \overline{1, N_1 - 1}$ ,  $y_{j+1} = y_j + h_{j+1}$ ,  $j = \overline{1, N_2 - 1}$ ,  $\kappa_{i \pm 1/2} = (\kappa_i + \kappa_{i \pm 1})/2$ . При этом все величины вычисляются в узлах разностной сетки. Значения величин в полужелтых узлах определяются как полусуммы их значений в ближайших узлах с целыми индексами. Смешанные производные аппроксимируются с использованием значений величин в центрах ячеек, которые вычисляются как 1/4 суммы значений этих величин в прилегающих узлах. Производные по времени аппроксимируются разностями вперед с первым порядком. Граница расчетной области располагается в полужелтых узлах сетки. Аппроксимация граничных условий для скорости и температуры осуществляется путем вычисления соответствующих производных со вторым порядком точности и обеспечивается введением дополнительных слоев фиктивных узлов по внешним границам расчетной области.

На каждом временном шаге поле давления находится по полю скорости и температуры путем решения уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{\tau_0} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \text{Gr} T \right), \quad (11)$$

которое следует из (7) и аппроксимируется так же, как и уравнения движения. Граничные условия для давления следуют из условия непротекания (6) и аппроксимируются со вторым порядком точности путем экстраполяции уравнения Пуассона на границу. Для решения (11) применяется предобусловленный обобщенный метод сопряженных градиентов из [10]. Предобуславливатель строится при помощи поточечного неполного разложения матрицы системы линейных уравнений  $\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$ . В правой верхней расчетной точке во все моменты времени давление поддерживается постоянным и равным единице. Скорость сходимости итераций при решении уравнения (11) определяет эффективность всего алгоритма в целом. Условие прекращения итераций имеет вид

$$\varepsilon_p = \left[ \sum_{ij} (p_{\bar{x}, ij} + p_{\bar{y}, ij} + f_{ij})^2 h^2 \right]^{1/2} \leq 10^{-5},$$

где  $-f_{ij}$  – правая часть разностного аналога уравнения (11). Поля скорости и температуры на следующем временном шаге определяются по явной схеме из разностных аналогов уравнений (8)–

(10). Течение считается установившимся, если

$$\varepsilon_u = \max_{ij} \left| \frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n}{\Delta t} \right| \leq 0.001,$$

где  $n$  – номер шага по времени.

Результаты расчетов представлены в виде изолиний функции тока, изотерм и изолиний скорости и давления, а также графиков эволюции во времени скорости течения в нескольких точках расчетной области. Функция тока  $\Psi$  строится на основе векторного поля  $\mathbf{u} - \mathbf{w}$ , для которого выполнено условие  $\text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{w}) = 0$ :

$$u - w_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v - w_2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

где  $\mathbf{w} = (w_1, w_2)^T$ . При малых значениях параметра  $\tau_0$  векторы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{u} - \mathbf{w}$  близки.

### 3. ТЕПЛОВАЯ КОНВЕКЦИЯ

Рассматривается задача о тепловой гравитационной конвекции несжимаемой жидкости в прямоугольной полости высоты  $H$  и длины  $L$  при низких числах  $\text{Pr}$ . Эта задача представляет собой известный тест, предложенный в 1987 г. для анализа численных методик расчета конвективных течений в расплавах. Практическая необходимость таких расчетов связана с тем, что периодические колебания температуры в металлических расплавах (жидкостях с малым числом Прандтля) создают весьма серьезные проблемы при выращивании полупроводниковых кристаллов (см. [11]).

Течение описывается системой уравнений (7)–(10), которая может быть приведена к безразмерному виду с помощью соотношений

$$x = \tilde{x}H, \quad y = \tilde{y}H, \quad u = \tilde{u}\frac{v}{H}, \quad v = \tilde{v}\frac{v}{H}, \quad t = \tilde{t}\frac{H^2}{v}, \quad p = \tilde{p}\rho\left(\frac{v}{H}\right)^2, \quad T = \tilde{T}\frac{\Delta T}{A},$$

где  $A = L/H$ ,  $\Delta T = T_1 - T_2$  – разность температур между левой и правой стенками,  $v = \eta/\rho$  – коэффициент кинематической вязкости. При выбранном обезразмеривании имеем  $\text{Gr} = \beta g \Delta T H^4 / (Lv^2)$ ,  $\text{Re} = 1$ ,  $\text{Pr} = v/\chi$ ,  $\tau_0 = M^2$ , где  $M = v/(Hc_s)$  – число Маха. Полость имеет твердую нижнюю стенку, а ее верхняя граница может быть либо твердой (R–R случай), либо свободной (R–F случай).

К системе уравнений (8)–(11) добавим следующие граничные условия:

нижняя стенка:  $u = 0$ ,  $v = 0$ ,  $\partial p / \partial y = \text{Gr}T$ ,  $T(x) = A - x$ ;

верхняя граница:  $u = 0$ ,  $v = 0$ ,  $\partial p / \partial y = \text{Gr}T$ ,  $T(x) = A - x$  для R–R случая;

$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ,  $v = 0$ ,  $\partial p / \partial y = \text{Gr}T$ ,  $T(x) = A - x$  для R–F случая;

левая боковая стенка:  $u = 0$ ,  $v = 0$ ,  $\partial p / \partial x = 0$ ,  $T = A$ ;

правая боковая стенка:  $u = 0$ ,  $v = 0$ ,  $\partial p / \partial x = 0$ ,  $T = 0$ .

Безразмерный параметр  $\tau_0$  можно связать с числом Грасгофа соотношением

$$\tau_0 = \frac{1}{\text{Gr}} \frac{\beta g \Delta T H^2}{Lc_s^2} = \alpha / \text{Gr},$$

где величина  $\alpha$  весьма мала. Так, например, для тепловой конвекции воздуха при  $\Delta T = 100^\circ\text{C}$  в квадратной полости высотой  $H = 1$  м величина  $\alpha \sim 3 \times 10^{-5}$ . При проведении расчетов параметр  $\alpha$  следует выбирать из интервала  $0 < \alpha \leq 1$ . В большинстве расчетов  $\alpha$  выбирался равным единице. Как показали численные эксперименты, уменьшение параметра  $\alpha$  приводит к незначительному уточнению результатов расчета, но в то же время приводит к ухудшению устойчивости численного алгоритма, что требует уменьшения временного шага интегрирования  $\Delta t$ . Таким образом, в данных расчетах слагаемые с  $\tau_0$  можно рассматривать как регуляризующие добавки.

Задача о тепловой конвекции в прямоугольной каверне ( $A = 4$ ), подогреваемой слева, решалась для умеренных чисел Грасгофа и при низком числе Прандтля  $\text{Pr} = 0.015$  на равномерной пространственной сетке  $22 \times 82$  с шагом  $h = 1/20$ . Во всех вариантах шаг по времени выбирался равным  $10^{-6}$ .

Для R–R случая при  $Gr = 4 \times 10^4$  в качестве начальных условий использовались поля скорости и температуры, полученные в расчете с  $Gr = 3 \times 10^4$ . Во всех остальных расчетах в качестве начальных условий использовались невозмущенные поля скорости и температуры.

В [11] рассматриваются 4 группы методов решения данной задачи: конечно–разностные, метод конечного объема, метод конечных элементов и спектральные. Однако, так как авторы использовали конечно–разностную аппроксимацию, то результаты расчетов были сопоставлены только с численными результатами, полученными с использованием конечно–разностных методов, которые суммированы в обзоре [12].

В частности, в [13] уравнения Навье–Стокса записываются в переменных “функция тока–вихрь”. Процедура численного решения основана на методе установления. Сущность метода состоит в том, что к уравнению для функции тока добавляется нестационарный член, что делает уравнение параболическим, и ко всем остальным уравнениям добавляются искусственные регуляризаторы. Для решения разностных уравнений применялась неявная схема метода чередующихся направлений (схема ADI). Для аппроксимации производных по времени использовались разности вперед, а для производных по пространству – центральные разности второго порядка точности. Большинство вычислений проводилось на равномерной сетке  $81 \times 321$ .

В [14] для разностной аппроксимации уравнений Навье–Стокса в переменных “функция тока–вихрь” используется метод Эрмита аппроксимации пространственных переменных, в котором переменные и их первые и вторые производные берутся как неизвестные. Для численного решения применена схема ADI. Требуемые значения вихря на стенке вычисляются при помощи соотношения Эрмита четвертого порядка точности. Было опробовано несколько неравномерных сеток, сгущающихся около стенок и областей больших градиентов. Большинство решений было получено с использованием сетки  $41 \times 121$ .

В [15] для решения использовался полуявный метод с расщеплением по времени. Полуявный подход заключается в применении явного метода Адамса–Бэшфорта к нелинейным конвективным членам и неявного метода Кранка–Николсона к вязким членам. При аппроксимации по пространству были применены центральные разности второго порядка точности. Все вычисления проводились на равномерной сетке  $25 \times 97$ .

В [16] был использован известный пакет программ AQUA (Advanced simulation using quadratic upstream differencing algorithm), использующий направленные разности второго порядка точности. Конечно–разностные уравнения выводятся при помощи метода контрольного объема. Полученная разностная схема имеет второй порядок точности как по времени, так и по пространству. Для аппроксимации конвективных членов применены разности против потока. Диффузионные члены аппроксимируются при помощи центральных разностей второго порядка. Используется равномерная пространственная сетка  $21 \times 81$ .

При сравнении следует учесть, что во всех цитированных работах, в отличие от расчетов авторов, нагретой является правая стенка каверны.

**1. Результаты расчетов для R–R случая.** Расчеты проведены для умеренных чисел Грасгофа:  $Gr = 2 \times 10^4$ ,  $3 \times 10^4$  и  $4 \times 10^4$ .

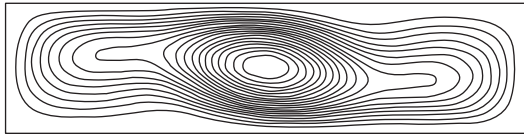
При  $Gr = 2 \times 10^4$  получен стационарный режим течения (фиг. 1). Линии тока представляют собой один вытянутый в длину вихрь. Полученные результаты как качественно, так и количественно хорошо соответствуют данным из [12], [13], в которых расчеты проведены на очень подробных пространственных сетках (в [13] – на сетке  $81 \times 321$ ). Ниже характерные значения функции тока и компонент скорости даны в сравнении с аналогичными величинами из [12], причем они оказываются весьма близкими. Так как в [12] обезразмеривание скорости было иным, чем в настоящей работе, а именно:  $u = \tilde{u} \nu Gr^{0.5}/H$ ,  $v = \tilde{v} \nu Gr^{0.5}/H$ , то для сравнения с результатами [12] в табл. 1 приведены значения следующих величин:

$$\psi^* = \max_{xy} |\psi| / Gr^{0.5}, U^* = \max_y |u(y)| / Gr^{0.5} \text{ при } x = 3A/4, V^* = \max_x |v(x)| / Gr^{0.5} \text{ при } y = 1/2.$$

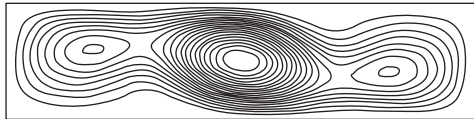
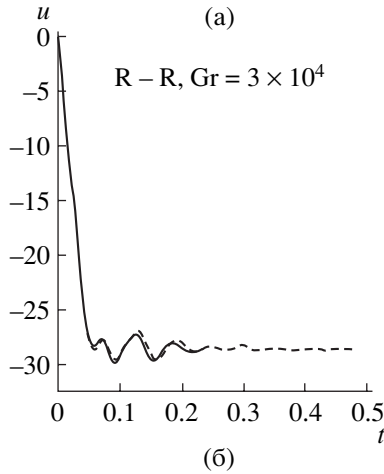
При  $Gr = 3 \times 10^4$  получен стационарный режим течения (фиг. 2а, 2б), процесс установления которого имеет вид затухающих колебаний. На фиг. 2а проведено сравнение эволюционных кривых горизонтальной компоненты скорости в центре области, полученных в расчетах при  $\alpha = 1$  (сплошная линия) и  $\alpha = 0.1$  (штриховая линия). Полученные кривые прак-

**Таблица 1**

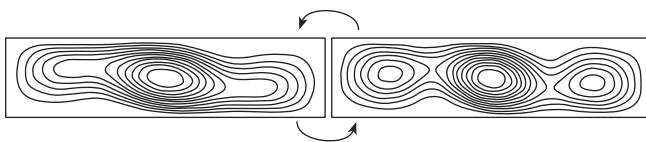
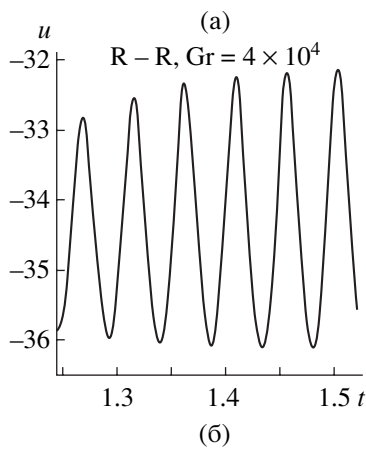
Источник	$V^*$	$U^*$	$\psi^*$
Данная работа	0.448	0.672	0.409
[12]	0.452–0.482	0.669–0.704	0.406–0.409



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

(фиг. 5а), что соответствует частоте  $f_1 = 15.48$ . В обзоре [12] частота колебаний в этом случае варьируется у разных авторов от 15.580 до 17.2. Течение в этой задаче представляет собой вихрь, смещенный к правой (холодной) стенке каверны. В левой части каверны формируется второй, более слабый по интенсивности вихрь (фиг. 5в). Процесс колебаний заключается в изменении

тически совпадают, что свидетельствует о слабой зависимости решения от параметра регуляризации в выбранной области его значений. В большинстве работ в данном случае получен колебательный режим течения, однако, как показано в [14], [15], возможен и стационарный режим. Установившееся течение представляет собой основной вихрь, расположенный вблизи центра, и два дополнительных вихря в правой и левой частях каверны. В [15] для этого случая получено стационарное решение, причем сравнение приведенных в этой работе результатов с результатами расчетов авторов показывает их хорошее соответствие. В частности, сравнивались профили горизонтальной скорости вдоль вертикального сечения, расположенного на расстоянии  $x = 3A/4$  от левой стенки, и распределения вертикальной скорости в сечении  $y = 1/2$ , а также линии тока.

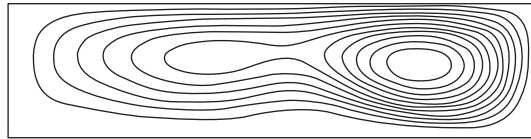
При  $Gr = 4 \times 10^4$  получен колебательный режим течения (фиг. 3), период колебаний которого можно оценить как  $T_{\text{vib}} = 0.047$  (фиг. 3а), что соответствует частоте  $f_1 = 1/T_{\text{vib}} = 21.28$ . Данный результат очень близок к приведенным в [12], где суммируются данные расчетов многих авторов. Частота колебаний для данного случая составляет у различных авторов от 21.186 до 22.35. Течение в этой задаче представляет собой структуру, аналогичную предыдущему варианту, причем процесс колебаний заключается в изменении интенсивности вихревых образований и хорошо соответствует результатам [15].

## 2. Результаты расчетов для R-F случая.

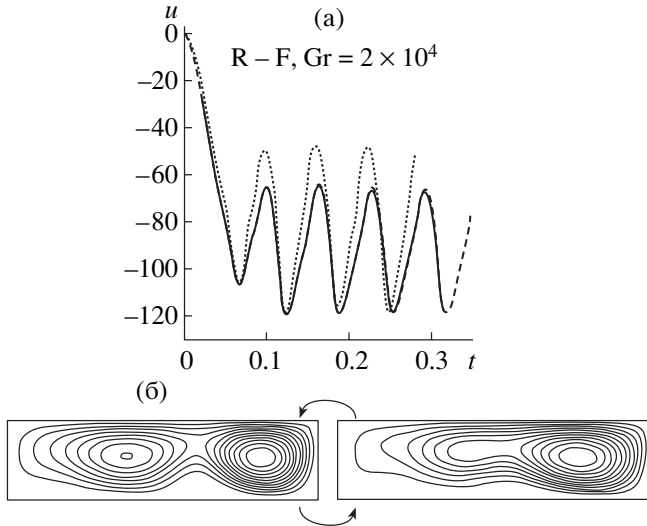
В отличие от предыдущего случая в этих вариантах на верхней стенке ставится условие скольжения для тангенциальной составляющей скорости, что облегчает процесс зарождения колебаний.

При  $Gr = 10^4$  получен стационарный режим течения (фиг. 4), в котором образуется асимметричная структура, состоящая из двух ячеек. Большая из них располагается возле холодной стенки, другая, меньшая по величине, находится между центром полости и горячей левой стенкой. Приведенные рисунки близко соответствуют аналогичным рисункам из [16].

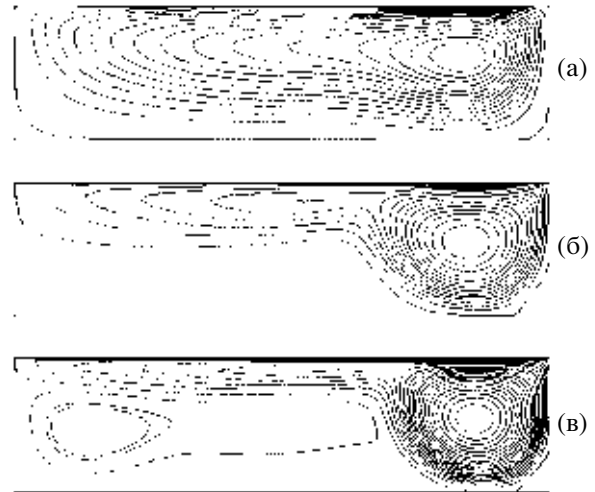
При  $Gr = 2 \times 10^4$  получен колебательный режим течения (фиг. 5), период колебаний которого можно оценить как  $T_{\text{vib}} = 0.0646$



Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

интенсивности этих образований. В этом случае явно видна временная эволюция вторичных вихрей, картина которой хорошо соответствует аналогичным фигурам, приведенным в [16].

Для выяснения влияния параметра  $\alpha$  этот вариант был рассчитан с  $\alpha = 1$  (сплошная линия) и  $\alpha = 0.1$  (штриховая линия), а для проверки точности вариант с  $\alpha = 1$  пересчитан на вдвое более подробной сетке  $42 \times 162$  (пунктирная линия). Сравнение временной эволюции скорости для этих вариантов приведено на фиг. 5а. Видно, что уменьшение  $\alpha$  не изменяет ни период, ни амплитуду колебаний, соответствующие кривые практически неразличимы. Сгущение сетки не влияет на частоту колебаний, изменяя несколько их амплитуду.

#### 4. ЗАДАЧА О КОНВЕКЦИИ МАРАНГОНИ

Ниже рассматривается задача о термокапиллярной конвекции вязкой несжимаемой жидкости при отсутствии гравитации ( $\mathbf{g} = 0$ ) (см. [17], [18]). Данной проблеме посвящено большое количество исследований, так как во многих процессах космической технологии (направленная кристаллизация, безтигельная зонная плавка) поверхность жидкости (расплава) является свободной, и именно термокапиллярный эффект приводит к возникновению конвективного движения в расплаве.

Конвективное течение обусловлено только силами поверхностного натяжения, что записывается в виде следующего условия равновесия сил поверхностного натяжения и вязкого трения на верхней свободной границе:  $\Pi_{yx} = (\partial\sigma/\partial T)\partial T/\partial x$ , где  $\sigma = \sigma(T)$  – коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

В двумерном случае согласно (2)–(4) имеем

$$\Pi = \eta \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} u\left(\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial p}{\partial x}\right) & u\left(\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial p}{\partial y}\right) \\ v\left(\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial p}{\partial x}\right) & v\left(\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial p}{\partial y}\right) \end{bmatrix}.$$



Так как на верхней границе  $\partial p/\partial y = 0$ ,  $v = 0$ , то  $\partial v/\partial x = 0$ , и тензор  $\Pi$  упрощается:

$$\Pi = \eta \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} u\left(\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Окончательно получаем условие на верхней границе в размерном виде:  $\eta \partial u/\partial y = (\partial \sigma/\partial T) \partial T/\partial x$ , которое совпадает с традиционным граничным условием в задаче о термокапиллярной конвекции для уравнений Навье–Стокса. Заметим, что для большинства жидкостей  $\partial \sigma/\partial T < 0$ .

Рассматривается течение в прямоугольной полости высоты  $H$  и длины  $L$ . Течение описывается системой уравнений (5), в которой внешняя сила отсутствует. Система уравнений в двумерном случае записывается в виде (7)–(10). Переход к безразмерным величинам осуществляется по формулам

$$x = \tilde{x}H, \quad y = \tilde{y}H, \quad u = \tilde{u}\frac{v}{H}, \quad v = \tilde{v}\frac{v}{H}, \quad t = \tilde{t}\frac{H^2}{\nu}, \quad p = \tilde{p}\rho\left(\frac{v}{H}\right)^2, \quad T = \tilde{T}\Delta T.$$

При выбранном обезразмеривании число Марангони:

$$\text{Ma} = \frac{\partial \sigma/\partial T}{A} \frac{H}{\eta \chi},$$

а также  $\text{Re} = 1$ ,  $\text{Pr} = \nu/\chi$ ,  $\tau_0 = \text{M}^2$ ,  $\text{M} = v/(Hc_s)$  – число Маха, которое для рассматриваемых задач является малой величиной.

Система (8)–(11) замыкается следующими граничными условиями:

нижняя стенка:  $u = 0$ ,  $v = 0$ ,  $\partial p/\partial y = 0$ ,  $\partial T/\partial y = 0$ ;

верхняя граница:  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\text{Ma}A}{\text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial x}$ ,  $v = 0$ ,  $\partial p/\partial y = 0$ ,  $\partial T/\partial y = 0$ ;

левая боковая стенка:  $u = 0$ ,  $v = 0$ ,  $\partial p/\partial x = 0$ ,  $T = 1$ ;

правая боковая стенка:  $u = 0$ ,  $v = 0$ ,  $\partial p/\partial x = 0$ ,  $T = 0$ .

Как и в задаче о тепловой конвекции, безразмерный параметр  $\tau_0$  можно связать с безразмерными параметрами задачи соотношением

$$\tau_0 = \alpha \frac{\text{Pr}}{\text{Ma}A}, \quad \alpha = \left| \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right| \Delta T \frac{1}{Hc_s^2}.$$

Величина  $\alpha$  оказывается весьма малой. Так, например, для кремния при  $\Delta T = 1000^\circ\text{C}$  и кюветы высотой  $H = 1$  см имеем  $\alpha \sim 10^{-9}$ . В численных расчетах величину этого параметра следует выбирать в интервале  $0 < \alpha \leq 1$ . При проведении расчетов данной задачи параметр  $\alpha$  выбирался равным единице и, соответственно, члены с  $\tau_0$  могут рассматриваться как регуляризаторы.

Задача о конвекции Марангони в прямоугольной камере ( $A = 4$ ), подогреваемой слева, решалась для  $\text{Ma} = 5, 10, 20, 100$  и  $400$  и  $\text{Pr} = 0.015$  на равномерной пространственной сетке  $27 \times 102$ . Шаг по времени выбирался равным  $5 \times 10^{-6}$ . В качестве начальных условий использовались невозмущенные поля скорости и температуры.

Для  $\text{Ma} = 400$  результаты расчетов сопоставлены с данными [17], а для  $\text{Ma} \leq 100$  с данными [18].

В [17] на базе известного SOLA алгоритма (метода с фиктивной сжимаемостью), разработана новая методика расчета, в которой использован метод конечного объема на ортогональной сетке. Интегрирование по времени производится при помощи явной схемы Эйлера второго порядка точности “чехарда”. Вычисления проводились на сетках  $25 \times 100$ ,  $32 \times 128$ ,  $40 \times 160$  и  $50 \times 200$ .

В [18] использован разностный метод высокого порядка точности, в котором пространственные переменные аппроксимируются центральными разностями со вторым порядком, к уравнению для функции тока применена схема Эрмита, граничные условия для вихря скорости аппроксимируются со вторым порядком, уравнение переноса вихря решается с помощью метода чередующихся направлений. Вычисления проводились на неравномерной сетке  $35 \times 95$ .

На фиг. 6 приведены линии тока для  $\text{Ma} = 5, 100$  и  $400$ . Так как числа Марангони положительны, жидкость вдоль верхней границы движется от горячей стенки к холодной. Образуется вих-

ревое течение, центр которого смещен к правой стенке. С ростом  $Ma$  скорость движения увеличивается, и изотермы начинают искажаться. При  $Ma = 100$  появляются дополнительные вихри, вращающиеся в том же направлении, что и основной вихрь. В [18] приведены аналогичные графики для тех же чисел Марангони, причем видно их хорошее соответствие результатам настоящей работы. При  $Ma = 400$  в левой нижней части области образуется вихрь, вращающийся в противоположном направлении. Аналогичная картина имеет место в [17]. Профили горизонтальной скорости в сечении  $x = A/2$  при различных числах Марангони сравнивались с соответствующими профилями из [18]. При этом для сопоставления результатов скорость вычислялась как  $U^*(y) = u(y)Pr/Ma$ , что соответствует обезразмериванию, использованному в [18]. Полученные графики практически совпадают с аналогичными кривыми из указанной работы.

Таким образом, полученные результаты для  $Ma \leq 100$  хорошо соответствуют данным [18], а для  $Ma = 400$  – результатам [17].

## ВЫВОДЫ

В отличие от классической системы Навье–Стокса, к.г.д. уравнения позволяют проводить численные расчеты при помощи простых явных разностных схем на относительно грубых пространственных сетках в широком диапазоне параметров. Пространственные производные во всех уравнениях аппроксимируются центральными разностями по каждому направлению и на равномерной сетке имеют второй порядок точности. Граничные условия для давления при решении уравнения Пуассона естественным образом получаются из условия равенства нулю потока массы через границу расчетной области. Регуляризаторы, необходимые для стабилизации счета при больших числах Грасгофа и Марангони, обеспечиваются дополнительными дивергентными членами с малым параметром, которые возникают в уравнениях благодаря введенному в рассмотрение дополнительному сглаживанию по времени. Параметр  $\tau_0$  является естественным параметром регуляризации, выбор которого определяется конкретной задачей.

Результаты расчета задач течения вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Прандтля на основе к.г.д. системы полностью совпадают с аналогичными расчетами с использованием системы уравнений Навье–Стокса. При этом наряду со стационарными режимами течений удается рассчитать и вторичные, т.е. нестационарные режимы. Показано, что период колебаний не зависит от шага сетки и параметра регуляризации.

Следовательно, к.г.д. систему уравнений можно эффективно использовать для расчета сложных нестационарных конвективных движений.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность Б.Н. Четверушкину за полезные дискуссии и поддержку этой работы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н.* Об одном вычислительном алгоритме для расчета газодинамических течений // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279. № 1. С. 80–83.
2. *Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н.* Кинетический алгоритм для расчета газодинамических течений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1985. Т. 25. № 10. С. 1526–1533.
3. *Антонов М.А., Граур И.А., Косарев Л.В., Четверушкин Б.Н.* Численное моделирование пульсаций давления в трехмерных выемках // Матем. моделирование. 1996. Т. 8. № 5. С. 76–90.
4. *Шеретов Ю.В.* Квазигидродинамические уравнения как модель течений сжимаемой вязкой теплопроводной среды // Применение функц. анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун-т, 1997. С. 127–155.
5. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.
6. *Шеретов Ю.В.* О точных решениях квазигидродинамических уравнений // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун-т, 1998. С. 213–241.
7. *Шеретов Ю.В.* Об одной новой математической модели в гидродинамике // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун-т, 1996. С. 124–134.
8. *Гуров Д.Б., Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В.* Численное моделирование течений жидкости в каверне на основе квазигидродинамической системы уравнений // Матем. моделирование. 1996. Т. 8. № 7. С. 33–44.
9. *Елизарова Т.Г., Калачинская И.С., Ключникова А.В., Шеретов Ю.В.* Использование квазигидродинамической системы уравнений для моделирования течений теплопроводной жидкости // Тр. IV Международной конференции “Математика, компьютер, образование”. Пущино, 1997. С. 108–115.
10. Библиотека программ для решения сеточных уравнений / Под ред. Е.С. Николаева / М.: Изд-во МГУ, 1984.

11. Numerical simulation of oscillatory convection in low-Prandtl fluids. A GAMM-Workshop // Notes on Numer. Fluid Dynamic. 1990, V. 27.
12. *Behnia M.* Synthesis of finite difference methods, workshop: "Numerical simulation of oscillatory convection in low-Pr fluids" // Notes on Numer. Fluid Dynamic. 1990. V. 27. P. 265–272.
13. *Behnia M., de Vahl Davis G.* Fine mesh solutions using streamfunction-vorticity formulation // Notes on Numer. Fluid Dynamic. 1990. V. 27. P. 11–18.
14. *Ben Hadid H., Roux B.* Buoyancy-driven oscillatory flows in shallow cavities filled with a low-Prandtl number fluid // Notes on Numer. Fluid Dynamic. 1990. V. 27. P. 25–34.
15. *Biringen S., Danabasoglu G., Eastman T.K.* A finite-difference method with direct solvers for thermally-driven cavity problems // Notes Numer. Fluid Dynamic. 1990. V. 27. P. 35–42.
16. *Ohshima H., Ninokata H.* Numerical simulation of oscillatory convection in low Prandtl number fluids using AQUA code // // Notes Numer. Fluid Dynamic. 1990. V. 27. P. 90–97.
17. *Ohnishi M., Azuma H., Doi T.* Computer simulation of oscillatory Marangoni flow // *Asta Astronautica*. 1992. V. 26. № 8–10. P. 685–696.
18. *Roux B., Ben Hadid H., Laure P.* Hydrodynamical regimes in metallic melts subject to a horizontal temperature gradient // *European. J. Mech., B/Fluids*. 1989. V. 8. № 5. P. 375–396.