

# ANALYSE DU PROBLEME DE L'ÉCOULEMENT GAZEUX DANS LES MICROCANAUUX PAR LES EQUATIONS QUASI HYDRODYNAMIQUES

Tatiana G. ELIZAROVA<sup>1</sup>

Laboratoire d'Aérodynamique du CNRS, Orléans, France

adresse permanente : Inst. de Modélisation Mathématique, Acad. Sciences de Russie, Moscou

Yurii V. SHERETOV

Université d'Etat de Tver, Russie

## RESUME

*On expose une présentation phénoménologique d'un nouveau système d'équations dit "quasi hydrodynamique". A l'aide de ce système, on obtient une formule pour le débit massique d'un gaz en écoulement isotherme dans un canal plan. Les résultats théoriques obtenus sont cohérents avec les résultats expérimentaux pour des nombres de Knudsen inférieurs à 0,5.*

## ABSTRACT

***Analysis of gas flow in micro-channels using quasi hydrodynamic QHD equations :***  
*The phenomenological presentation of a new equation system named "quasi hydrodynamic" is exposed. Using this system the expression of the mass-flow rate of an isothermal gas flow in a plane channel is obtained. The theoretical results correspond to the experimental ones for Knudsen numbers smaller than 0.5.*

## I. INTRODUCTION

Dans les mouvements de gaz modérément raréfiés, caractérisés par des nombres de Knudsen dans l'intervalle  $[0,01 - 1]$ , on constate souvent des effets qu'il est difficile d'expliquer avec le formalisme des équations classiques de Navier-Stokes, même en utilisant des conditions aux limites de glissement de vitesse et de saut de température [1]–[4]. C'est pourquoi la construction et l'étude d'autres modèles macroscopiques pour rendre compte d'expériences, en particulier dans les microsystèmes gazeux, sont des problèmes actuels.

Dans les travaux [5], [6] on obtient par une approche phénoménologique un nouveau système d'équations "quasi hydrodynamique" (QHD). A sa base se trouvent les principes fondamentaux de la mécanique et de la thermodynamique, traduits par les lois intégrales de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, du moment cinétique, de l'énergie totale et de l'entropie pour un volume matériel en mouvement. La principale différence par rapport à la théorie de Navier-Stokes (NS) réside dans l'utilisation d'une procédure de moyenne spatio-temporelle pour la détermination des grandeurs hydrodynamiques fondamentales : densité, vitesse et température. Un système d'équations "quasi gazodynamique" (QGD) assez voisin avait été obtenu précédemment par des considérations cinétiques par T.G. Elizarova et B.N. Chetverushkin ([7], [8]).

Les résultats théoriques montrent que des termes supplémentaires (par rapport aux équations NS) se manifestent dans les équations QHD pour des problèmes d'écoulements dans des fentes

---

<sup>1</sup>Laboratoire d'Aérodynamique du CNRS, 1C, avenue de la recherche scientifique, 45071 Orléans cedex 2 (telizar@yahoo.com)

finies, dans des capillaires ou des microcanaux [6]. La description de ces écoulements à l'aide conditions aux limites traditionnelles d'adhérence ou de glissement, dans le cadre du modèle NS n'est pas entièrement satisfaisante. Par exemple, dans des expériences avec des liquides [9], [10] ou des gaz [11], on observe un excès du débit massique, par rapport à la valeur que prévoit la théorie classique. La simulation directe par méthode de Monte Carlo (DSMC), avec une adaptation adéquate, confirme l'excès de débit dans des microcanaux [12].

L'un des moyens de résoudre cette difficulté dans le cadre d'équations macroscopiques consiste à utiliser des conditions aux limites plus précises, à savoir un glissement du second ordre [13]. La présente approche repose sur un remplacement du modèle classique NS par le modèle QHD, tout en maintenant les conditions aux limites maxwelliennes habituelles à l'interface gaz-paroi. On expose d'abord le principe de l'obtention du système d'équations QHD.

## II. LOIS DE CONSERVATION INTÉGRALES

On introduit cinq postulats, qui représentent les lois de conservation classiques sous forme intégrale et d'où l'on déduit les équations locales de la dynamique des gaz (p.ex. [3]).

On utilise les notions suivantes pour caractériser un écoulement gazeux visqueux, compressible et conducteur de la chaleur :  $\rho = \rho(\vec{x}, t)$  – la masse volumique,  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$  – la vitesse,  $p = p(\vec{x}, t)$  – la pression,  $\varepsilon = \varepsilon(\vec{x}, t)$  – l'énergie interne massique,  $T = T(\vec{x}, t)$  – la température,  $s = s(\vec{x}, t)$  – l'entropie volumique. On suppose que l'état thermodynamique du milieu est caractérisé par deux paramètres seulement, c'est-à-dire que parmi les cinq paramètres  $\rho$ ,  $p$ ,  $\varepsilon$ ,  $T$ ,  $s$ , seuls deux sont indépendants. On dispose alors d'équations d'état

$$p = \Psi_1(\rho, T), \quad \varepsilon = \Psi_2(\rho, T), \quad s = \Psi_3(\rho, T). \quad (1)$$

En premier postulat, on écrit la conservation de la masse sous la forme intégrale

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_{\Sigma} (\vec{j}_m \cdot \vec{n}) d\Sigma = 0, \quad (2)$$

où  $d\Sigma$  est l'élément d'aire de la surface  $\Sigma$  au voisinage du vecteur unitaire  $\vec{n}$ .

La variation de masse dans le volume  $V$  se compose de sa variation avec le temps et du flux à travers sa surface. Le vecteur correspondant  $\vec{j}_m = \vec{j}_m(\vec{x}, t)$ , est appelé densité de flux de masse.

Le deuxième postulat est la loi de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{d}{dt} \int_V (\rho \vec{u}) dV = \iint_{\Sigma} (\vec{n} \cdot P) d\Sigma, \quad (3)$$

Le taux de variation de la quantité de mouvement dans le volume  $V$  est égal à la somme des forces extérieures appliquées. L'intégrale dans le membre de droite de (3) détermine la force de pression et la contrainte visqueuse interne appliquée à la surface  $\Sigma$ . La grandeur  $P = P(\vec{x}, t)$  est appelée tenseur des contraintes internes. La notation  $(\vec{n} \cdot P)$  désigne le produit du vecteur  $\vec{n}$  par le tenseur  $P$  de rang 2, effectué suivant le premier indice du tenseur  $P$ . De même, la notation  $(P \cdot \vec{n})$  indique que le produit de  $P$  et de  $\vec{n}$  est effectué suivant le deuxième indice de  $P$ . Dans le cas d'un tenseur  $P$  symétrique, on a  $(\vec{n} \cdot P) = (P \cdot \vec{n})$ .

Le troisième postulat est la loi de conservation de l'énergie totale

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) dV = \iint_{\Sigma} (\vec{A} \cdot \vec{n}) d\Sigma - \iint_{\Sigma} (\vec{q} \cdot \vec{n}) d\Sigma. \quad (4)$$

La première intégrale dans le membre de droite de l'équation (4) s'interprète comme la puissance des forces de surface (pression et contraintes visqueuses internes). Le dernier terme de (4) est l'apport énergétique par unité de temps à travers  $\Sigma$  en raison de la conductivité thermique. Des expressions concrètes pour les champs de vecteurs  $\vec{A} = \vec{A}(\vec{x}, t)$  et  $\vec{q} = \vec{q}(\vec{x}, t)$  seront introduites plus loin.

Le postulat suivant traduit la conservation du moment cinétique :

$$\frac{d}{dt} \int_V [\vec{x} \times (\rho \vec{u})] dV = \iint_{\Sigma} [\vec{x} \times (\vec{n} \cdot P)] d\Sigma. \quad (5)$$

Les moments internes et de même les couples massiques et surfaciques répartis ne sont pas pris en compte. Le symbole  $\times$  désigne le produit vectoriel.

Le deuxième principe de la thermodynamique est le cinquième postulat

$$\frac{d}{dt} \int_V (\rho s) dV = - \iint_{\Sigma} \frac{(\vec{q} \cdot \vec{n})}{T} d\Sigma + \int_V X dV. \quad (6)$$

L'intégrale de surface du membre de droite de (6) est le taux de variation de l'entropie dans le volume  $V$  lié aux apports de chaleur. Il peut être positif ou négatif. La dernière intégrale est toujours non négative et représente la production d'entropie due aux processus irréversibles internes.

### III. PASSAGE AUX EQUATIONS LOCALES

Comme pour l'obtention du système de Navier-Stokes [3], pour passer des équations intégrales (2)–(6) aux équations aux dérivées partielles locales, on utilise la formule d'Euler-Liouville (7) sur la différentiation d'une intégrale prise sur un volume matériel en mouvement. On suppose que les trajectoires des éléments du volume  $V$  sont définies par le champ de vecteurs  $\vec{j}_m/\rho$ . Alors, l'identité citée prend la forme

$$\frac{d}{dt} \int_V \varphi dV = \int_V \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div} \left( \frac{\vec{j}_m}{\rho} \varphi \right) \right] dV, \quad (7)$$

dans laquelle  $\varphi = \varphi(\vec{x}, t)$  – est un scalaire ou un champ de vecteurs continûment différentiables. On passe également d'une intégration sur la surface  $\Sigma$  à une intégration sur le volume  $V$ . Pour cela, on supposera que tous les paramètres macroscopiques fondamentaux du milieu sont des fonctions suffisamment régulières du temps et de l'espace. Considérant le caractère quelconque du volume  $V$ , on obtient l'équation locale du bilan de masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_m = 0, \quad (8)$$

de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \text{div} (\vec{j}_m \otimes \vec{u}) = \text{div} P, \quad (9)$$

de l'énergie totale

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \text{div} \left[ \vec{j}_m \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] = \text{div} \vec{A} - \text{div} \vec{q}, \quad (10)$$

du moment cinétique

$$\frac{\partial}{\partial t}[\vec{x} \times \rho \vec{u}] + \text{div} (\vec{j}_m \otimes [\vec{x} \times \vec{u}]) = \frac{\partial}{\partial x_i}[\vec{x} \times P_{ij} \vec{e}_j] \quad (11)$$

et de l'entropie

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \text{div} (\vec{j}_m s) = -\text{div} \left( \frac{\vec{q}}{T} \right) + X. \quad (12)$$

Ici  $(\vec{j}_m \otimes \vec{u})$  est un tenseur de rang 2 obtenu en résultat de la dérivation directe des vecteurs  $\vec{j}_m$  et  $\vec{u}$ . Pour calculer la divergence d'un tenseur de rang 2, le produit s'effectue suivant son premier indice. Dans l'équation (11), le symbole  $P_{ij}$  est la représentation du tenseur  $P$  dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Les indices répétés  $i$  et  $j$  indiquent une sommation.

Le système (8)–(12) n'est pas fermé. Le problème de sa fermeture peut être résolu de différentes manières. Il faut exprimer les grandeurs  $\vec{j}_m$ ,  $P$ ,  $\vec{q}$ ,  $\vec{A}$ ,  $X$  en fonction des paramètres macroscopiques du milieu et de leurs dérivées.

#### IV. FERMETURE CLASSIQUE : EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

On commence par discuter l'approche classique [3], dans laquelle on détermine les grandeurs hydrodynamiques par une procédure de moyenne sur un ensemble de volumes, physiquement infiniment petits dans l'espace  $R_{\vec{x}}^3$ , à l'instant physique  $t$ . Dans ce cas, le vecteur densité de flux massique  $\vec{j}_m$  en tout point  $(\vec{x}, t)$  correspond à l'impulsion moyenne par unité de volume  $\rho \vec{u}$  et la première relation de fermeture s'écrit

$$\vec{j}_m = \rho \vec{u}. \quad (13)$$

Ensuite on introduit une représentation des forces de pression et de contrainte visqueuse agissant instantanément à la surface du volume matériel. La loi du mouvement de celui-ci est prise comme en mécanique du corps solide. Cette supposition est appelée dans la littérature "le principe de solidification". L'équation de conservation du moment cinétique (11) apparaît comme la conséquence de la conservation de la quantité de mouvement (9), dans le cas de la symétrie du tenseur des contraintes  $P$ . Dans la théorie des milieux newtoniens, pour  $P = P_{NS}$  on utilise l'expression

$$P = \Pi_{NS} - pI, \quad (14)$$

où

$$\Pi_{NS} = \eta [(\vec{\nabla} \otimes \vec{u}) + (\vec{\nabla} \otimes \vec{u})^T - (2/3)I \text{div} \vec{u}] \quad (15)$$

est le tenseur de Navier-Stokes pour les contraintes visqueuses,  $I$  est le tenseur unitaire de rang 2. Le flux thermique  $\vec{q} = \vec{q}_{NS}$  est donné sous la forme de Fourier

$$\vec{q} = -\kappa \vec{\nabla} T. \quad (16)$$

Pour un gaz idéal monoatomique aux faibles nombres de Knudsen, les hypothèses (15), (16) sont confirmées par la théorie cinétique. La puissance des forces de surface (pression et contrainte visqueuse interne) se calcule par la même formule que pour un corps solide, à savoir

$$\vec{A} = (P_{NS} \cdot \vec{u}). \quad (17)$$

On considère que l'entropie spécifique obéit à l'identité différentielle de Gibbs

$$T ds = d\varepsilon + p d(1/\rho). \quad (18)$$

L'équation de son bilan (12) peut être obtenue en conséquence des lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie (9)–(10), si l'on prend la grandeur  $X = X_{NS}$  sous la forme

$$X = \kappa \left( \frac{\vec{\nabla} T}{T} \right)^2 + \frac{(\Pi_{NS} : \Pi_{NS})}{2\eta T}, \quad (19)$$

où  $(\Pi_{NS} : \Pi_{NS}) = \sum_{i,j=1}^3 (\Pi_{NS})_{ij} (\Pi_{NS})_{ij}$  est le produit contracté de deux tenseurs identiques. On remarque que la partie droite de l'égalité (19) est non négative. Le report des expressions (13)–(19) dans (8)–(12) donne le système classique de Navier-Stokes. Les dépendances  $\eta = \eta(\rho, T)$  et  $\kappa = \kappa(\rho, T)$  peuvent être trouvées, soit expérimentalement, soit par les méthodes de la théorie cinétique des gaz.

## V. FERMETURE NON CLASSIQUE : EQUATIONS QHD

Une autre solution au problème de la fermeture du système (8)–(12) est proposée par Yu.V. Sheretov [5], [6], qui, pour la détermination des grandeurs hydrodynamiques a utilisé, non pas une moyenne spatiale, mais spatio-temporelle sur un certain ensemble de parallélépipèdes physiquement infiniment petits dans l'espace à quatre dimensions  $R_{x,t}^4$ . On a prouvé que, dans le cas d'une moyenne spatio-temporelle, le vecteur densité de flux massique  $\vec{j}_m$ , d'une façon générale, ne correspondait pas à la quantité de mouvement moyenne par unité de volume  $\rho \vec{u}$ . L'analyse détaillée du choix possible des grandeurs  $\vec{j}_m$ ,  $P$ ,  $\vec{q}$ ,  $\vec{A}$  et  $X$  conduit au résultat suivant

$$\vec{j}_m = \rho (\vec{u} - \vec{w}), \quad (20)$$

$$P = -p I + \Pi, \quad (21)$$

$$\vec{q} = -\kappa \vec{\nabla} T, \quad (22)$$

$$\vec{A} = (\Pi \cdot \vec{u}) - p (\vec{u} - \vec{w}), \quad (23)$$

$$X = \varkappa \left( \frac{\vec{\nabla} T}{T} \right)^2 + \frac{(\Pi_{NS} : \Pi_{NS})}{2\eta T} + \frac{\rho \vec{w}^2}{\tau T}, \quad (24)$$

avec

$$\vec{w} = \frac{\tau}{\rho} [\rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \vec{\nabla} p], \quad (25)$$

$$\Pi = \Pi_{NS} + \rho (\vec{u} \otimes \vec{w}). \quad (26)$$

Reportant les expressions (20), (21) et (23) à la place de  $\vec{j}_m$ ,  $P$  et  $\vec{A}$  dans (8)–(10), on obtient le système d'équations quasi hydrodynamique (QHD).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_m = 0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \text{div} (\vec{j}_m \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} p = \text{div } \Pi, \quad (28)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \text{div} \left[ \vec{j}_m \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right] + \text{div } \vec{q} = \text{div}(\Pi \cdot \vec{u}). \quad (29)$$

Pour fermer le système, on ajoute les équations du gaz dilué

$$p = \rho R T, \quad \varepsilon = c_v T. \quad (30)$$

Le temps caractéristique  $\tau$ , le coefficient de viscosité dynamique  $\eta$  et le coefficient de conductivité thermique  $\kappa$  sont liés par les relations

$$\tau = \frac{\eta}{p S c}, \quad \kappa = \frac{c_p \eta}{P r}, \quad (31)$$

dans lesquelles

$$\eta = \eta(T) = \eta_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^\omega, \quad (32)$$

où  $\eta_0$  est la viscosité dynamique à la température  $T_0$ ,  $\omega$  est l'exposant de la dépendance  $\eta \propto T^\omega$ . Il est compris dans l'intervalle  $[1/2 - 1]$ ,  $c_v$  et  $c_p$  sont respectivement les chaleurs massiques à volume et pression constants,  $P r$  est le nombre de Prandtl. Le nombre de Schmidt à  $S c$  est égal 0.77 pour un gaz monoatomique et 0.74 pour un gaz diatomique ([6], [14]). Le libre parcours moyen  $\lambda$  peut être calculé par la formule de Chapman [2] :

$$\lambda = \frac{\eta}{p} \sqrt{\frac{\pi R T}{2}},$$

ou par la formule de Bird [1] :

$$\lambda = \frac{2(7 - 2\omega)(5 - 2\omega)}{15} \frac{\eta}{p} \sqrt{\frac{R T}{2\pi}}.$$

Le système (27)–(32) diffère du système de Navier-Stokes classique [2] par des termes divergents supplémentaires en facteur d'un petit paramètre  $\tau$ , lesquels apparaissent par l'introduction d'un lissage temporel supplémentaire dans la définition des grandeurs macroscopiques [6].

## VI. FORMULES POUR LE DEBIT D'UN GAZ DANS UN CANAL PLAN

Les auteurs font l'analyse du problème de l'écoulement isotherme d'un gaz modérément raréfié dans un canal plan de longueur  $L$  et de hauteur  $H$ . On désigne par les indices 1 et 2 respectivement les conditions en entrée et sortie de canal. On a le rapport des pressions  $p_1/p_2 > 1$ . La solution du système (27)–(32), écrit pour des écoulements plans stationnaires sans force extérieure est cherchée sous la forme

$$u_x = u(y) + \delta u, \quad u_y = \delta v, \quad p = p(x), \quad T = T_0. \quad (33)$$

où  $T_0$  est la température;  $\delta u$ ,  $\delta v$  sont des petites variations. Reportant les dépendances (33) dans la première équation de la quantité de mouvement et négligeant les termes en  $\delta u$  et  $\delta v$ , on obtient la relation

$$\frac{dp(x)}{dx} = \eta_0 \frac{d^2 u(y)}{dy^2} + 2\eta_0 u(y) \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{p} \frac{dp(x)}{dx} \right). \quad (34)$$

En première approximation, pour de petits nombres de Knudsen, le dernier terme de droite (34) peut être négligé. Appliquant les conditions aux limites de glissement de Maxwell (les conditions de glissement du premier ordre) [2], [3] :

$$\left( u - \frac{2 - \sigma}{\sigma} \lambda \frac{du}{dy} \right) \Big|_{y=0} = 0, \quad \left( u + \frac{2 - \sigma}{\sigma} \lambda \frac{du}{dy} \right) \Big|_{y=H} = 0,$$

on trouve la distribution de vitesse

$$u_x = -\frac{1}{2\eta_0} \frac{dp(x)}{dx} \left[ y(H-y) + \frac{2-\sigma}{\sigma} \lambda H \right].$$

Ici  $\sigma$  est la fraction de molécules réfléchies de manière diffuse qui est proche de l'unité,  $\lambda$  est la longueur du libre parcours moyen.

Le débit massique de gaz dans l'unité de largeur du canal est calculé par la formule

$$\begin{aligned} J &= \int_0^H \rho(u_x - w_x) dy = \int_0^H \rho u_x dy - \frac{\eta_0}{Sc} \int_0^H \frac{1}{p} \frac{dp(x)}{dx} dy = \\ &= -\frac{(H/2)^3}{\eta_0 RT_0} \left[ \frac{2}{3} p \frac{dp}{dx} + 4 \frac{2-\sigma}{\sigma} p \frac{dp}{dx} \frac{\lambda}{H} + \frac{8}{A^2 Sc} p \frac{dp}{dx} \left( \frac{\lambda}{H} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Le coefficient  $A$  est égal à  $\sqrt{\pi/2}$  pour la formule de Chapman et est égal à  $2(7-2\omega)(5-2\omega)/(15\sqrt{2\pi})$  pour la formule de Bird. Plus loin (35), on posera  $\lambda = \lambda_2 p_2/p$ , où  $\lambda_2$  est le libre parcours moyen dans la section de sortie du canal et on intégrera l'expression obtenue dans l'intervalle  $[0 - L]$ .

Supposons que la largeur du canal  $D$  soit beaucoup plus grande que sa hauteur  $H$ . L'influence des parois latérales est négligeable et le débit total du canal s'obtient en multipliant par  $D$  :

$$Q_{QHD}^{\text{slip1}} = D \frac{(H/2)^3 p_2^2}{\eta_0 R T_0 L} \left[ \frac{(p_1/p_2)^2 - 1}{3} + 4 \frac{2-\sigma}{\sigma} K n_2 \left( \frac{p_1}{p_2} - 1 \right) + \frac{8}{A^2 Sc} K n_2^2 \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right) \right], \quad (36)$$

ou  $K n_2 = \lambda_2/H$ . La formule analogue pour le système de Navier-Stokes avec les conditions aux limites d'adhérence s'écrit

$$Q_{NS}^{\text{no slip}} = D \frac{(H/2)^3 p_2^2}{\eta_0 R T_0 L} \left[ \frac{(p_1/p_2)^2 - 1}{3} \right]. \quad (37)$$

Si on prend en compte les conditions de glissement de Maxwell, on arrive à

$$Q_{NS}^{\text{slip1}} = D \frac{(H/2)^3 p_2^2}{\eta_0 R T_0 L} \left[ \frac{(p_1/p_2)^2 - 1}{3} + 4 \frac{2-\sigma}{\sigma} K n_2 \left( \frac{p_1}{p_2} - 1 \right) \right]. \quad (38)$$

L'expression

$$Q_{NS}^{\text{slip2}} = D \frac{(H/2)^3 p_2^2}{\eta_0 R T_0 L} \left[ \frac{(p_1/p_2)^2 - 1}{3} + 4 \frac{2-\sigma}{\sigma} K n_2 \left( \frac{p_1}{p_2} - 1 \right) + 9 K n_2^2 \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right) \right], \quad (39)$$

qui ne diffère de (36) que par un coefficient dans le dernier terme, peut être obtenue par le système de Navier-Stokes avec les conditions aux limites de glissement du deuxième ordre [11], [15] où le libre parcours moyen est calculé par la formule de Chapman [2].

## VII. COMPARAISON DE RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX

Dans la thèse de P. Lalonde [11], sont présentés des résultats de mesures expérimentales du débit d'écoulements isothermes d'azote et d'hélium dans des microcanaux de longueur  $L$ , de profondeur  $H$  et de largeur  $D$ . On confronte ces résultats aux grandeurs  $Q$  calculées par les formules (36) – (39). L'exemple qui convient le mieux est le microcanal  $A_4$ , pour lequel  $L = 5 \cdot 10^{-3}$  m,  $H = 0,545 \cdot 10^{-6}$  m,  $D = 5 \cdot 10^{-5}$  m et la condition  $H \ll D$  est satisfaite.

Pour les écoulements d'hélium, l'effet d'augmentation du débit est clairement visible pour  $T_0 = 294.2$  K,  $p_2 = 0.75 \cdot 10^5$  Pa. Le coefficient de viscosité dynamique de l'hélium à cette température est  $\eta_0 = 19,6 \cdot 10^{-6}$  Pa·s. Sa constante massique est  $R = 2,0785 \cdot 10^3$  J/(kg·K) et son nombre de Schmidt est  $Sc = 0.77$ . Les résultats obtenus sont présentés dans la table 1. Les graphiques correspondants, comprenant les points expérimentaux sont donnés dans les figures 1 et 2. Dans le premier cas, pour le calcul du libre parcours moyen, on a utilisé la formule de Chapman, dans le deuxième cas, on a utilisé la formule de Bird [1] avec  $\omega = 0,66$ . La réflexion des molécules à la paroi a été supposée diffuse ( $\sigma = 1$ ). On voit que le calcul, sur la base des équations QHD, donne le meilleur accord avec l'expérience. Le système de Navier-Stokes, avec les conditions aux limites habituelles pour le glissement (Maxwell) n'est pas entièrement satisfaisant.

**Table 1 : Hélium**

$\frac{p_1}{p_2}$	$Q_{NS}^{no\ slip}$ (kg/s)	$Q_{NS}^{slip1}$ Chapman	$Q_{NS}^{slip1}$ Bird	$Q_{NS}^{slip2}$ Chapman	$Q_{QHD}^{slip1}$ Chapman	$Q_{QHD}^{slip1}$ Bird
1.3	$2.18 \cdot 10^{-14}$	$7.53 \cdot 10^{-14}$	$6.93 \cdot 10^{-14}$	$1.24 \cdot 10^{-13}$	$1.11 \cdot 10^{-13}$	$1.05 \cdot 10^{-13}$
1.4	$3.03 \cdot 10^{-14}$	$1.01 \cdot 10^{-13}$	$9.37 \cdot 10^{-14}$	$1.65 \cdot 10^{-13}$	$1.48 \cdot 10^{-13}$	$1.40 \cdot 10^{-13}$
1.5	$3.95 \cdot 10^{-14}$	$1.28 \cdot 10^{-13}$	$1.18 \cdot 10^{-13}$	$2.05 \cdot 10^{-13}$	$1.85 \cdot 10^{-13}$	$1.75 \cdot 10^{-13}$
1.6	$4.93 \cdot 10^{-14}$	$1.56 \cdot 10^{-13}$	$1.44 \cdot 10^{-13}$	$2.45 \cdot 10^{-13}$	$2.21 \cdot 10^{-13}$	$2.09 \cdot 10^{-13}$
1.7	$5.98 \cdot 10^{-14}$	$1.84 \cdot 10^{-13}$	$1.70 \cdot 10^{-13}$	$2.84 \cdot 10^{-13}$	$2.58 \cdot 10^{-13}$	$2.44 \cdot 10^{-13}$
1.8	$7.09 \cdot 10^{-14}$	$2.13 \cdot 10^{-13}$	$1.97 \cdot 10^{-13}$	$3.24 \cdot 10^{-13}$	$2.95 \cdot 10^{-13}$	$2.79 \cdot 10^{-13}$
1.9	$8.26 \cdot 10^{-14}$	$2.43 \cdot 10^{-13}$	$2.25 \cdot 10^{-13}$	$3.64 \cdot 10^{-13}$	$3.32 \cdot 10^{-13}$	$3.14 \cdot 10^{-13}$
2.0	$9.49 \cdot 10^{-14}$	$2.73 \cdot 10^{-13}$	$2.53 \cdot 10^{-13}$	$4.04 \cdot 10^{-13}$	$3.69 \cdot 10^{-13}$	$3.49 \cdot 10^{-13}$

**Table 2 : Azote**

$\frac{p_1}{p_2}$	$Q_{NS}^{no\ slip}$ (kg/s)	$Q_{NS}^{slip1}$ Chapman	$Q_{NS}^{slip1}$ Bird	$Q_{NS}^{slip2}$ Chapman	$Q_{QHD}^{slip1}$ Chapman	$Q_{QHD}^{slip1}$ Bird
1.3	$1.68 \cdot 10^{-13}$	$3.31 \cdot 10^{-13}$	$3.02 \cdot 10^{-13}$	$3.76 \cdot 10^{-13}$	$3.65 \cdot 10^{-13}$	$3.37 \cdot 10^{-13}$
1.4	$2.34 \cdot 10^{-13}$	$4.51 \cdot 10^{-13}$	$4.13 \cdot 10^{-13}$	$5.09 \cdot 10^{-13}$	$4.95 \cdot 10^{-13}$	$4.57 \cdot 10^{-13}$
1.5	$3.04 \cdot 10^{-13}$	$5.76 \cdot 10^{-13}$	$5.29 \cdot 10^{-13}$	$6.46 \cdot 10^{-13}$	$6.29 \cdot 10^{-13}$	$5.82 \cdot 10^{-13}$
1.6	$3.80 \cdot 10^{-13}$	$7.06 \cdot 10^{-13}$	$6.49 \cdot 10^{-13}$	$7.87 \cdot 10^{-13}$	$7.68 \cdot 10^{-13}$	$7.11 \cdot 10^{-13}$
1.7	$4.61 \cdot 10^{-13}$	$8.41 \cdot 10^{-13}$	$7.74 \cdot 10^{-13}$	$9.32 \cdot 10^{-13}$	$9.11 \cdot 10^{-13}$	$8.44 \cdot 10^{-13}$
1.8	$5.46 \cdot 10^{-13}$	$9.81 \cdot 10^{-13}$	$9.05 \cdot 10^{-13}$	$1.08 \cdot 10^{-12}$	$1.05 \cdot 10^{-12}$	$9.82 \cdot 10^{-13}$
1.9	$6.36 \cdot 10^{-13}$	$1.12 \cdot 10^{-12}$	$1.04 \cdot 10^{-12}$	$1.23 \cdot 10^{-12}$	$1.21 \cdot 10^{-12}$	$1.12 \cdot 10^{-12}$
2.0	$7.31 \cdot 10^{-13}$	$1.27 \cdot 10^{-12}$	$1.18 \cdot 10^{-12}$	$1.39 \cdot 10^{-12}$	$1.36 \cdot 10^{-12}$	$1.27 \cdot 10^{-12}$

Les données analogues pour l'azote apparaissent dans la table et les figures 3 et 4. On a pris ici  $\eta_0 = 17,8 \cdot 10^{-6}$  Pa·s,  $R = 2,962 \cdot 10^2$  J/(kg·K),  $Sc = 0.74$ ,  $\omega = 0.74$ ,  $\sigma = 0.93$ , (cette dernière valeur comme dans [11]). La courbe correspondant au modèle QHD correspond bien à l'expérience, bien que l'effet d'augmentation du débit soit moins marqué.

Dans les deux cas, le nombre de Knudsen en sortie de canal est inférieur à 0,5. Pour  $Kn_2 \leq 0.1$  le débit de gaz est bien décrit par le modèle de Navier-Stokes avec les conditions aux limites de



Maxwell pour le glissement, le terme du deuxième ordre en  $Kn_2$  dans l'équation (36) pouvant être négligé.

**Remerciements :** Les auteurs remercient J.-C. Lengrand, directeur du laboratoire d'Aérodynamique, pour ses encouragements à aborder le domaine de la microfluidique et pour d'utiles discussions.

## Références

- [1] Bird G.A. *Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows*. Oxford, Clarendon Press, 1994.
- [2] Abramovich G.N. *Applied gas dynamics*. Ed. Nauka, Moscow 1991. Vol. 2 (en russe).
- [3] Loytianskiy L.G. *Mechanics of liquids and gases*. Moscow, Nauka, 1987.
- [4] Sone Y. *Continuum gas dynamics in the light of kinetic theory and new features of rarefied gas flows*, 20th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics, Proceedings, Peking University Press, Beijing, China, ed. C. Shen, 1997, pp.3 – 24.
- [5] Sheretov Yu.V. *Quasihydrodynamic equations as a model for viscous compressible heat conductive flows* in Implementation of functional analysis in the theory of approaches, Tver, Tver University, ed., 1997. pp. 127–155 (en russe).
- [6] Sheretov Yu.V. *Mathematical modeling of liquid and gas flows based on quasihydrodynamic and quasigasdynamic equations*, Tver, Tver University, 2000 (en russe).
- [7] Chetverushkin B.N. *Kinetic-consistent schemes in gasdynamics*. Moscow, MGU, 1999 (en russe).
- [8] Elizarova T.G., Sheretov Yu.V. *Theoretical and numerical investigation of quasigasdynamic and quasihydrodynamic equations* J. Comput. Mathem. Phys., 2001. V. 41, No 2. pp. 239–255.
- [9] Vinogradov G.V., Sinitin V.V. *Viscous properties of Na-lubricants and influence of near-wall effects on lubricant flows*, Doct. Acad. of Sci. USSR, 1952. V. 86, No 3. pp. 573–576.
- [10] Gorislavetz B.M., Dunetz A.A. *Investigation of the rheological properties of concentrated suspensions in the presence of near-wall effects*, Ing. Phys.J., 1975. V. 29, No 2, pp. 273–282.
- [11] Lalonde P. *Etude expérimentale d'écoulements gazeux dans les microsystèmes à fluides* : Thèse de l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, 2001.
- [12] Xie C., Fan J., Shen C. *Rarefied gas flows in micro-channels*, 23th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics, Proceedings, to be published, Vancouver, Canada, 2002.
- [13] Deissler R.G. *An analysis of second-order slip flow and temperature-jump boundary conditions for rarefied gases*, Int. J. Heat Mass Transfer. 1964. V. 7. P. 681–694.
- [14] Alekseev B.B., Grishin A.M. *Physical gasdynamic of reacting flows*, Moscow, High School, 1985 (en russe).
- [15] Aubert C., Colin S. *High order boundary conditions for gaseous flows in rectangular microchannels*, Microscale Thermophysical engineering, 2001, vol.5, No 1, pp.41 - 54.

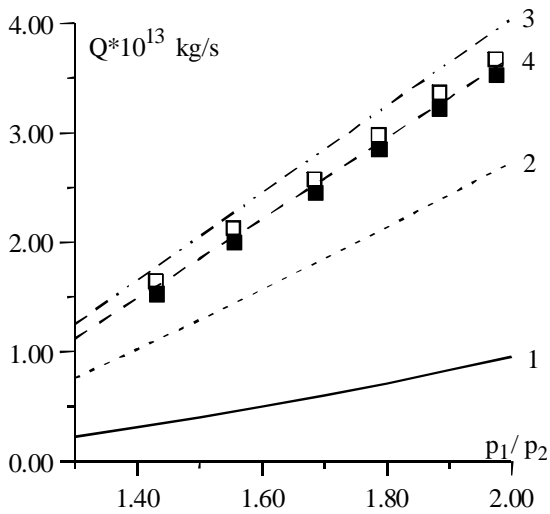


FIG. 1 – **Hélium (formule de Chapman)** : 1 : Système NS avec conditions d'adhérence, 2 : Système NS avec conditions de glissement de Maxwell, 3 : Système NS avec conditions de glissement du deuxième ordre, 4 : Système QHD avec conditions de glissement de Maxwell, symboles : Expériences de Lalonde.

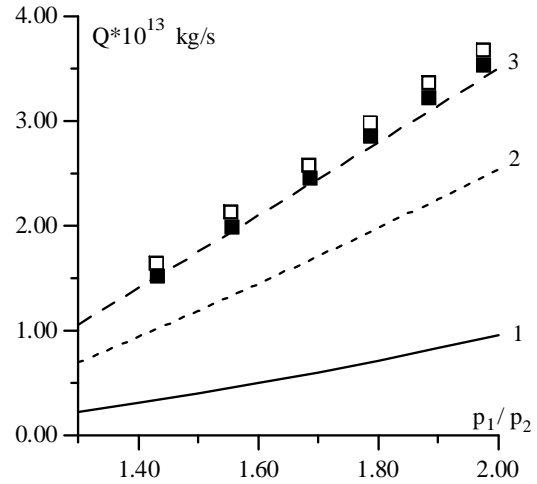


FIG. 2 – **Hélium (formule de Bird)** : 1 : Système NS avec conditions d'adhérence, 2 : Système NS avec conditions de glissement de Maxwell, 3 : Système QHD avec conditions de glissement de Maxwell, symboles : Expériences de Lalonde.

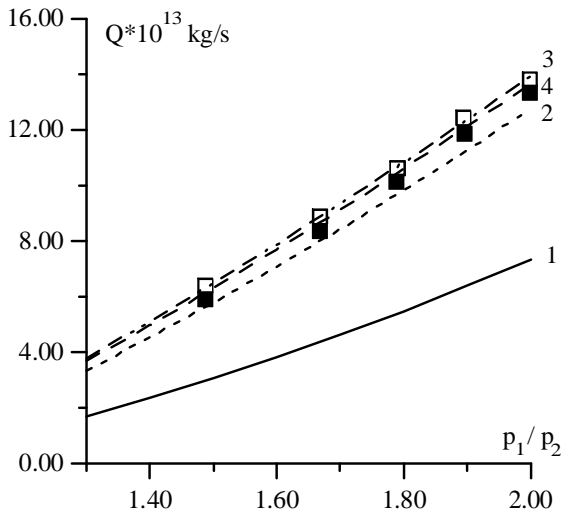


FIG. 3 – **Azote (formule de Chapman)** : 1 : Système NS avec conditions d'adhérence, 2 : Système NS avec conditions de glissement de Maxwell, 3 : Système NS avec conditions de glissement du deuxième ordre, 4 : Système QHD avec conditions de glissement de Maxwell, symboles : Expériences de Lalonde.

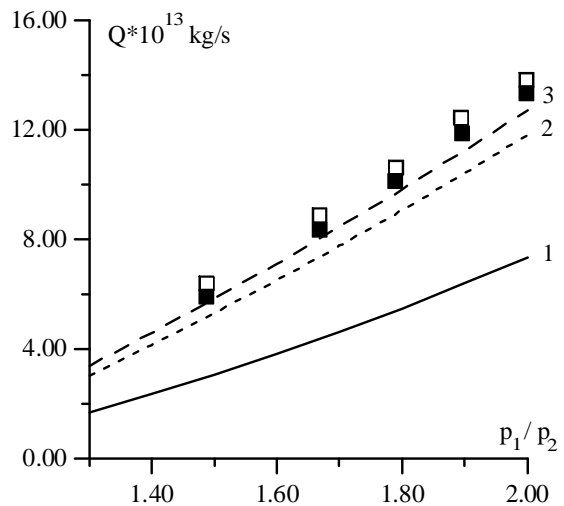


FIG. 4 – **Azote (formule de Bird)** : 1 : Système NS avec conditions d'adhérence, 2 : Système NS avec conditions de glissement de Maxwell, 3 : Système QHD avec conditions de glissement de Maxwell, symboles : Expériences de Lalonde.