

CALCUL DE L'ÉCOULEMENT VISQUEUX COMPRESSIBLE D'UN GAZ DANS UN MICROCANAL

Jean-Claude LENGRAND¹

Laboratoire d'Aérodynamique du CNRS, Orléans, France

Tatiana G. ELIZAROVA

Institute for Mathematical Modeling, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Ivan A. SHIROKOV

Faculty of Computing Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Russia

RESUME

L'écoulement d'un gaz dans un microcanal impose généralement le recours à la notion d'écoulement raréfié. On rappelle ces notions et on donne les éléments qui permettent, d'une part de caractériser un écoulement donné en termes de raréfaction, et d'autre part de calculer le débit d'un microcanal dans les conditions très raréfiées (régime sans collisions). On applique ensuite la notion d'analyse dimensionnelle pour traiter ce même problème dans des conditions modérément raréfiées. Enfin, on examine la possibilité de simuler expérimentalement des micro-écoulements gazeux en utilisant des géométries à plus grande échelle et des pressions plus basses.

ABSTRACT "Calculating a viscous compressible gas flow in a microchannel"

A gas flowing through a microchannel is generally associated with the concept of rarefied flow. The paper includes a short presentation of this concept as well as formulas that allows characterizing a flow in terms of rarefaction. A method will be presented that allows to compute the flow rate through a microchannel under highly rarefied conditions (collisionless flow), including in the non-isothermal case. Dimensional analysis is then applied to the same problem under moderately rarefied conditions. Finally, one discusses the possibility to simulate experimentally gaseous micro-flows using large-scale devices and low pressures.

I. INTRODUCTION

L'écoulement d'un gaz dans un microcanal est un phénomène que l'on rencontre dans un certain nombre d'applications pratiques telles que micropompes, capteurs miniatures, etc. [1-3]. Ces écoulements se caractérisent en général par des vitesses faibles. Dans certains cas ils peuvent présenter un gradient de température le long de la paroi (compresseur de Knudsen). Les dimensions caractéristiques et les niveaux de pression rencontrés peuvent être tels qu'une approche classique de ces écoulements (milieu continu régi par les équations de Navier-Stokes) ne convient pas. Il faut alors prendre en compte les effets de raréfaction, soit par une modification de l'approche classique, soit par une autre approche, en l'occurrence par une description moléculaire des écoulements.

On rappellera quelques notions relatives aux écoulements raréfiés et on donnera les éléments qui permettent de caractériser un écoulement donné en termes de raréfaction.

On traitera la relation entre le débit d'un microcanal et les niveaux de pression qui règnent à ses extrémités, d'une part lorsque l'écoulement est très raréfié (régime sans collisions), et d'autre part lorsqu'il est modérément raréfié. On utilisera l'analyse dimensionnelle pour réduire le nombre de

¹ Laboratoire d'Aérodynamique du CNRS, 1C, avenue de la recherche scientifique, 45071 Orléans Cedex 2
jean-claude.lengrand@cnrs-orleans.fr

variables et pour discuter la possibilité de simuler expérimentalement un micro-écoulement en utilisant des géométries à plus grande échelle et des pressions plus basses.

II. ECOULEMENTS RAREFIES ET APPROCHE MOLECULAIRE

II.1 Notion de raréfaction

Quand un gaz est en équilibre thermodynamique, il existe localement une température T unique dont la connaissance, associée à celle de la nature chimique, de la masse volumique ρ et de la vitesse macroscopique \mathbf{u} , définit entièrement l'état local. En particulier, les vitesses individuelles des molécules suivent une distribution de Maxwell, régie par la valeur de T . Cet état d'équilibre est assuré par les collisions entre les molécules du gaz.

En dynamique des gaz classique (équations de Navier-Stokes), on fait implicitement l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local. La distribution des vitesses s'éloigne peu d'une distribution Maxwellienne. On garde la notion de température locale. Il existe une relation locale (linéaire pour un fluide newtonien) entre tenseur des contraintes et tenseur des vitesses de déformation. Cette relation fait intervenir un coefficient de viscosité $\mu(T)$.

Si les collisions ne sont pas assez fréquentes, la fonction de distribution des vitesses s'éloigne fortement d'une distribution Maxwellienne. Il ne suffit plus de quelques scalaires (T , ρ , \mathbf{u}) pour caractériser localement le fluide. La notion de viscosité disparaît et les équations classiques sont en défaut. On doit avoir recours à une description moléculaire de l'écoulement. Pour que la description classique soit valable, il faut que l'équilibre local soit assuré et donc que la distance moyenne parcourue par les molécules entre deux collisions successives soit très petite par rapport à l'échelle de longueur des gradients de l'écoulement. Exprimé sous cette forme, il s'agit là d'un critère local qui peut permettre de définir dans un écoulement donné des zones d'équilibre et des zones de non-équilibre.

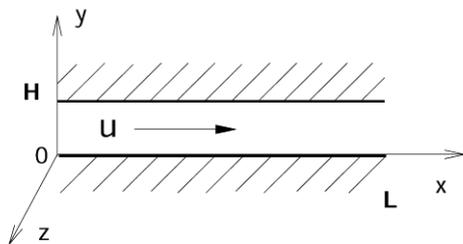


Figure 1 : Schéma d'un microcanal.

On trouvera dans [4, chap.2] un exposé plus complet sur les régimes d'écoulement, qui traite aussi le cas d'écoulements à haute température et des écoulements supersoniques. Considérons ici (Figure 1) le problème de l'écoulement bidimensionnel dans un microcanal de longueur L et de profondeur H . La discussion reste valable si l'écoulement est limité par une largeur D dans la direction z (configuration 3D) ou s'il s'agit d'un canal de section circulaire. On a en général $H \ll D \ll L$. Ce canal relie des réservoirs où règnent respectivement les conditions amont $()_1$ et aval $()_2$.

Pour un écoulement très subsonique, la distance moyenne parcourue par les molécules entre deux collisions successives est le libre parcours moyen λ et l'échelle de longueur des gradients est de l'ordre de H . A partir du critère local, on exprime un critère global pour la validité de l'approche classique : $Kn = \lambda / H \ll 1$, où le nombre de Knudsen Kn et le libre parcours moyen λ sont évalués, par exemple, dans les conditions aval. La limite est de l'ordre de 0,003-0,01, mais on peut étendre la validité de l'approche continue en introduisant des conditions aux limites de glissement du premier ou du deuxième ordre et/ou en introduisant des termes dissipatifs supplémentaires dans les équations de Navier-Stokes. On trouve dans [5] une discussion sur le domaine de validité de ces différentes approches, sur la base de leur aptitude à prédire correctement le débit d'un microcanal, dans des conditions isothermes, avec un rapport de pression $r_p = p_1 / p_2 = 1,8$. Les résultats sont résumés, à titre indicatif, dans le Tableau 1. Les nombres de Knudsen sont évalués dans les conditions aval.

$Kn < 0,003 - 0,01$	Validité des équations de Navier-Stokes (NS) avec conditions aux limites d'adhérence.
$Kn < 0,05$	Validité des équations NS avec glissement (formulation au 1er ordre)
$Kn < 0,2-0,5$	Validité des équations NS avec glissement (formulation au 2ème ordre) ou termes dissipatifs supplémentaires (équations quasi hydrodynamiques)
$Kn > 0,2-0,5$	L'approche moléculaire est requise (méthode de Monte Carlo, p.ex.)
$Kn > 10-30$	Une approche moléculaire simplifiée est possible (régime moléculaire libre ou "sans collisions")

Tableau 1 : Domaine de validité des formules du débit d'un microcanal, d'après [4-5].

Le libre parcours moyen dépend de la fréquence de collisions, donc de la section efficace des collisions intermoléculaires. Par ailleurs, en appliquant une approche moléculaire dans une situation de proche équilibre, on peut relier le coefficient de viscosité μ à cette même section efficace. En éliminant la section efficace entre les expressions de λ et de μ , on obtient des expressions pratiques pour évaluer un libre parcours moyen à partir d'expressions connues de la viscosité. Comme il existe plusieurs modèles de collisions intermoléculaires, on arrive à plusieurs expressions de λ

Le modèle le plus simple est celui de molécules sphères rigides (*hard spheres*). La section efficace σ est constante, et la viscosité est proportionnelle à la racine carrée de la température $\mu \propto T^{1/2}$. Ce modèle ne devrait pas être employé pour des molécules dont la loi de viscosité est différente de $\mu \propto T^{1/2}$. Un modèle largement utilisé actuellement est le modèle VHS (*Variable Hard Spheres*), dans lequel la section efficace varie en puissance de la vitesse relative des partenaires de collision, mais la collision elle-même se passe comme entre sphères rigides. Ce modèle conduit à une loi de viscosité $\mu \propto T^\omega$, avec un exposant ω quelconque. Cette loi est moins restrictive que la précédente. Avec le modèle VHS, on trouve une expression du libre parcours moyen [4, 6]

$$\lambda = K(\omega) \times \frac{\mu(T)}{\rho (2\pi RT)^{1/2}} \quad \text{avec } K(\omega) = \frac{2(7-2\omega)(5-2\omega)}{15} \quad (1)$$

où ρ est la masse volumique et R la constante massique des gaz parfaits ($p = \rho R T$). Le cas particulier des sphères rigides est obtenu pour $\omega = 1/2$:

$$\lambda = \frac{16}{5} \frac{\mu(T)}{\rho (2\pi RT)^{1/2}} \quad (2)$$

A cause d'une différence dans la définition du libre parcours moyen, l'équation (2) diffère légèrement (de 2%) de la formule de Chapman, relative également à des sphères rigides :

$$\lambda = \frac{\mu(T)}{\rho} \left(\frac{\pi}{2RT} \right)^{1/2} \quad (3)$$

Pour des molécules sphères rigides, le libre parcours moyen est inversement proportionnel à la densité et ne dépend pas de la température. Dans le cas général, il est encore inversement proportionnel à la densité mais il dépend aussi de la température.

Par extension, on peut utiliser l'équation (1) pour un gaz dont la loi de viscosité n'est pas une loi en puissance, par exemple pour de l'air dont la viscosité est bien représentée par la loi de Sutherland. Il suffit de considérer ω comme l'exposant d'une loi en puissance ajustée à la température T sur la loi de viscosité : $\omega = (d\mu/dT)/(\mu/T)$. Sur la Figure 2, on a représenté le libre parcours moyen pour de l'air et de l'hélium, aux températures de 300 K et 600 K, pour des pressions de 1 Pa à 1 bar.

Il faut souligner que le libre parcours moyen varie en général le long d'un microcanal et qu'il prend des valeurs différentes selon la façon dont on le calcule. Pour de l'air dans les conditions ambiantes

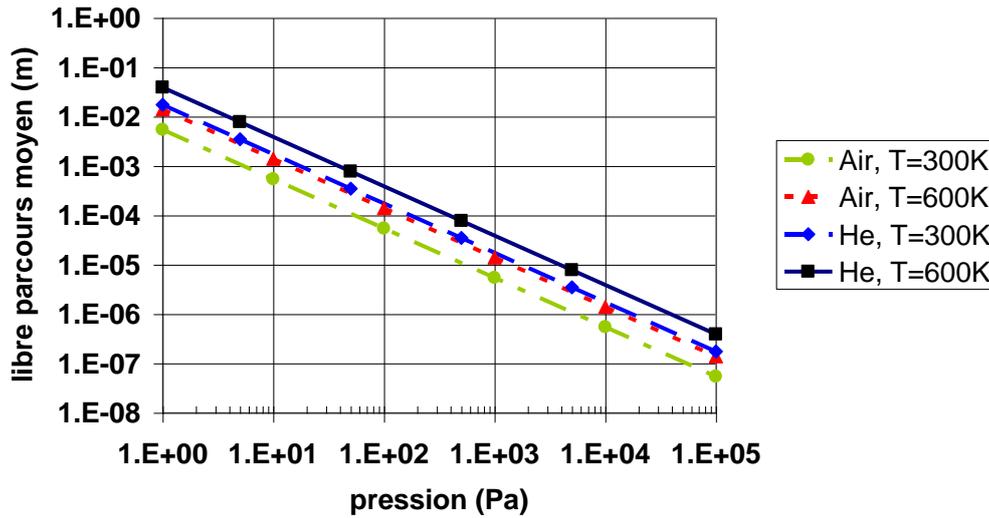


Figure 2 : Evolution du libre parcours moyen en fonction de la pression et de la température pour de l'air et de l'hélium.

($p = 1 \text{ bar}$, $T = 300 \text{ K}$), la formule (1) (avec $\omega = 0,769$) donne $5,4 \times 10^{-8} \text{ m}$, et la formule (2) donne $6,9 \times 10^{-8} \text{ m}$. Pour éviter les confusions et les erreurs, il faut préciser où et comment on le calcule. Par ailleurs, dans la démonstration des formules (1)-(3), on a supposé que la distribution de la vitesse relative entre partenaires collisionnels était celle d'un gaz en équilibre. Ces formules ne sont donc valables en principe que pour un gaz en équilibre (ou proche de l'équilibre).

D'après la Figure 2, on constate que dans de l'air à pression et température ambiantes ($\lambda = 0,054 \mu\text{m}$), les équations classiques avec conditions aux limites d'adhérence sont en défaut pour des canaux de profondeur (ou de diamètre) inférieure à environ $15\text{-}20 \mu\text{m}$. Toutefois, les équations classiques correctement modifiées dans leurs conditions aux limites ou dans leurs termes dissipatifs pourraient être utilisables jusqu'à des profondeurs de l'ordre de $0,3$ voire $0,1 \mu\text{m}$.

Dans certaines applications (microcompresseur de Knudsen), on peut envisager des microcanaux utilisés à pression beaucoup plus basse ($10\text{-}100 \text{ Pa}$, par exemple). Les libres parcours moyens sont de l'ordre de 100 à $1000 \mu\text{m}$. Pour des canaux de l'ordre de $10\text{-}100 \mu\text{m}$ ou plus petits, l'approche moléculaire est absolument nécessaire.

En introduisant une longueur caractéristique (par exemple H) et une vitesse caractéristique (notée u), on peut transformer l'équation (1) en une relation entre le nombre de Knudsen $Kn = \lambda / H$, le nombre de Reynolds $Re = \rho u H / \mu$ et le rapport des vitesses moléculaires $s = u / (2RT)^{1/2}$:

$$Kn = \frac{s}{Re} \frac{K(\omega)}{\pi^{1/2}}. \quad (4)$$

s est voisin du nombre de Mach, mais il a l'avantage de garder un sens dans un gaz hors d'équilibre.

Interaction gaz-surface. Toute approche moléculaire (et même une approche continue qui introduit la notion de glissement de vitesse) fait appel à des coefficients qui caractérisent la réflexion des molécules sur les parois. Le coefficient d'accommodation d'une grandeur Q quelconque portée par les molécules est défini comme $a_Q = (\dot{Q}_i - \dot{Q}_r) / (\dot{Q}_i - \dot{Q}_w)$ où \dot{Q}_i désigne le flux incident de la grandeur Q , et \dot{Q}_r le flux réfléchi effectivement. \dot{Q}_w est le flux qui serait réfléchi si l'interaction était diffuse avec accommodation parfaite (les molécules semblent alors provenir d'un gaz en équilibre à la température de paroi T_w). Au lieu de flux, on pourrait parler de la valeur moyenne de

Q porté par les molécules incidentes ou réfléchies. En principe, il existe une valeur de a_Q pour chaque grandeur Q considérée (quantité de mouvement normale, énergie rotationnelle, etc.....). Mais on utilise souvent pour décrire l'interaction gaz-surface le modèle de Maxwell dans lequel toute molécule incidente a une probabilité a d'être réémise de manière diffuse et une probabilité $1-a$ d'être réfléchi spéculairement. Alors tout les coefficients d'accommodations sont égaux simplement à a .

II.2 Calcul en régime sans collisions (régime moléculaire libre)

Dans le cas particulier où le libre parcours moyen à l'entrée et à la sortie du canal est très grand par rapport à la hauteur du canal ($Kn \gg 1$), une approche moléculaire relativement simple permet de calculer le débit du canal en fonction des pressions et des températures qui règnent à ses extrémités.

Nos hypothèses permettent de considérer le gaz de chaque réservoir comme au repos et en équilibre, sous les pression et températures p_1, T_1, p_2, T_2 . Par ailleurs, on peut admettre que dans le canal, les molécules ne subissent pas de collisions entre elles. Une molécule de gaz qui pénètre dans le canal à une extrémité ne fera qu'un va-et-vient entre les parois et ressortira de l'autre côté avec une probabilité P ou du même côté avec une probabilité $1-P$.

Dans un gaz au repos en équilibre, le nombre de molécules qui traversent dans un sens donné l'unité d'aire par unité de temps est donné par $\dot{N} = n(2RT)^{1/2} / (2\pi^{1/2})$, où n est la concentration moléculaire. Cette formule est utilisable pour connaître les flux moléculaires qui pénètrent à chaque extrémité. En multipliant par la masse de la molécule, et l'aire A de la section du microcanal, on fait apparaître son débit massique

$$q_{\text{RML}} = \frac{P A}{(2\pi)^{1/2}} \left(\rho_1 (RT_1)^{1/2} - \rho_2 (RT_2)^{1/2} \right) = \frac{P A}{(2\pi)^{1/2}} \left(\frac{p_1}{(RT_1)^{1/2}} - \frac{p_2}{(RT_2)^{1/2}} \right). \quad (5)$$

La probabilité P de transmission d'une molécule à travers le canal est la même dans les deux sens. Elle ne dépend que de la géométrie du canal et de l'interaction gaz-surface. Si les réservoirs 1 et 2 sont fermés et de dimension finie, on arrive à un état stationnaire où le débit est nul et on constate un écart de pression lié à l'écart de température : $r_p = p_1/p_2 = (T_1/T_2)^{1/2}$. C'est ce phénomène qui est le principe de base du compresseur de Knudsen : créer un écart de pression et/ou un débit par simple différence de température, dans une machine sans partie mobile.

Dans le cas particulier isotherme $T_1 = T_2 = T$, la formule (5) montre que le débit est proportionnel à la différence de pression $p_1 - p_2$. Avec $r_p = p_1/p_2$, on peut l'écrire

$$q_{\text{RML}} = \frac{p_2 (r_p - 1)}{(2\pi RT)^{1/2}} \times P \times A. \quad (6)$$

Pour calculer effectivement le débit d'un microcanal par la formule (5) ou (6), il reste à calculer P . On utilise une méthode de Monte Carlo qui consiste à injecter successivement un grand nombre de molécules dans le canal par une de ses extrémités. On considère ici un canal bidimensionnel plan, avec une interaction gaz-surface régie par le modèle de Maxwell. L'injection consiste à poser $x = 0$, à tirer aléatoirement une ordonnée ($0 < y < H$ avec une probabilité uniforme) et trois composantes de vitesse (u_x, u_y, u_z suivant les fonctions de distributions relatives à un gaz en équilibre). On "suit" alors la molécule jusqu'à ce qu'elle ressorte. Si elle entre en collision avec une paroi, on décide si la réflexion doit être diffuse ou spéculaire (avec des probabilités respectives a et $1-a$). Dans le premier cas, on tire à nouveau trois composantes de vitesses avec les mêmes fonctions de distribution qu'à l'entrée (la direction normale étant toutefois changée de x à y). Dans le deuxième cas, on ne change que le signe de la vitesse normale. La molécule se propage ainsi jusqu'à sortir par l'une ou l'autre des extrémités. Sur un grand nombre de molécules, on en déduit la probabilité de transmission P du

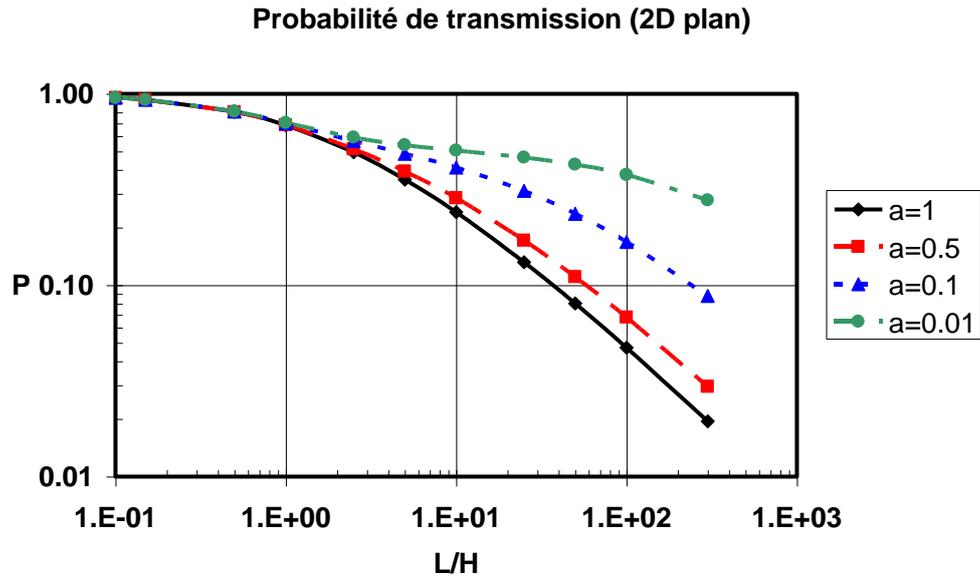


Figure 3: Probabilité de transmission $P(L/H)$ d'une molécule à travers un microcanal bidimensionnel plan (régime moléculaire libre).

microcanal. On note que seule la direction de la vitesse (et non pas son module) intervient sur le résultat. Donc la valeur de P est indépendante de la température de paroi et ne dépend que de L/H et a . Le calcul a été effectué pour 10 millions de molécules pour chaque couple $(L/H, a)$ et les résultats sont donnés sur la Figure 3. Pour une réflexion totalement spéculaire ($a = 0$), la probabilité serait égale à 1, mais les surfaces courantes correspondent plutôt à des réflexions presque diffuses ($a \approx 1$).

On peut appliquer la même démarche à un microcanal de section circulaire. La probabilité de transmission d'une molécule à travers un canal de rayon H est donnée sur la Figure 4 en fonction du rapport L/H et de a . Si une approche moléculaire est requise, sans pour autant que le nombre de Knudsen soit très grand, on peut utiliser la méthode de Monte Carlo (DSMC : Direct Simulation Monte Carlo) [6]. Mais cette dernière doit être adaptée (p.ex. [7]) pour réduire le problème des fluctuations statistiques qui "noient" les très faibles vitesses.

II. DEBIT D'UN MICROCANAL (APPROCHE CONTINUE)

II.1 Formules du débit

Lorsqu'on calcule le débit d'un microcanal par une approche continue, le résultat dépend des conditions aux limites utilisées à l'interface gaz-surface et de l'expression des termes dissipatifs.

En écoulement classique, on admet que la vitesse u_g du gaz au contact de la paroi est égale à celle de la paroi (nulle en général) et que la température T_g du gaz est égale à la température T_w de la paroi. Comme on l'a vu dans le Tableau 1, cette hypothèse n'est valable qu'aux très petites valeurs de Kn . Pour des applications en microfluidique, il faut tenir compte du glissement de vitesse $u_s = u_g - u_w$ et du saut de température $T_g - T_w$.

La contribution principale au glissement de vitesse est liée au gradient normal de vitesse

$$u_s = \frac{2 - a_u}{a_u} \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w \quad (7)$$

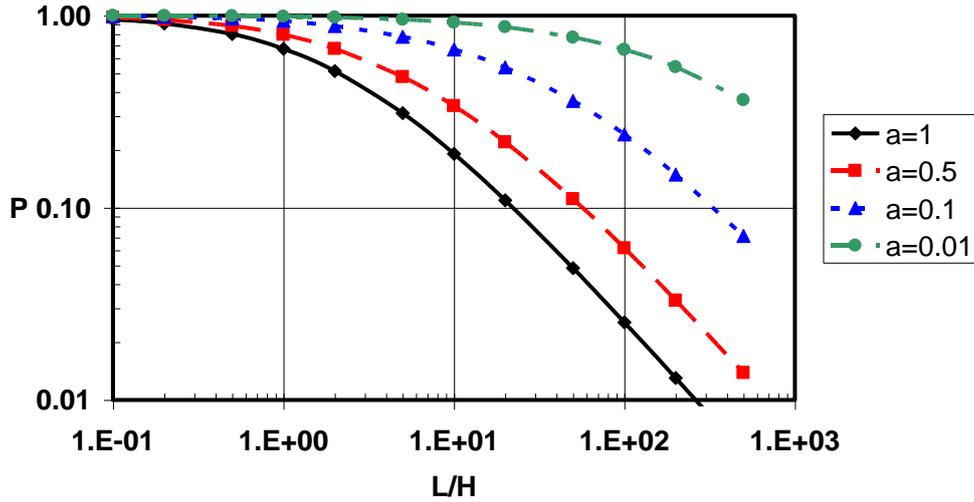


Figure 4: Probabilité de transmission $P(L/H)$ d'une molécule à travers un microcanal axisymétrique de rayon H .

où a_u est le coefficient d'accommodation de la quantité de mouvement tangentielle (égale à a dans le modèle de Maxwell). On a supposé ici l'axe y orienté de la paroi vers l'écoulement. De nombreuses autres expressions ont été proposées (voir par exemple les discussions dans les chapitres 2 et 5 de [4] ou dans le chapitre 8 de [6]). Pour un écoulement non isotherme, on trouve par exemple les conditions de Smoluchowski

$$u_s = \frac{2 - a_u}{a_u} \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w + \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho T} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \quad \text{et} \quad T_s - T_w = \frac{2 - a_T}{a_T} \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right) \frac{\lambda}{Pr} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w \quad (8)$$

où a_T est le coefficient d'accommodation de l'énergie, γ le rapport des chaleurs spécifiques et Pr le nombre de Prandtl. Pour un écoulement isotherme, Deissler [5] propose d'introduire des termes du deuxième ordre

$$u_s = \frac{2 - a_u}{a_u} \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w + \frac{9\lambda^2}{16} \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)_w \quad (9)$$

En utilisant les conditions de Deissler, Aubert et Colin [8] trouvent une expression du débit d'un microcanal de section rectangulaire. Pour $H \ll D$, l'expression s'écrit

$$q_{CL2} = \frac{D (H/2)^3 p_2^2}{\mu_2 RT_2 L} \times \frac{r_p^2 - 1}{3} \left[1 + 12 \frac{2 - a_u}{a_u} \frac{Kn_2}{r_p + 1} + 27 Kn_2^2 \frac{\ln(r_p)}{r_p^2 - 1} \right] \quad (10)$$

Le terme devant le crochet est le débit correspondant au régime non glissant (q_{CL0}). Les deuxième et troisième terme du crochet sont des corrections qui proviennent des termes du premier et deuxième ordre dans les conditions aux limites. On notera q_{CL1} le débit correspondant à la condition de glissement du premier ordre. L'expression du nombre de Knudsen doit utiliser la même définition du libre parcours moyen (Eqs. (1) ou (2)) que l'expression des conditions aux limites.

Elizarova et Sheretov [9] proposent un système d'équations "quasi hydrodynamiques" (QHD) qui contiennent des termes dissipatifs complémentaires par rapport aux équations NS. En appliquant le système QHD au même problème, et en utilisant les conditions de glissement du premier ordre (7), ils trouvent

$$q_{QHD} = \frac{D (H/2)^3 p_2^2}{\mu_2 RT_2 L} \times \frac{r_p^2 - 1}{3} \left[1 + 12 \frac{2 - a_u}{a_u} \frac{Kn_2}{r_p + 1} + \frac{48\pi}{K(\omega)^2 Sc} Kn_2^2 \frac{\ln(r_p)}{r_p^2 - 1} \right] \quad (11)$$

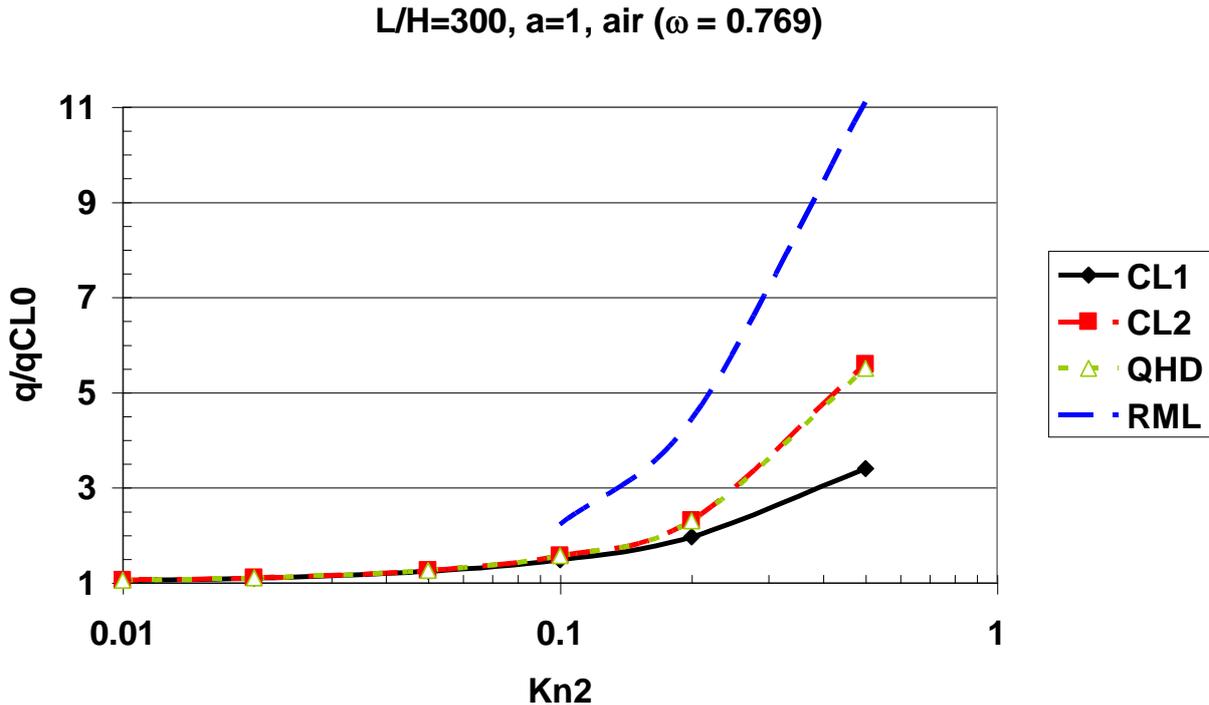


Figure 5 Comparaison du débit massique adimensionné (CL1 : condition de glissement du 1er ordre, CL2 : condition de glissement du 2ème ordre, QHD : eqs quasi hydrodynamiques, RML : régime moléculaire libre)

où Sc est le nombre de Schmidt (d'après [6], Appendix A, on a $Sc = 5 / (7-2\omega)$ pour des molécules VHS et donc $Sc = 5/6$ pour des sphères rigides). Dans le cadre du présent travail, le système QHD a été appliqué à un microcanal de section circulaire de rayon H , et on trouve

$$q_{\text{QHD}} = \frac{\pi H^4 p_2^2}{8\mu_2 RT_2 L} \times \frac{r_p^2 - 1}{2} \left[1 + 8 \frac{2 - a_u}{a_u} \frac{Kn_2}{r_p + 1} + \frac{32\pi}{K^2 Sc} Kn_2^2 \frac{\ln(r_p)}{r_p^2 - 1} \right] \quad (12)$$

Les formules (11) et (12) mettent toutes deux en évidence le débit correspondant au régime non glissant et les corrections apportées respectivement par le glissement au premier ordre et par les termes dissipatifs complémentaires.

Pour des rapports L/H et $r_p = p_1 / p_2$ donnés, les formules (10), (11) ou (12) fixent le débit q . On peut alors utiliser ces mêmes formules en remplaçant formellement L par x (distance par rapport à l'extrémité aval) et r_p par $p(x) / p_2$. On obtient alors la distribution de pression le long du canal sous la forme d'une relation entre x et $p(x)$

II.2 Discussion

On s'attend à ce qu'une correction du débit pour tenir compte de la raréfaction fasse intervenir un terme en Kn , puis un terme en Kn^2 . C'est le cas des formules (10) et (11) qui sont très proches, malgré l'interprétation physique différente de leur terme du 2ème ordre. Elles ne diffèrent que par le coefficient numérique de ce terme. Il dépend de la nature du gaz dans la formule (11), mais pour de l'air à 300 K, on a $\omega = 0,769$ et $48\pi/(K^2 Sc) = 25,9$, très proche de la valeur 27 de la formule (10).

On a tracé sur la **Figure 5** les débits q_{CL1} , q_{CL2} , q_{QHD} et q_{RML} , adimensionnés par q_{CLO} , pour mettre en évidence la correction de raréfaction en fonction du nombre de Knudsen aval Kn_2 . On a considéré un écoulement isotherme ($T = 300$ K) d'air dans un canal plan ($D/H \gg 1$, $L/H = 300$) en supposant l'accommodation parfaite ($a_u = a = 1$) et un rapport de pression $r_p = 1,5$. On voit que q_{CL2}

et q_{QHD} sont presque confondus. Evidemment $q_{\text{RML}}/q_{\text{CL0}}$, donné par la formule (6), est une limite qui n'a de sens que pour des grands nombres de Knudsen. Les corrections du 1er et du 2ème ordre rapprochent le débit de sa limite en moléculaire libre. Des coefficients d'accommodation plus faibles conduiraient à des débits plus élevés, quel que soit le modèle. L'expérience [5] a montré que les corrections du 2ème ordre (q_{CL2} et q_{QHD}) donnaient un accord satisfaisant avec l'expérience jusqu'à $Kn \cong 0,2 - 0,5$, mais on peut s'interroger sur la signification physique de ces corrections qui peuvent atteindre 2 à 4 fois le terme principal.

Par ailleurs, il y a une ambiguïté sur la définition du libre parcours moyen qui figure dans les conditions aux limites et donc dans les formules (10) et (11). Enfin, rappelons que les coefficients d'accommodation restent mal connus et jouent souvent le rôle de paramètres d'ajustement.

Toutes ces remarques justifient des travaux théoriques et expérimentaux qui visent à clarifier l'évaluation du débit d'un microcanal.

III. Similitude

L'analyse dimensionnelle du problème facilite la discussion. Les grandeurs mises en jeu font intervenir 4 grandeurs fondamentales (longueur, masse, temps, température). Si on utilise des nombres sans dimension, on peut donc réduire de 4 le nombre de variables qui interviennent dans l'expression du débit. Il est commode de faire intervenir la vitesse débitante $u_2 = q / (\rho_2 A)$. L'expression du débit devient alors une relation entre les nombres sans dimension $s_2 = u_2 / (2RT_2)^{1/2}$, Kn_2 , r_p , L / H , a (ou a_u), ω , T_1 / T_2 , et D / H . Par exemple, l'équation (10) peut s'écrire

$$s_2 = \frac{H}{L} \times \frac{1}{Kn_2} \times \frac{K(\omega)}{48 \pi^{1/2}} \times (r_p^2 - 1) \left[1 + 12 \frac{2 - a_u}{a_u} \frac{Kn_2}{r_p + 1} + 27 Kn_2^2 \frac{\ln(r_p)}{r_p^2 - 1} \right]. \quad (13)$$

On a utilisé l'équation (1) pour faire intervenir Kn_2 au lieu de μ_2 . L'équation (11) (QHD) peut s'écrire sous la même forme, avec une différence dans le dernier terme entre crochets. De même, l'équation (6) peut s'écrire

$$s_2 = \frac{r_p - 1}{2 \pi^{1/2}} \times P \left(\frac{L}{H}, a \right). \quad (14)$$

Pour un écoulement bidimensionnel et isotherme, D / H et T_1 / T_2 n'interviennent pas. Si on se limite à l'approche continue, donc à des écoulements modérément raréfiés, la discussion qui précède montre que le doute porte sur l'expression entre crochets de l'équation (13). On peut alors écrire

$$s_2 = \frac{H}{L} \times \frac{1}{Kn_2} \times \frac{K(\omega)}{48 \pi^{1/2}} \times (r_p^2 - 1) \left[1 + f(Kn_2, r_p, a_u, \omega) \right] \quad (15)$$

et faire porter les études futures sur la fonction $f(\dots)$ qui diffère suivant les théories et qui inclut une grandeur physique mal connue a_u .

On peut envisager des études en similitude, par exemple en simulant l'écoulement dans un microcanal par un écoulement à pression beaucoup plus basse dans un canal de taille beaucoup plus grande. En pratique, si l'on applique un facteur multiplicatif à H pour le rendre, par exemple, de dimension centimétrique, alors la longueur L devient prohibitive si on lui applique le même facteur. Mais on voit sur l'équation (15) qu'il n'est pas indispensable de respecter la similitude géométrique, puisque la dépendance en H / L est connue (H / L n'intervient pas dans $f(\dots)$). Il faut toutefois continuer à respecter les inégalités $D \gg H$ (effets de bord latéraux négligeables) et $L \gg H$ (effets d'extrémité négligeables) qui ont été supposées dans l'établissement de l'équation (15). Sous cette réserve, il suffit de respecter les valeurs de Kn_2 et r_p , ainsi que les constantes caractéristiques du gaz et de l'interaction gaz-surface (ω et a_u).

Si les écoulements deviennent plus raréfiés, la dépendance de s_2 en H/L n'est, en principe, plus assurée. On voit par exemple qu'en moléculaire libre (Eq.(14)), H/L intervient par l'intermédiaire de P et non plus directement. Toutefois l'expérience numérique décrite au paragraphe II.2 montre que P tend vers une évolution en H/L quand $L/H \rightarrow \infty$ (cf. Figure 3 et Figure 4). On peut donc raisonnablement appliquer les réflexions précédentes sur la similitude pour tout régime de raréfaction.

On notera que la similitude ainsi obtenue (pression plus faible, profondeur plus grande, rapport longueur/profondeur plus faible, vitesse adimensionnée s_2 plus grande) est favorable non seulement à l'expérience, mais aussi au calcul : maillage plus facile à créer, vitesse plus facile à extraire du bruit statistique dans un calcul DSMC.

IV. CONCLUSION

On a rappelé des notions et des formules relatives aux effets de raréfaction dans les écoulements gazeux en microcanaux. On a montré comment calculer le débit d'un microcanal cylindrique ou plan par l'approche moléculaire libre, valable pour des grands nombres de Knudsen. On a rappelé des formules existantes pour le débit d'un microcanal en écoulement modérément raréfié et on les a comparées entre elles et avec la solution moléculaire libre. On a étendu aux canaux cylindriques la formule obtenue par les équations "quasi hydrodynamiques". On a présenté les formules de débit sous forme adimensionnelle, ce qui a mis en évidence la possibilité de poursuivre des études dans des conditions plus accessibles à l'expérience et au calcul.

REFERENCES

- [1] M.Gad-el-Hak: *The Fluid Mechanics of Microdevices – The Freeman Scholar Lecture*, Journal of Fluid Engineering, Vol.121, N.5, pp.5 – 33 (1999).
- [2] Vargo S., Muntz E.P.: *An evaluation of a multiple-stage micromechanical Knudsen compressor and vacuum pump*, Proceedings of 20th International Symp. on Rarefied Gas Dynamics, Peking Univ. Press, Beijing, China, 1997, Ed. C. Shen, pp.996 – 1000.
- [3] Sone Y.: *Continuum gas dynamics in the light of kinetic theory and new features of rarefied gas flow*, Proceedings of 20th International Symp. on Rarefied Gas Dynamics, Peking Univ. Press, Beijing, China, 1997, Ed. C. Shen, pp.3 – 23.
- [4] Colin S.: *Microfluidique*, Ed. Hermes, 2004.
- [5] Colin S., Elizarova T.G., Sheretov Yu.V., Lengrand J.-C., Camon H.: *Micro-écoulements gazeux: validation expérimentale de modèles QHD et de Navier-Stokes avec conditions aux limites de glissement*, Proc. sur CD-ROM du 18ème Congrès Français de Mécanique, Nice, 1 - 5 Septembre 2003.
- [6] Bird G.A.: *Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows*, Oxford University Press, 1994.
- [7] Xie C., Fan J., Shen C.: *Rarefied gas flows in micro-channels*, Proceedings of RGD23, Canada 2002, Eds. A.D. Ketsdever, E.P. Muntz, pp.800 – 807 (2003).
- [8] Aubert C., Colin S.: *High-order boundary conditions for gaseous flows in rectangular microchannels*, Microscale Thermophys. Eng., V.5, N.1, pp.41 - 54 (2001).
- [9] Elizarova T.G., Sheretov Yu.V.: *Analyse du problème de l'écoulement gazeux dans les microcanaux par les équations quasi hydrodynamiques*, La Houille Blanche, N.5-2003, pp.66 - 72 (2003).