

УДК 517.958:533.7

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ПУТЕМ РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

Т. Г. Елизарова<sup>\*)</sup>, А. А. Хохлов

(кафедра математики)

E-mail: khohlov@afrodita.phys.msu.ru

Рассмотрена задача о структуре фронта неподвижной ударной волны в аргоне и азоте. Стационарная система уравнений Навье–Стокса сведена к задаче Коши для нелинейной системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается численно. Полученные результаты уточняют сложившиеся представления о пределах применимости системы уравнений Навье–Стокса для течений одноатомных и двухатомных разреженных газов.

### Введение

Задача о структуре фронта неподвижной ударной волны является классической задачей, на которой демонстрируется ограниченность модели Навье–Стокса для описания течений разреженных газов. В частности, в многочисленных монографиях, посвященных кинетическим моделям для описания течений разреженного газа ([1–3] и др.), приводится сравнение обратной ширины ударной волны, вычисленной по модели Навье–Стокса, с данными экспериментов для аргона и азота, наиболее полными из которых являются данные [4]. Среди первых численных расчетов структуры ударной волны, которые цитируются при сопоставлении с экспериментами, отметим работы [5, 6]. Сравнение демонстрирует, что результаты, полученные по уравнениям Навье–Стокса, адекватно описывают ширину ударной волны до чисел Маха  $Ma < 2$ . При больших числах Маха ширина профиля плотности в расчете примерно в два раза превосходит экспериментальные значения. Это ограничение области применимости классических уравнений служит постоянным стимулом к усовершенствованию модели Навье–Стокса для описания течений умеренно разреженного газа, что отражается в большом числе научных публикаций. В качестве примера можно привести статью [7] и библиографию к ней.

В настоящей работе проводится численное решение задачи о структуре ударной волны с использованием современной вычислительной техники, нового программного обеспечения и уточненных зависимостей коэффициента вязкости от температуры. Задача решается методом, близким к использованному в работе [5], для одноатомного газа аргона и для двухатомного азота. Обратная ширина ударной волны сопоставлена с данными [4].

### Математическая модель

Одномерная стационарная система уравнений Навье–Стокса для плоского течения имеет вид

$$\frac{d(\rho u)}{dx} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d(\rho u^2)}{dx} + \frac{dp}{dx} = \frac{d\Pi}{dx}, \quad (2)$$

$$\frac{d(\rho u H)}{dx} + \frac{dq}{dx} = \frac{d(\Pi u)}{dx}. \quad (3)$$

где  $\rho$  — плотность газа,  $u$  — скорость,  $p$  — давление,  $E = \rho u^2/2 + p/(\gamma - 1)$  — полная энергия единицы объема,  $H = (E + p)/\rho$  — полная удельная энтальпия,  $\gamma$  — показатель адиабаты. Тензор вязких напряжений и вектор теплового потока имеют вид

$$\Pi = \frac{4}{3}\eta \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (4)$$

где  $T$  — температура. Используем уравнение состояния идеального газа  $p = \rho R T$ ,  $R = k_B/m$  — газовая постоянная. Коэффициенты вязкости  $\eta$  и теплопроводности  $\kappa$  вычисляются как

$$\eta = \eta_\infty \left( \frac{T}{T_\infty} \right)^\omega, \quad \kappa = \frac{\gamma R}{(\gamma - 1) Pr} \eta,$$

где  $\eta_\infty$  — известное значение  $\eta$  при температуре  $T_\infty$ ,  $Pr$  — число Прандтля,  $\omega$  — известный показатель степенной зависимости,  $0.5 \leq \omega \leq 1$ .

Интегрируя систему уравнений (1)–(3) один раз, приходим к системе

$$\rho u = c_0, \quad (5)$$

$$\rho u^2 + p = \Pi + c_1, \quad (6)$$

$$\rho u H + q = \Pi u + c_2, \quad (7)$$

где константы  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  определяются из граничных условий. Подставляя выражения для входящих сюда величин, можно свести полученную систему к системе двух уравнений для  $p$  и  $\rho$

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{3\rho^2}{4\eta c_0} \left( c_1 - p - \frac{c_0^2}{\rho} \right), \quad (8)$$

<sup>\*)</sup> Институт математического моделирования РАН.

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d\rho}{dx} \frac{p}{\rho} - \frac{R\rho}{\kappa} \left( c_2 - \frac{4\eta c_0^2}{3\rho^3} \frac{d\rho}{dx} - \frac{c_0^3}{2\rho^2} - \frac{c_0 p}{\rho} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right). \quad (9)$$

Выберем в качестве единиц измерения  $x$ ,  $\rho$ ,  $p$  величины  $\lambda_\infty$ ,  $\rho_\infty$ ,  $p_\infty c_\infty^2$ . Здесь  $\lambda_\infty$  — длина свободного пробега,  $\rho_\infty$  — плотность,  $c_\infty$  — скорость звука в невозмущенном потоке перед ударной волной.

Средняя длина свободного пробега вычисляется в соответствии с формулой Берда [1]

$$\lambda = \frac{\eta}{\rho \sqrt{2\pi RT} \cdot \Omega/4}, \quad \Omega(\omega) = \frac{30}{(7 - 2\omega)(5 - 2\omega)}. \quad (10)$$

В качестве  $\lambda_\infty$  будем брать среднюю длину свободного пробега, которая вычисляется по формуле (10) для  $\Omega(0.5) = 5/4$  и составляет

$$\lambda_\infty = \frac{16}{5} \frac{\eta_\infty}{\rho_\infty \sqrt{2\pi RT_\infty}}. \quad (11)$$

Именно такое определение средней длины свободного пробега использовалось для представления результатов в работе [4] и других до выхода в свет работ Берда.

В безразмерном виде уравнения для  $\rho$  и  $p$  принимают вид

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{3\rho^2}{4\eta c_0} \left( c_1 - p - \frac{c_0^2}{\rho} \right), \quad (12)$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d\rho}{dx} \frac{p}{\rho} - \frac{\rho}{\kappa\gamma} \left( c_2 - \frac{4\eta c_0^2}{3\rho^3} \frac{d\rho}{dx} - \frac{c_0^3}{2\rho^2} - \frac{c_0 p}{\rho} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right). \quad (13)$$

Безразмерные коэффициенты  $\eta$  и  $\kappa$  вычисляются как

$$\eta = \gamma^{\omega - 0.5} \frac{5\sqrt{2\pi}}{16} \left( \frac{p}{\rho} \right)^\omega, \quad \kappa = \frac{\eta}{\text{Pr}(\gamma - 1)}. \quad (14)$$

Задача состоит в нахождении решения уравнений (12)–(13), удовлетворяющего асимптотическим условиям (условиям Рэнкина–Гюгонио) на бесконечности:

$$\rho(-\infty) = \rho_L = 1, \quad p(-\infty) = p_L = \frac{1}{\gamma}, \quad (15)$$

$$\rho(+\infty) = \rho_R = \frac{(\gamma + 1) \text{Ma}^2}{2 + (\gamma - 1) \text{Ma}^2},$$

$$p(+\infty) = p_R = \frac{2\gamma \text{Ma}^2 - (\gamma - 1)}{\gamma(\gamma + 1)}. \quad (16)$$

Выражения для граничных условий справа получаются из соотношений Гюгонио. Входящие в систему уравнений константы интегрирования выражаются из граничных условий:

$$c_0 = \text{Ma}, \quad c_1 = \text{Ma}^2 + \frac{1}{\gamma}, \quad c_2 = \frac{\text{Ma}^3}{2} + \frac{\text{Ma}}{\gamma - 1}.$$

### Алгоритм решения

Основная трудность решения поставленной задачи состоит в том, что граничные условия заданы на бесконечности, что приводит к проблеме «переноса» их в конечную точку.

Отметим еще две особенности рассматриваемой задачи. Заведомо существует пара решений, удовлетворяющих отдельно левому и правому граничным условиям. Это  $\{\rho(x) = \rho_L, p(x) = p_L\}$  и  $\{\rho(x) = \rho_R, p(x) = p_R\}$ . Вдали от фронта волны искомое решение очень мало отличается от указанных. Если перенести одно из граничных условий в конечную точку, то ему удовлетворит одно из этих константных решений. Так как правая часть уравнений не зависит явно от  $x$ , существует целое семейство решений  $\{\rho_s(x) = \rho_0(x + s), p_s(x) = p_0(x + s)\}$ , которые также мало отличаются друг от друга вдали от фронта волны.

Таким образом, необходимо построить одно решение из семейства решений системы и при этом нельзя переносить граничные условия в конечную точку.

Для выделения единственного решения добавим дополнительное условие в некоторой точке. Пусть для определенности это будет начало координат

$$p(0) = p_C, \quad p_C \in (p_L, p_R). \quad (17)$$

Для любого выбора  $p_C$  в силу непрерывности кривых  $\rho(x)$  и  $p(x)$  решение задачи с дополнительным условием (17) существует.

Будем считать значение  $\rho(0) = \rho_C$  параметром, фиксируем  $p_C$  и рассмотрим семейство решений задачи Коши:

$$\begin{cases} \rho(x), p(x) \text{ удовлетворяют (12)–(13)} \\ \text{на } x \in (-\infty, \infty), \\ p(0) = p_C \in (p_L, p_R) \text{ — фиксировано,} \\ \rho(0) = \rho_C \in (\rho_L, \rho_R) \text{ — параметр.} \end{cases} \quad (18)$$

Решение задачи (18) для каждого значения параметра может быть построено численно, например, при помощи методов Рунге–Кутты. При этом решения слева и справа от точки  $x = 0$  имеют один и тот же предел в нуле, а в силу непрерывности правой части у (12)–(13) еще и одинаковый предел производных, так что решение на всей прямой, получающееся сшивкой решений на полупрямых  $(-\infty, 0)$  и  $(0, +\infty)$ , непрерывно в нуле вместе со своей производной. Таким образом, дополнительных проблем при сшивке не возникает.

На рис. 1 в качестве примера представлены последовательные итерации решения  $\rho(x)$  для аргона ( $\gamma = 5/3$ ,  $\text{Pr} = 2/3$ ,  $\omega = 0.81$ ) для  $\text{Ma} = 4$  при различных  $p_C$ .

Можно заметить, что все полученные  $\rho(x)$  удовлетворяют асимптотическому условию на левой границе, условию же на правой границе удовлетворяет лишь искомое решение. Построив такой график, можно визуально выделить необходимое решение, однако процесс выбора может быть автоматизирован.

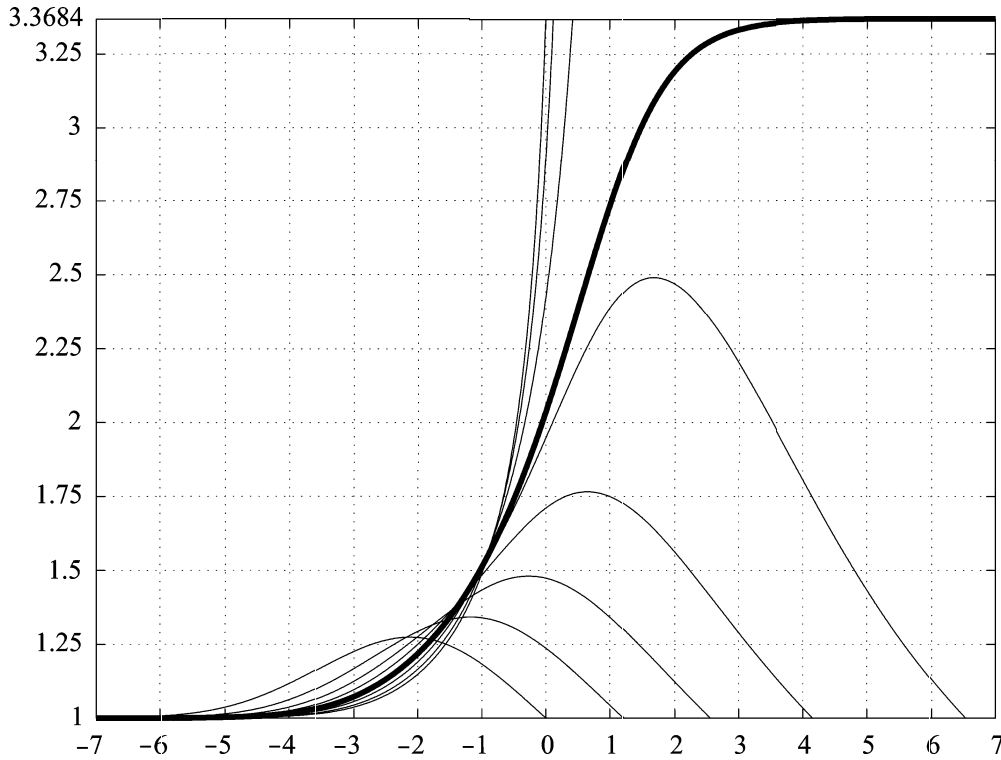


Рис. 1. Семейство  $\rho(x)$ , полученное в результате численного решения задачи (18) при разных значениях  $\rho_C$ . Жирная линия — искомое решение типа ударной волны

Для решения задачи использовался следующий алгоритм:

- 1) выбираем достаточно большой отрезок, на котором строится решение  $[x_L, x_R]$ ;
- 2) выбираем начальное значение  $\rho_C$ , начальный шаг  $\delta$  и допустимую погрешность  $\Delta$ ;
- 3) решаем задачу (18) для текущего  $\rho_C$ ;
- 4) если получено решение с  $\rho(x_R) < \rho_R - \Delta$ , то увеличиваем  $\rho_C$  на  $\delta$  и переходим на шаг 3;
- 5) если получено решение с  $\rho(x_R) > \rho_R + \Delta$ , то уменьшаем  $\rho_C$  на  $\delta/2$ , уменьшаем  $\delta$  в два раза и переходим на шаг 3.

На шаге 3 решение строилось по формулам Розенброка второго порядка в среде Matlab [8]. Погрешность  $\Delta$  бралась равной 0.001, начальный шаг  $\delta = (\rho_R - \rho_L)/3$ , начальное значение параметра  $\rho_C = \rho_L$ ,  $p_C = (p_L + p_R)/2$ .

Вычислительную сложность, связанную с тем, что при малых  $\rho_C$  решение доходит до нуля ( $\rho = 0$  или  $p = 0$ ) и выходит из области определения правой части системы (12)–(13), можно обойти, доопределив правую часть системы нулем вне области определения.

Профиль ударной волны строился для чисел Маха в диапазоне [1.5, 10]. В каждом случае вычислялась обратная ширина фронта ударной волны  $\lambda_\infty/\delta$ , определенная по профилю плотности, которая с учетом выбранных единиц измерения рассчитывается по формуле

$$1/\delta = \max \left( \frac{d\rho}{dx} \right) \frac{1}{\rho_R - \rho_L}.$$

### Результаты численного решения для аргона и азота

Параметры для аргона (одноатомный газ) и азота (двухатомный газ) выбирались в соответствии с данными [1]: аргон:  $\gamma = 5/3$ ,  $\omega = 0.81$ ,  $Pr = 2/3$ ; азот:  $\gamma = 7/5$ ,  $\omega = 0.74$ ,  $Pr = 14/19$ . Значения обратной ширины фронта ударной волны приведены в таблице. Сопоставление с данными экспериментов [4] приведены на рис. 2, 3. Данные экспериментов для аргона и азота обозначены маркерами и нормированы на длину свободного пробега для аргона, вычисленную согласно (11) и составляющую  $\lambda_{Ar} = 1.098$  мм при  $p_\infty = 50$  мторр,  $T_\infty = 300$  К. При этих условиях  $\lambda_{Ar}/\lambda_{N_2} = \eta_{Ar}/\eta_{N_2} \sqrt{m_{Ar}/m_{N_2}} = 1.060$ .

Результаты численного расчета

Ma	Аргон	Азот		
		$B = 0$	$B = 1$	$B \neq 1$
1.5	0.15877	0.20759	0.18088	0.15591
2	0.27232	0.40876	0.35330	0.29220
3	0.37882	0.69726	0.59801	0.45643
4	0.40028	0.83537	0.71425	0.50934
5	0.39137	0.88571	0.75611	0.51047
6	0.37313	0.89316	0.76189	0.49234
7	0.35307	0.88095	0.75098	0.46854
8	0.33375	0.86001	0.73292	0.44434
9	0.31600	0.83572	0.71209	0.42165
10	0.29996	0.81073	0.69069	0.40100

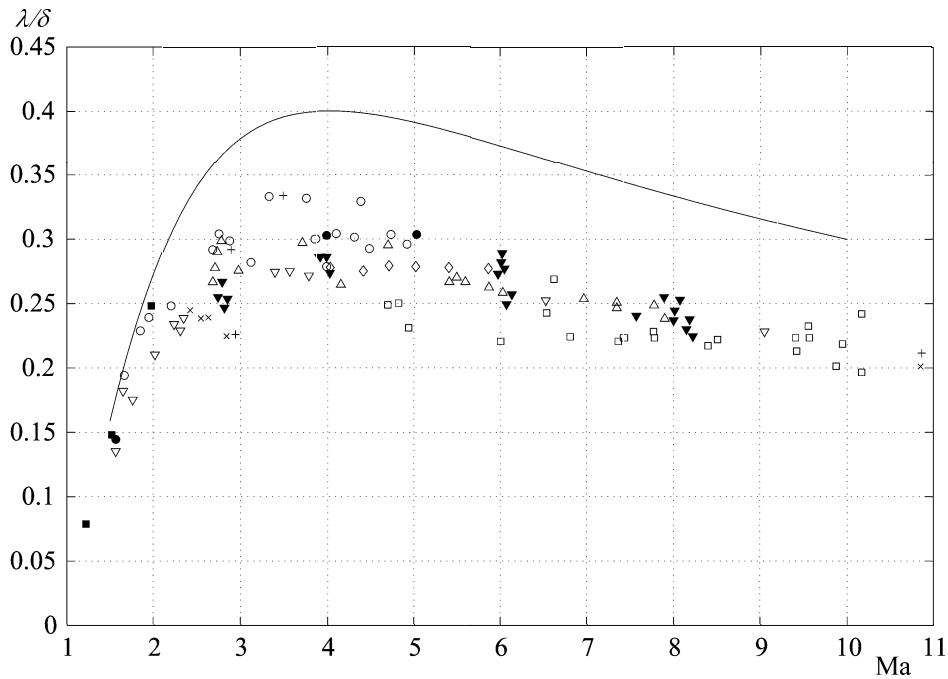


Рис. 2. Обратная ширина ударной волны  $\lambda_{\infty}/\delta$  в сравнении с данными экспериментов для аргона

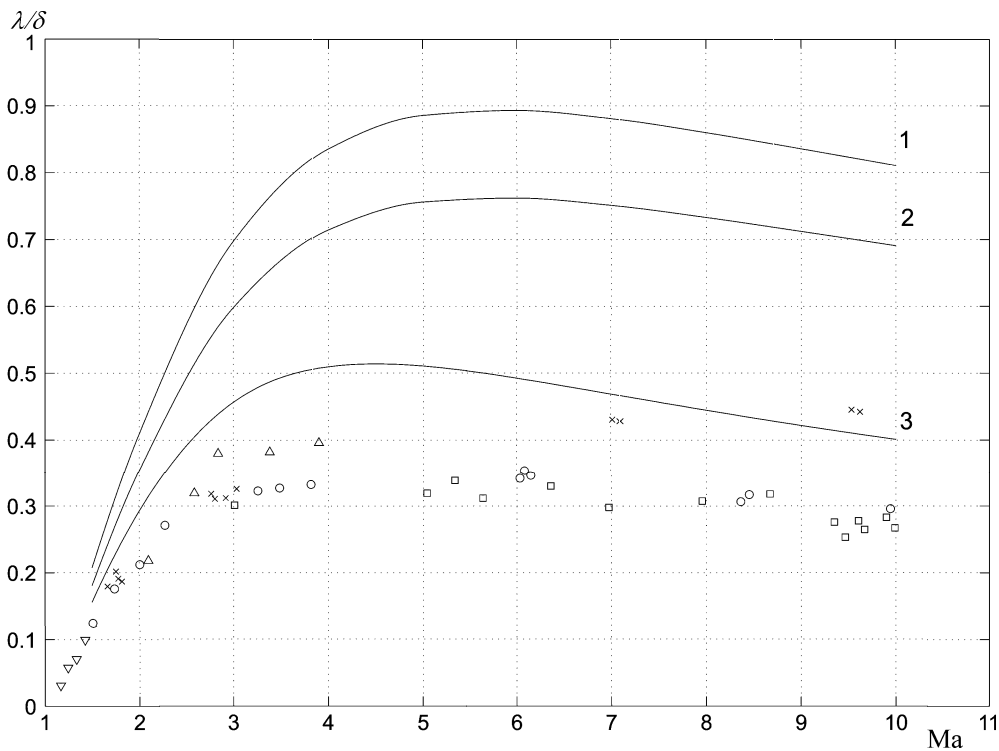


Рис. 3. Обратная ширина ударной волны  $\lambda_{\infty}/\delta$  в сравнении с данными экспериментов для азота. Показано влияние второй вязкости

Результаты, полученные для аргона, с высокой точностью соответствуют данным, приведенным в [9], где эта задача решалась на основе уравнений Навье–Стокса и КГД уравнений на подробных сетках с помощью метода установления<sup>\*)</sup>. Это

<sup>\*)</sup> В работе [9] результаты расчетов для Ag нормированы на  $\lambda_{\infty}$  при  $\omega = 0.81$ . Для сопоставления с настоящими результатами данные [9] следует умножить на  $\Omega(0.81)/\Omega(0.5) = 1.32$ .

подтверждает справедливость и точность полученных результатов.

Результаты демонстрируют, что точность уравнений Навье–Стокса в задаче о структуре неподвижной ударной волны в аргоне существенно выше, чем считалось ранее. А именно, при  $Ma > 3$  расчетная толщина профиля волны составляет около 3/4 от экспериментального значения. Ранее полагалось, что эти значения отличаются в два раза.

Азот является двухатомным газом, который при рассматриваемых температурах обладает двумя вращательными степенями свободы. Для уточнения описания газов с внутренними степенями свободы в тензор вязких напряжений включают так называемую вторую, или объемную, вязкость. При этом

$$\Pi = \frac{4}{3}\eta \frac{\partial u}{\partial x} + \xi \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Коэффициент второй вязкости выберем в виде [10]

$$\xi = \eta \left( \frac{5}{3} - \gamma \right) B.$$

Тогда тензор вязких напряжений примет вид

$$\Pi = \frac{4}{3}\eta \left( 1 + \frac{3}{4} \left( \frac{5}{3} - \gamma \right) B \right) \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Согласно [10, 11] безразмерный коэффициент  $B$  можно вычислить как

$$B = \frac{3}{2}(\gamma - 1)A \sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot Z, \quad (19)$$

$$A = \frac{2(7 - 2\omega)(5 - 2\omega)}{15\sqrt{2\pi}}, \quad (20)$$

$$Z = \frac{Z_\infty}{1 + (\pi^{3/2}/2)(T^*/T)^{1/2} + (\pi + \pi^2/4)(T^*/T)}, \quad (21)$$

где для азота  $Z_\infty = 23$ ,  $T^* = 91.5$  К [1]. В безразмерном виде  $T^* = 91.5$  К/273 К,  $T = \gamma p/\rho$ .

Результаты расчетов структуры ударной волны в азоте приведены в таблице и на рис. 3 в сопоставлении с данными экспериментов [4]. Представлены три варианта — без учета второй вязкости  $B = 0$  (кривая 1), с учетом второй вязкости в упрощенном виде  $B = 1$  (кривая 2) и для  $B$  в виде (19) (кривая 3).

Результаты расчетов для  $B$  в виде (19) с точностью 1–2% соответствуют данным [9] для уравнений Навье–Стокса, полученным методом установления\*). Толщина профиля плотности без учета объемной вязкости ( $B = 0$ ) при  $Ma > 3$  ока-

зывается меньше, чем в эксперименте, почти в три раза. Учет влияния внутренних степеней свободы путем введения коэффициента объемной вязкости улучшает точность описания профиля плотности и при выборе  $B$  в виде (19) приближает численное решение к данным эксперимента с точностью порядка 30% (рис. 3).

Таким образом, показано, что для описания профиля плотности в ударной волне точность модели Навье–Стокса составляет порядка 30%, что существенно выше, чем считалось ранее. При этом для адекватного описания толщины профиля волны в двухатомном азоте требуется ввести в модель коэффициент объемной вязкости. Для сопоставления с экспериментом профилей скорости и температуры в ударной волне требуются дополнительные исследования.

### Литература

1. Bird G.A. Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows. Oxford, 1998.
2. Cercignani C. Rarefied Gas Dynamics. From basic concepts to actual calculations. Cambridge, 2000.
3. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. М., 1967.
4. Alsmeyer H. // J. Fluid Mech. 1976. **74**. P. 497.
5. Schwartz L.M., Hornig D.F. // Phys. Fluids. 1963. **6**, N 12. P. 1669.
6. Linzer M., Hornig D.F. // Phys. Fluids. 1963. **6**, N 12. P. 1661.
7. Torrilhon M., Struchtrup H. // J. Fluid Mech. 2004. **513**. P. 171.
8. Shampine L.F., Reichelt M.W. // SIAM J. Sci. Computing. 1997. **18**. P. 1.
9. Елизарова Т.Г., Широков И.А. // Прикладная математика и информатика. Тр. факультета ВМиК МГУ / Под ред. Д.П. Костомарова, В.И. Дмитриева. 2004. № 18. С. 66.
10. Елизарова Т.Г., Серегин В.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2006. № 1. С. 15 (Moscow University Phys. Bull. 2006. N 1).
11. Жданов В.М., Алиевский М.Я. Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. М., 1989.

\*) В работе [9] результаты расчетов для азота нормированы на  $\lambda_\infty$  при  $\omega = 0.74$ . Для сопоставления с настоящими результатами данные [9] следует умножить на  $\Omega(0.74)/\Omega(0.5) = 1.235$ .