

# Анализ вычислительных свойств квазигазодинамического алгоритма на примере решения уравнений Эйлера

Т. Г. Елизарова, Е. В. Шильников

125047 Москва, Миусская пл. 4а, ИММ РАН.

e-mail telizar@mail.ru; shiva@imamod.ru

Поступила в редакцию 19.01.2009.

Переработанный вариант ...02.2009

## Аннотация

На примере численного решения задач Римана о распаде сильных разрывов и задачи о распространении звукового возмущения проведен анализ вычислительных свойств алгоритма, основанного на квазигазодинамических уравнениях. Показано, что данный алгоритм позволяет единообразно рассчитывать как задачи о распаде разрыва с большими перепадами плотности и давления, так и задачи о распространении акустических возмущений. Численно получены условия устойчивости и оценки точности и вычислительной сложности разностной схемы. Библ.22. Иллюстр.16

**Ключевые слова:** квазигазодинамический алгоритм, точность, устойчивость, вычислительная сложность, задача Римана, акустические возмущения

## Введение

Как правило, численные алгоритмы для моделирования газодинамических течений строятся на основе последовательного усложнения рассматриваемых моделей - вначале предлагается эффективный метод решения упрощенных уравнений, например, уравнения переноса или уравнения Бюргерса, затем метод обобщается на одномерную систему уравнений газовой динамики, потом на систему, включающую в себя процессы диссипации, затем

на многомерные задачи, неструктурированные сетки и так далее, в зависимости от поставленной цели. При построении квазигазодинамических (КГД) уравнений был сразу предложен численный алгоритм для общего случая - а именно, для расчета вязких нестационарных пространственных течений. При этом соответствующая система уравнений была выписана сразу в инвариантном виде. И только впоследствии алгоритм был редуцирован для численного моделирования двумерных и одномерных задач на равномерных сетках. Такой подход от общего к частному и предопределил тот факт, что расчетам одномерных течений до сих пор было уделено недостаточное внимание.

В данной работе на примере задачи Римана о распаде разрыва численно исследуются условия устойчивости и точности алгоритма, основанного на КГД системе уравнений, и приводятся оценки его вычислительной сложности. Кроме того продемонстрированы решения задачи о распаде разрыва с большими значениями перепадов плотности и давления в начальный момент времени и задачи о распространении звукового возмущения. Данные примеры являются сложными тестами и демонстрируют широкий спектр применимости данного алгоритма. Представительная система тестовых расчетов, выполненных в рамках КГД алгоритма, приведена также в [1].

Отметим, что ранее КГД алгоритм (см., например, [2], [3]) и родственные ему кинетически-согласованные разностные схемы [4] успешно использовались для численного моделирования широкого круга течений вязкого сжимаемого газа как в двумерных, так и в пространственных приближениях.

## **1. Система квазигазодинамических уравнений**

Система КГД уравнений в традиционных обозначениях с учетом внешних сил  $F_i$  и внешних источников тепла  $Q$ , согласно [2], [3] и [5] записывается в виде законов сохранения следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x_i} j_{mi} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} j_{mj} u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} p = \rho_* F_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \Pi_{ji}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} j_{mi} \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} q_i = \\ = j_{mi} F_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \Pi_{ij} u_j + Q, \end{aligned} \quad (3)$$

где введены обозначения:

$$j_{mi} = \rho(u_i - w_i), \quad (4)$$

$$w_i = \frac{\tau}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_i u_j + \frac{\partial}{\partial x_i} p - \rho F_i \right), \quad (5)$$

$$\rho_* = \left( \rho - \tau \frac{\partial}{\partial x_k} \rho u_k \right), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} = \Pi_{\text{NS}ij} + \tau \rho u_i \left( u_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_j + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} p - F_j \right) + \\ + \tau \delta_{ij} \left( u_k \frac{\partial}{\partial x_k} p + \gamma p \frac{\partial}{\partial x_k} u_k - (\gamma - 1) Q \right), \end{aligned} \quad (7)$$

$$q_i = q_{\text{NS}i} - \tau \rho u_i \left( u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon + p u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} - \frac{Q}{\rho} \right). \quad (8)$$

По повторяющимся индексам здесь и далее подразумевается суммирование. Уравнения связи имеют вид:

$$p = \rho R T, \quad \varepsilon = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}. \quad (9)$$

Тепловой поток и тензор вязких напряжений Навье-Стокса вычисляются как:

$$q_{\text{NS}i} = -\kappa \frac{\partial}{\partial x_i} T, \quad (10)$$

$$\Pi_{\text{NS}ij} = \mu \left( \frac{\partial}{\partial x_i} u_j + \frac{\partial}{\partial x_j} u_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} u_k \right). \quad (11)$$

$$\mu = \mu_\infty \left( \frac{T}{T_\infty} \right)^\omega, \quad \kappa = \mu \frac{\gamma R}{(\gamma - 1) Pr}, \quad \tau = \frac{\mu}{p Sc}, \quad (12)$$

где  $\mu$  - коэффициент динамической вязкости,  $\kappa$  - коэффициент теплопроводности,  $\tau$  - релаксационный параметр, имеющий размерность времени,  $\gamma$  - показатель адиабаты,  $Pr$  - число Прандтля,  $Sc$  - число Шмидта. Вопросы корректности и физической адекватности указанной системы и ее упрощенных вариантов исследовались в [2] – [7].

Заметим, что диссипативные слагаемые, образующие КГД добавки с коэффициентом  $\tau$  к потоку массы (5), тензору вязких напряжений (7) и тепловому потоку (8), обращаются в ноль в областях течения, где решение удовлетворяет стационарным уравнениям Эйлера.

Уравнение баланса энтропии  $s$  для КГД системы имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho s + \frac{\partial}{\partial x_i} j_{mi} s = - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{q_i}{T} + \kappa \left( \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial x_i} T \right)^2 + \frac{\Phi}{T}, \quad (13)$$

где диссипативную функцию  $\Phi$  удастся представить выражением:

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{\Pi_{NS\ ij} \Pi_{NS\ ij}}{2\mu} + \tau \rho \left( u_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} p - F_i \right)^2 + \frac{\tau p}{\rho^2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \rho u_i \right)^2 + \\ & + \frac{\tau \rho}{\varepsilon} \left( u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon + \frac{p}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} u_i - \frac{Q}{2\rho} \right)^2 + Q \left( 1 - \frac{(\gamma - 1)\tau Q}{4p} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Условие неотрицательности последнего слагаемого в (14) накладывает ограничение на величину параметра  $\tau$  в зависимости от интенсивности внешних источников тепла.<sup>1</sup>

## 2. Численный алгоритм расчета одномерных течений

Для удобства численного решения система уравнений (1)–(3) приводится к безразмерному виду с использованием базовых значений плотности  $\rho_0$ , скорости звука  $c_0 = \sqrt{\gamma R T_0}$  и длины  $L$ . Обезразмеривание не изменяет вида уравнений.

<sup>1</sup>Окончательный вид двух последних слагаемых получен А.А.Злотником. Частное сообщение.

Будем решать КГД уравнения для плоских одномерных течений без учета внешних сил и источников тепла ( $Q = 0$ ,  $F_i = 0$ ). При этом система (1)–(3) существенно упростится.

Введем равномерную сетку по координате  $x$  с шагом  $h$ , и по времени с шагом  $\Delta t$ .

При численном решении уравнений Эйлера на основе системы (1)–(3) все диссипативные слагаемые, то есть слагаемые с коэффициентами  $\mu$ ,  $\kappa$  и  $\tau$  рассматриваются как регуляризаторы. В этом случае релаксационный параметр и коэффициенты вязкости и теплопроводности оказываются связанными между собой и в безразмерном виде вычисляются как

$$\tau = \alpha \frac{h}{c}, \quad \mu = \tau \cdot p \cdot Sc, \quad \kappa = \frac{\tau \cdot p \cdot Sc}{Pr(\gamma - 1)}, \quad (15)$$

где  $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$  - локальное значение скорости звука. При этом числа Прандтля  $Pr$  и Шмидта  $Sc$  рассматриваются как численные коэффициенты для настройки искусственной вязкости, если такая настройка необходима.

Значения всех газодинамических величин — скорости, плотности, давления — определяются в узлах сетки. Значения потоков определяются в полуцелых точках. Согласно [3], [6] выпишем явную по времени однородную разностную схему на пространственном шаблоне, включающим в себя три точки:

$$\widehat{\rho}_i = \rho_i - \frac{\Delta t}{h} (j_{mi+1/2} - j_{mi-1/2}), \quad (16)$$

$$\widehat{\rho}_i \widehat{u}_i = \rho_i u_i + \frac{\Delta t}{h} [(\Pi_{i+1/2} - \Pi_{i-1/2}) - (p_{i+1/2} - p_{i-1/2}) - (j_{mi+1/2} u_{i+1/2} - j_{mi-1/2} u_{i-1/2})], \quad (17)$$

$$\widehat{E}_i = E_i + \frac{\Delta t}{h} \left[ (\Pi_{i+1/2} u_{i+1/2} - \Pi_{i-1/2} u_{i-1/2}) - (q_{i+1/2} - q_{i-1/2}) - \left( \frac{j_{mi+1/2}}{\rho_{i+1/2}} (E_{i+1/2} + p_{i+1/2}) - \frac{j_{mi-1/2}}{\rho_{i-1/2}} (E_{i-1/2} + p_{i-1/2}) \right) \right], \quad p_i = (\gamma - 1) \left( E_i - \frac{\rho_i u_i^2}{2} \right). \quad (18)$$

Здесь  $E_i = \rho_i u_i^2 / 2 + p_i / (\gamma - 1)$  полная энергия единицы объема. Дискретный аналог потока массы  $j_{mi+1/2}$  рассчитывается следующим образом

$$w_{i+1/2} = \frac{\tau_{i+1/2}}{\rho_{i+1/2}} \frac{1}{h} (\rho_{i+1} u_{i+1}^2 + p_{i+1} - \rho_i u_i^2 - p_i), \quad (19)$$

$$j_{mi+1/2} = \rho_{i+1/2} (u_{i+1/2} - w_{i+1/2}). \quad (20)$$

Дискретное выражение для  $\Pi_{i+1/2}$  вычисляется по формулам

$$\mu_{i+1/2} = \tau_{i+1/2} p_{i+1/2} S c, \quad (21)$$

$$\Pi_{NSi+1/2} = \frac{4}{3} \mu_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \quad (22)$$

$$w_{i+1/2}^* = \tau_{i+1/2} (\rho_{i+1/2} u_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \frac{p_{i+1} - p_i}{h}), \quad (23)$$

$$R_{i+1/2} = \tau_{i+1/2} (u_{i+1/2} \frac{p_{i+1} - p_i}{h} + \gamma p_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h}), \quad (24)$$

$$\Pi_{i+1/2} = (\Pi_{NS} + u w^* + R)_{i+1/2}. \quad (25)$$

Вычисление  $q_{i+1/2}$  происходит согласно соотношениям

$$R_{i+1/2}^q = (\tau \rho)_{i+1/2} \left( \frac{u_{i+1/2}}{\gamma - 1} \frac{(p/\rho)_{i+1} - (p/\rho)_i}{h} + (pu)_{i+1/2} \frac{1/\rho_{i+1} - 1/\rho_i}{h} \right), \quad (26)$$

$$q_{i+1/2} = -(\tau p)_{i+1/2} \frac{\gamma S c}{Pr(\gamma - 1)} \frac{(p/\rho)_{i+1} - (p/\rho)_i}{h} - u_{i+1/2} R_{i+1/2}^q. \quad (27)$$

Вопросы точности и устойчивости КГД алгоритма анализируются далее на примере расчетов задачи Римана.

### 3. Оценки точности численного алгоритма

Разностная схема (16) – (18) формально имеет порядок точности по пространству  $O(\alpha h)$ . Расчеты [1] подтверждают, что уменьшение коэффициента  $\alpha$  эквивалентно сгущению пространственной сетки.

Оценим точность вычислительной схемы на основании расчетов задачи о распаде разрыва. В качестве начальных условий зададим значения на левом ( $l$ ) и правом ( $r$ ) интервалах области расчета  $(\rho_l, u_l, p_l) = (8, 0, 480)$ ,  $(\rho_r, u_r, p_r) = (1, 0, 1)$  при  $\gamma = 5/3$ . Задача решается в области  $(0, 200)$ , разрыв располагается в точке  $x_0 = 100$ . Диссипативные коэффициенты вычислялись для  $Pr=2/3$ ,  $Sc=1$ ,  $\alpha = 0.4$ . Шаг по времени определяется величиной  $\beta = 0.5$ .

На Фиг. 1 и 2 приведено распределение плотности и фрагмент этого распределения для момента времени  $t_{fin} = 4$ . Расчет выполнен на последовательности сеток с шагами  $h = 0.5, 0.2, 0.1$  и  $0.02$ . Видна монотонная сходимость численного решения при сгущении пространственной сетки.

Оценим порядок точности разностной схемы (16) – (18) используя расчеты на последовательности сгущающихся сеток. Пусть  $u$  - точное решение задачи. В нашем случае - это автомодельное решение [8]. Пусть  $u_1$  - сеточное решение задачи на сетке с шагом  $h$ ,  $u_2$  - сеточное решение задачи на сетке с шагом  $2h$ . Тогда, согласно [9], [10], в случае, если решение задачи достаточно гладкое, то есть имеет производные вплоть до второго порядка, погрешность сеточного решения имеет вид

$$u_1 - u = A(2h)^n, \quad u_2 - u = Ah^n, \quad (28)$$

где  $n$  – порядок точности разностной схемы,  $A$  – некоторая константа, зависящая от производных решения. При этом порядок точности схемы определяется как

$$n = \log_2 \frac{u_1 - u}{u_2 - u}. \quad (29)$$

На Фиг. 3 приведено автомодельное решение задачи в случае, когда начальное положение разрыва находится в точке  $x_0 = 0$  (линия 1), и порядок точности численного алгоритма  $n$  согласно (29). Порядок точности вычислен для двух последовательностей сеток –  $h = 0.05$  и  $2h = 0.1$  – величина  $n_1$  (кривая 2), и  $h = 0.025$  и  $2h = 0.05$  – величина  $n_2$  (кривая 3).

Оба расчета показывают, что в областях гладкого решения, то есть в зоне волны разрежения  $-35 < x < 5$ , и в области за контактном разрывом  $5 < x < 30$ , эффективный порядок точности КГД алгоритма составляет  $0.5 \leq n \leq 2$ . В тех областях, где течение близко к стационарному невязкому течению, решение задачи приближенно описывается стационарными уравнениями Эйлера, и эйлеровы комплексы, формирующие КГД добавки, оказываются малыми. В этих зонах точность схемы возрастает.

В зонах разрывов решения и в точках, где разностное решение совпадает с точным ( $u_1 = u$  или  $u_2 = u$ ), использованный алгоритм оценки точности схемы некорректен. Последнее выражается в "пиках" и отрицательных значениях величины  $n$ .

На Фиг. 4 приведено распределение КГД добавки  $M = \partial(\rho w)/\partial x$  для уравнения неразрывности, которая в разностном виде, согласно (16), записывается как

$$M_i = \frac{1}{h}(\rho_{i+1/2}w_{i+1/2} - \rho_{i-1/2}w_{i-1/2}).$$

Здесь дискретные значения  $w$  вычисляются согласно (19). Расчет выполнен на сетках  $h = 0.05$  (кривая 1) и  $h = 0.025$  (кривая 2). Из графика видно, что в областях гладкого решения величина добавки  $M_i$  мала, а в зоне между волной разрежения и контактном разрывом близка к нулю. Это приводит к повышению реального порядка точности разностной схемы в соответствующих областях и коррелирует с распределениями величины  $n$ , приведенными на Фиг. 3. Максимальные значения  $M_i$  достигаются в зоне ударной волны ( $\max M_i \sim 40$ ,  $\min M_i \sim -20$  - не изображены на графике). Следующие по величине максимумы соответствуют области контактного



разрыва, и два дополнительных малых по величине экстремума величины  $M_i$  возникают на звуковых точках, ограничивающих волну разрежения.

Тем самым величина КГД диссипации, определяющая устойчивость разностного алгоритма, автоматически адаптируется к решению задачи и зависит от его локальных свойств.

### 3. Исследование устойчивости численного алгоритма

Численный алгоритм (16) – (18) представляет собой условно устойчивую явную по времени разностную схему. Как показывает практика численных расчетов и физические соображения, положенные в основу вывода КГД уравнений на основании кинетических моделей, ограничение на временной шаг для этих алгоритмов определяется условием Куранта

$$\Delta t = \beta \min\left(\frac{h}{|u| + c}\right), \quad (30)$$

где  $0 < \beta(\alpha) < 1$  – численный коэффициент.

В [7] методом энергетических неравенств было получено достаточное условие устойчивости для КГД алгоритма и доказаны соответствующие теоремы. Рассматривалось одномерное течение в рамках уравнений Эйлера в акустическом приближении для одномерной по пространству разностной схемы с постоянным шагом. Полученное условие устойчивости Куранта имеет вид

$$\Delta t \leq \beta \frac{h}{c_*}, \quad (31)$$

где  $c_* = \sqrt{\gamma \mathcal{R} T_*}$  – средняя по пространству скорость звука в начальный момент времени, и коэффициент  $\beta$  равен

$$\beta = \min(\beta_A, \beta_B, \beta_C), \quad \text{где} \quad \beta_A = \frac{A}{A^*}, \beta_B = \frac{B}{B^*}, \beta_C = \frac{C}{C^*}. \quad (32)$$

Значения  $A, B, C$  и  $A^*, B^*, C^*$  определяются величинами  $\gamma, \text{Pr}$  и значением коэффициента  $\alpha$ , входящим в формулу для вычисления искусственной

диссипации (15). Для  $Sc=1$  эти величины составляют

$$A = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad B = \frac{\alpha}{\gamma} \left( \frac{4}{3} + \gamma \right), \quad C = \frac{\alpha}{Pr(\gamma - 1)}, \quad (33)$$

$$A^* = 2\gamma A^2 + 2(\gamma - 1)AC + \gamma A + B + \frac{1}{2\gamma}, \quad (34)$$

$$B^* = 2B^2 + A + \frac{B}{\gamma} + \frac{(\gamma - 1)C}{\gamma} + \frac{1}{2}, \quad (35)$$

$$C^* = (\gamma - 1)C(2A + 2C + 1). \quad (36)$$

Наиболее жестким является ограничение, определяемое величиной  $\beta_A$ . Для  $\gamma = 5/3$ ,  $Pr=2/3$  при  $\alpha = 0.5$  разностный алгоритм устойчив при  $\beta \sim 0.12$  [7].

Далее на примере задачи, описанной в предыдущем параграфе, численно исследуется справедливость условия Куранта вида (30).

Для каждого значения параметра  $\alpha$  из промежутка  $0.2 - 0.5$  в формуле (15) варьировалась величина шага по времени – коэффициент  $\beta$  в формуле (30). При этом определялся максимально допустимый шаг по времени, соответствующий отсутствию осцилляций за фронтом ударной волны и энтропийного следа (провала), образующегося в профиле плотности за волной разрежения. Полученная таким образом зависимость максимально допустимого шага по времени приведена на Фиг. 5 для шагов сетки  $h=0.5$ ,  $0.1$  и  $0.05$ .

Расчеты показывают, что условие устойчивости схемы (16) – (18) имеет вид соотношения Куранта, в котором коэффициент  $\beta$  практически не зависит от шага пространственной сетки. Из графика наглядно видна зависимость шага по времени от параметра регуляризации. Для рассмотренного примера зависимость  $\beta(\alpha)$  имеет максимум при  $\alpha_{max} = 0.3$ , что соответствует  $\beta = 0.7$ . Использование в численных расчетах значений  $\alpha > \alpha_{max}$  представляется нецелесообразным. Для малых значений коэффициента  $\alpha < 0.15$  численный алгоритм неустойчив.

Для других вычислительных задач зависимость  $\beta_{max}(\tau)$  может отличаться, но, как показывает практика численных расчетов, качественные закономерности сохраняются.

В заключение заметим, что полученное для линеаризованной задачи условие устойчивости (32) оказывается более жестким, чем условие устойчивости, реализуемое на практике.

## 5. Задача Римана о сверхсильном разрыве

Для дальнейшей демонстрации возможностей КГД алгоритма приведем решение задачи Римана о распаде разрыва с высокими перепадами плотности и давления. В качестве начальных условий зададим  $(\rho_l, u_l, p_l) = (1000, 0, 1000)$ , при  $-0.3 < x < 0$ ,  $(\rho_r, u_r, p_r) = (1, 0, 1)$  при  $0 < x < 0.7$ ,  $\gamma = 1.4$ . Расчет ведется до времени  $t_{fin} = 0.15$ . На примере решения указанной задачи в [11] проведено детальное сопоставление возможностей 8 наиболее распространенных разностных схем высоких порядков точности. В частности, рассматривались схемы типа Годунова и различные варианты схем высокого порядка точности с расщеплением и коррекцией потока.

Полученные авторами оптимальные параметры расчета этой задачи для КГД алгоритма составляют  $\alpha = 0.3$ ,  $\beta = 0.05$ . Расчет выполнен при  $Pr = 1$ ,  $Sc=1$ .

Сходимость распределений плотности и скорости по сетке для всей области расчета показана на Фиг. 6 и 7. В силу больших перепадов газодинамических параметров, области решения вблизи звуковой точки, контактного разрыва и ударной волны приведены отдельно. Фрагменты распределений плотности и скорости в левой звуковой точке показаны на Фиг. 8 и 9, те же величины в середине расчетной области изображены на Фиг. 10, 11, и в зоне ударной волны – на Фиг. 12 и 13. Из приведенных данных наглядно видна достаточно быстрая сходимость разностного решения к автоматическому при сгущении пространственной сетки.

Показательной характеристикой решения этой задачи является распре-

деление скорости в ударной волне. Из сопоставления Фиг. 13 с результатами [11], полученными на такой же пространственной сетке  $h = 0.002$ , следует, что на этой сетке КГД алгоритм близок по точности к рассмотренным в [11] разностным схемам. При этом численное решение, полученное по КГД алгоритму, располагается слева от автомодельного решения, в то время как все алгоритмы, изученные в [11], формируют профиль скорости, расположенный справа от автомодельного распределения. С уменьшением шага пространственной сетки точность КГД алгоритма резко увеличивается и превосходит точность исследуемых в [11] методов.

Полученные данные совместно с результатами [1] позволяют сделать вывод о преимуществах КГД алгоритмов при численном моделировании течений на подробных сетках, что является особенно актуальным в связи с широким использованием в настоящее время мощным вычислительных комплексов.

## **6. Задача о распространении звуковых колебаний**

Теоретический анализ и опыт использования КГД уравнений показывает, что используемые авторами численные алгоритмы, основанные на этой системе уравнений, эффективны при расчете нестационарных и пульсационных течений вязкого сжимаемого газа. Примерами расчета таких течений являются неуставливающиеся течения, возникающие при сверхзвуковом обтекании торца с выступающей иглой [12], пульсационные течения в окрестности полого цилиндра [13], колебательные течения в кавернах [14], дозвуковые течения в следе за цилиндром, или дорожка Кармана [15], а также хаотические течения за обратным уступом, моделирующие турбулентные следы в донной области [16] и в следе за препятствием [17]. Такого рода течения сопровождаются генерацией звуковых колебаний, изучение которых является актуальной задачей аэроакустики. Традиционно в таких задачах применяются специальные численные методы высокого порядка точности, например, схемы четвертого порядка точности по времени

и пространству [18], или схемы более высоких порядков, например, [19].

В силу вышесказанного представляет интерес изучение возможностей КГД алгоритма для прямого и однородного численного моделирования как генерации акустических возмущений в пульсационных или турбулентных течениях, так и распространения этих возмущений вдали от зоны их зарождения. Возможность адекватного описания распространения звуковых волн с помощью КГД-модели в акустическом приближении показана в [20].

Далее приведены результаты расчета задачи о распространении слабых звуковых колебаний, выполненные в рамках КГД алгоритма для уравнений Эйлера.

В качестве начальных условий используется невозмущенное поле течения  $\rho_0 = 1$ ,  $p_0 = 1$ ,  $u_0 = 0$ . Скорость распространения возмущения составляет  $c_0 = \sqrt{\gamma}$ .

Пусть граничное условие на левой границе области имеет вид гармонического возмущения

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= -\frac{A_0}{\sqrt{\gamma}} \sin(2\pi c_0 t / \lambda), \\ \rho(t, 0) &= 1 - A_0 \sin(2\pi c_0 t / \lambda), \quad p(t, 0) = 1 - A_0 \sin(2\pi c_0 t / \lambda). \end{aligned} \quad (37)$$

На правой границе области зададим мягкие граничные условия, или условия сноса  $\partial f / \partial x = 0$ , где  $f = (\rho, u, p)$ . Длина волны звукового возмущения выбирается равной  $\lambda = 20$ , амплитуда  $A_0$  варьируется от 0.1 до 0.005. Параметрами расчета являются значения  $\alpha = 0.2$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\text{Pr}=1$ . Для определенности выбрано  $\gamma = 7/5$ .

На Рис. 14 показаны результаты расчета этой задачи для малого возмущения, амплитуда которого составляет  $A_0=0.005$ , в зависимости от величины вязкости, то есть для значений  $\text{Sc}=1$  – линия 1,  $\text{Sc}=0.1$  – линия 2 и  $\text{Sc} = 0$  – линия 3. Последнее соответствует невязкому течению. Расчеты выполнены на сетке с шагом  $h=0.5$ . Увеличение коэффициентов вязкости и теплопроводности (увеличение числа  $\text{Sc}$ ) приводит к росту затухания амплитуды колебаний. Однако частота колебаний при этом не искажается.

Влияние шага пространственной сетки на решение задачи показано на Рис. 15, где приведены фрагменты распределения плотности на момент времени  $t = 700$  для  $Sc=0$ . Видно, что затухание амплитуды волны растет с ростом шага пространственной сетки. В расчетах на подробных сетках  $h = 0.5$  и  $0.25$  наблюдается искажение формы исходного возмущения, что представляется естественным при описании распространения волны в рамках уравнений Эйлера [21]. Из сравнения приведенных рисунков видно, что фазовая ошибка не зависит от величины вязкости, определяемой числом  $Sc$ , но зависит от величины шага сетки  $h$ .

Оценить затухание звуковых колебаний плотности на больших расстояниях от источника позволяет Рис. 16. Расчет выполнен при  $Sc=0.01$  на сетке с шагом  $h = 0.5$  до расстояния по  $x$ , которое составляет порядка 500 длин волны и соответствует времени  $t = 8000$ .

Результаты проведенных расчетов показывают, КГД алгоритмы, являющиеся схемами первого порядка точности по времени и пространству, позволяют моделировать распространение звуковых возмущений, в том числе и на больших расстояниях от источника. Последнее делает перспективным использование этого алгоритма в задачах аэроакустики.

## 7. Оценка вычислительной сложности алгоритма

Время работы процессора является важной характеристикой при выборе метода численного решения конкретной задачи. Однако прямое сопоставление времени счета одной и той же задачи, реализованной с помощью разных численных алгоритмов, часто не проясняет ситуации, что обусловлено многообразием используемых процессорных элементов, операционных систем, оптимизирующих программ, а также уровнем оптимизации программируемых формул самим программистом. Поэтому оценка вычислительной сложности алгоритма и ее сопоставление с аналогичной характеристикой альтернативных численных подходов является важным аспектом при выборе того или иного метода вычисления.

Объективной характеристикой вычислительной сложности метода является число арифметических операций и время на передачу данных из памяти для их выполнения. Именно по таким данным проводятся оценки абсолютной производительности современных вычислительных комплексов, включающих как однопроцессорные одноядерные вычислительные модули, так и многопроцессорные многоядерные вычислители. Соответствующие оценки для сравнения разных алгоритмов можно выполнить и не прибегая к численной реализации метода.

Вычислительный элемент можно схематически представить как совокупность оперативной памяти (ОП), быстрой памяти (КЭШ) и самого процессорного элемента (ПЭ). Характерные данные, определяющие скорость работы современных вычислительных элементов, приведены, например, в [22] и цитированных в этой работе источниках.

Согласно современным представлениям, за один временной такт работы ПЭ выполняется от одной до четырех арифметических операций сложения/вычитания, умножения или деления. Скорость передачи слова между ПЭ и КЭШ составляет порядка 15 тактов. Время подготовки передачи одного слова из ОП в КЭШ, или так называемая латентность, составляет  $\sim 1000$  тактов. Скорость передачи данных между ОП и ПЭ в случае, если эти данные выбираются не случайным образом, а в виде заранее подготовленной последовательности или массива, близка к скорости передачи слова между ПЭ и КЭШ.

В алгоритмах расчета газодинамических течений на регулярных сетках данные расположены в памяти регулярно, передаются для обработки большими массивами, и время латентности памяти не ограничивает производительность процессора. При этом если время обработки одного слова в ПЭ превосходит время его выборки из КЭШ, то есть превосходит 15 тактов, то число арифметических операций, приходящихся на одну расчетную точку, непосредственно определяет время работы процессора. На основе оценки указанных величин удастся сопоставить вычислительную сложность раз-

ных алгоритмов.

При оценке вычислительной сложности КГД алгоритма принята следующая модель: учитываются арифметические операции сложение/вычитание, умножение, деление и извлечение квадратного корня, осуществляемые в формулах (16) – (27), то есть операции, составляющие непосредственное содержание данного математического алгоритма. Эти операции учитываются напрямую, без оптимизации. Операции, связанные с индексацией переменных, и другие вспомогательные операции не учитываются.

Рассмотрим решение первого уравнения – вычисление значения плотности  $\rho_i$  на новом слое: вычисление величины  $w_{i+1/2}$  (19), которая представляет собой добавку к скорости  $u_{i+1/2}$ , требует 3 операции сложения, 6 умножений и 1 деление; вычисление значения  $\tau_{i+1/2}$  (15) - одно умножение, одно деление и одно извлечение корня. Вычисление  $j_{mi+1/2}$  (20) требует одно сложение и одно умножение. Вычисление плотности на новом временном слое  $\hat{\rho}_i$  (16) требует два сложения, одно умножение и одно деление. Тем самым весь алгоритм нахождения плотности в одной точке сетки на новом слое требует 10 сложений, 17 умножений, 5 деления и 2 вычисления квадратного корня, то есть всего 34 операции, или такта работы ПЭ.

Для вычисления величины  $\Pi_{i+1/2}$  (21) – (25) требуется 9 сложений, 13 умножений и 5 делений. То есть вычисление нового значения  $\widehat{\rho_i u_i}$  (17) требует 24 сложения, 30 умножений и 10 делений - всего 64 такта работы ПЭ.

При решении третьего уравнения (18) вычисление теплового потока  $q_{i+1/2}$  (26), (27) требует 14 сложений, 18 умножения и 20 деления. Расчет полной энергии на новом слое в точке  $i$  требует 22 сложения, 23 умножения и 22 деления - всего 67 тактов.

Тем самым весь алгоритм для трех уравнений в точке (16) – (18) требует 60 сложений, 70 умножений, 41 делений и 2 вычисления квадратного корня, и расчет одного шага по времени для одной пространственной точки занимает около 180 такта работы ПЭ. Если полагать, что за один такт выполняется четыре арифметических операции, то эта цифра уменьшается



в 4 раза. Однако при расчете последовательности точек объем вычислений сокращается в 2 раза если учесть, что все потоки для точки  $i + 1/2$  вычисляется два раза - это поток справа при расчете точки  $i$  и поток слева при расчете точки  $i + 1$ . Оптимизация вычислительных формул на уровне написания программы позволяет уменьшить полученную цифру. В основном вычислительном цикле алгоритма отсутствуют логические операции, операции с удаленными точками шаблона и операции выбора одиночных слов из ОП, которые могли бы сильно замедлить работу вычислительного элемента в целом.

В КГД алгоритме при вычислении значения переменной на новом слое в точке  $i$  все перечисленные операции совершаются на основе четырех переменных  $u$ ,  $\rho$ ,  $p$  и  $E$ , с использованием трехточечного шаблона – значений этих переменных в точках  $i - 1$ ,  $i$  и  $i + 1$ . При вычислении следующей  $i + 1$  точки достаточно извлечь из памяти только 4 новых значения в точке  $i + 2$ , так как значения в точках  $i$  и  $i + 1$  уже известны. Время их извлечения из памяти составляет  $4 \times 15 = 60$  тактов, что не превышает времени перехода на следующий временной слой, составляющее  $\sim 90$  тактов. Две эти величины определяют вычислительную сложность КГД алгоритма.

Таким образом, время подкачки одного слова из КЭШ памяти близко к времени его обработки в ПЭ, что делает КГД алгоритм эффективным с точки зрения скорости работы вычислительного элемента.

Близкие соотношения времени подкачки данных из памяти и их обработки в процессоре получаются для КГД алгоритмов в 3Д формулировке, а также для реализации этого метода на неструктурированных сетках.

## **Заключение**

Результаты численного моделирования задачи о распаде разрыва показывают, что в области гладких решений реальный порядок точности КГД алгоритма колеблется от 0.5 до 2 в зависимости от локальных свойств решения. Искусственная диссипация, присущая КГД алгоритму решения урав-

нений Эйлера, автоматически адаптируется к решению и близка к нулю в тех областях, где искомое решение не имеет особенностей.

Расчеты показывают, что КГД алгоритм представляет собой условно устойчивую разностную схему с условием устойчивости Куранта. Основные параметры настройки алгоритма – это численный коэффициент  $\alpha$ , входящий в параметр регуляризации  $\tau$ , и коэффициент  $\beta$ , определяющий шаг по времени. При этом зависимость  $\beta(\alpha)$  имеет экстремум, соответствующий оптимальному для проведения расчетов шагу по времени.

Представленные расчеты задачи о распаде сверхсильного разрыва демонстрируют монотонную сходимость численного решения к автомоделльному при сгущении пространственной сетки. Показано, что точность КГД алгоритма на подробных сетках превосходит точность решения этой задачи, достигнутую на таких же сетках с помощью методов коррекции или расщепления потоков высокого порядка точности.

Моделирование задачи о распространении слабых возмущений показывает, что при использовании достаточно подробных сеток КГД алгоритм позволяет рассчитывать сотни периодов гармонического колебания. Тем самым этот алгоритм представляется перспективным для использования в задачах акустики наравне со схемами высоких порядков точности.

Проведенные оценки вычислительной сложности метода показывают, что сбалансированное соотношение времени выполнения арифметических операций и времени извлечения данных из памяти в расчете на один узел сетки обеспечивают высокую вычислительную эффективность метода при его реализации на современных вычислительных системах.

Полученные в работе оценки точности, устойчивости и вычислительной сложности КГД алгоритма, выполненные для одномерных примеров, являются ориентирами при выполнении практических расчетов многомерных задач на сетках различной структуры.

## Список литературы

- [1] Елизарова Т.Г., Шильников Е.В. Возможности квазигазодинамического алгоритма для численного моделирования течений невязкого газа// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т.49, No 3. С.549 - 566.
- [2] *Шеретов Ю.В.* Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. Тверь: Тверской гос. Ун-т, 2000.
- [3] *Елизарова Т.Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
- [4] *Четверушкин Б.Н.* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: Макс Пресс, 2004.
- [5] Елизарова Т.Г., Хохлов А.А. Квазигазодинамические уравнения для течений газа с внешними источниками тепла// Вестник Московского университета, серия 3. Физика, Астрономия, 2007, N 3, С.10–13.
- [6] Шеретов Ю.В. О разностных аппроксимациях квазигазодинамических уравнений для осесимметричных течений. Сб: Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. Ун-т, 2001, С. 191 – 207.
- [7] Шеретов Ю.В. Анализ устойчивости модифицированной кинетически-согласованной разностной схемы в акустическом приближении. Сб: Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. Ун-т, 2004, С. 147 – 160.
- [8] *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [9] *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978.
- [10] *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.

- [11] Tang H., Liu T. A note on the conservative schemes for Euler equations // J. of Comput. Physics, 2006, N 218, P.451 – 459.
- [12] Антонов А.Н., Елизарова Т.Г., Павлов А.Н., Четверушкин Б.Н. Математическое моделирование колебательных режимов при обтекании тела с иглой// Ж. Математическое моделирование, 1989, Т.1, №1, С.14-23.
- [13] Антонов А.Н., Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н., Шеретов Ю.В. Численное моделирование пульсационных режимов при сверхзвуковом обтекании полого цилиндра// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т.30, No 4. С.548 - 556.
- [14] Антонов М.А., Граур И.А., Косарев Л.В., Четверушкин Б.Н. Численное моделирование пульсаций давления в трехмерных выемках// Ж. Математическое моделирование, 1996, Т.8, №5, С. 76–90.
- [15] Elizarova T.G., Khokhlov A.A., Sheretov Yu.V. Quasi-gasdynamical numerical algorithm for gas flow simulations// Intern. J. for Numer. Meth.in Fluids. 2008, V.56, N 8, P.1209-1215.
- [16] Елизарова Т.Г., Никольский П.Н. Численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода в течении за обратным уступом// Вестник Московского университета, серия 3. Физика. Астрономия, 2007, No 4, С.14-17.
- [17] Четверушкин Б.Н., Шильников Е.В. Вычислительный и программный инструментарий для моделирования трехмерных течений вязкого газа на многопроцессорных системах// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т.48, No 2. С.118 - 129.
- [18] Tam C.K.W., Webb J.C. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics// Journal of Computational Physics, 1993, V.107, P.262 – 281.

- [19] Абалакин И.В., Козубская Т.К. Многопараметрическое семейство схем повышенной точности для линейного уравнения переноса// Ж. Математическое моделирование, 2007, Т.19, № 7, С. 56-66.
- [20] Шеретов Ю.В. Анализ задачи о распространении звука для линеаризованных КГД-систем. Сб: Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. Ун-т, 2001, С. 178 – 191.
- [21] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
- [22] Williams S., Shalf J., Olikier L., Kamil S., Husbands P., Yelick K. Scientific computing kernels on the Cell processor// International Journal of Parallel Programming, 2007, V.35, No 3, P.263–298.

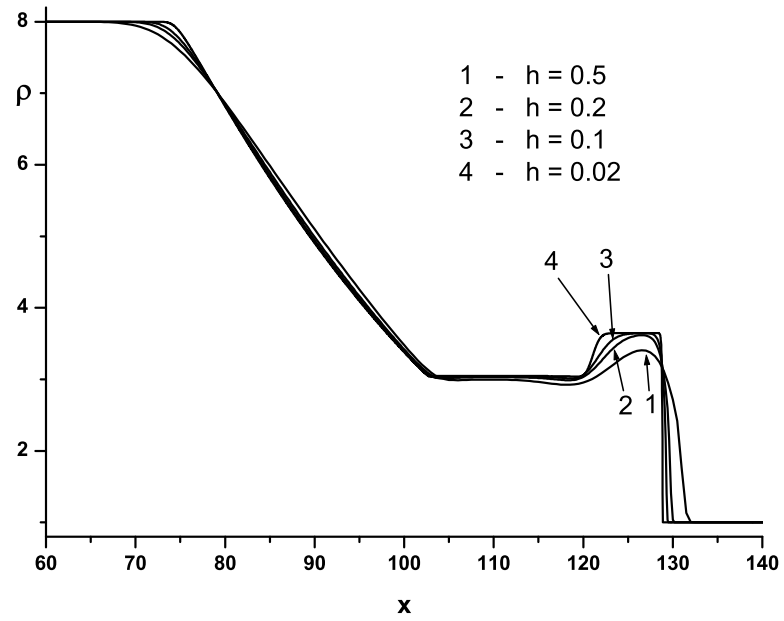


Рис. 1: Распределение плотности  $\rho$  в задаче о распаде разрыва.

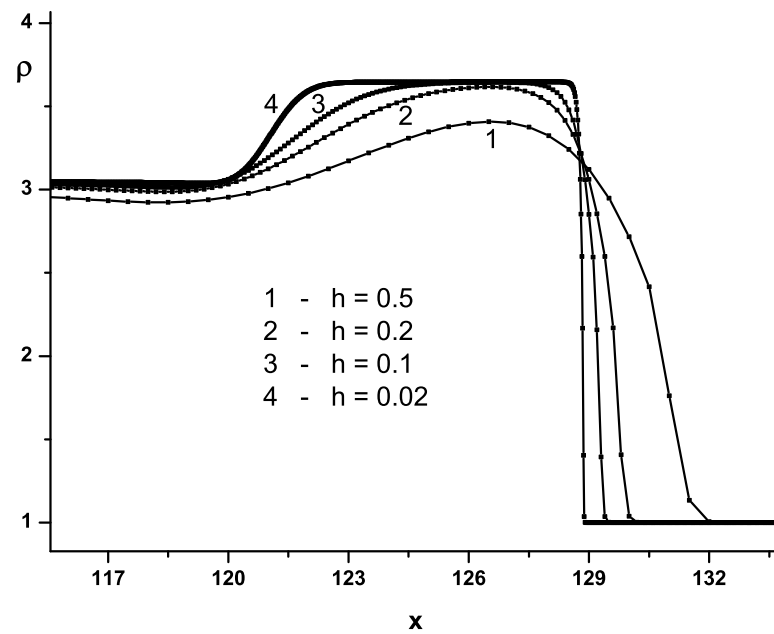


Рис. 2: Распределение плотности  $\rho$  в задаче о распаде разрыва. Фрагмент.

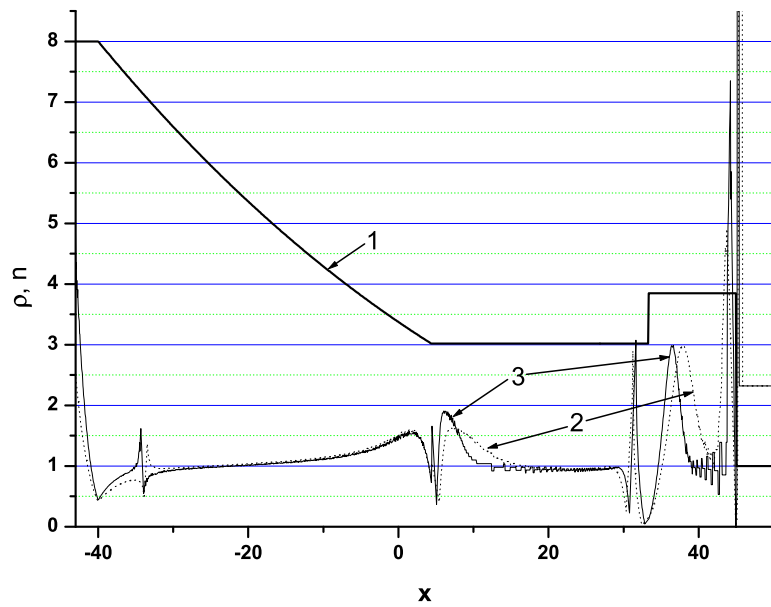


Рис. 3: Распределение плотности  $\rho$  (линия 1) и порядок точности  $n$  (линии 2 и 3).

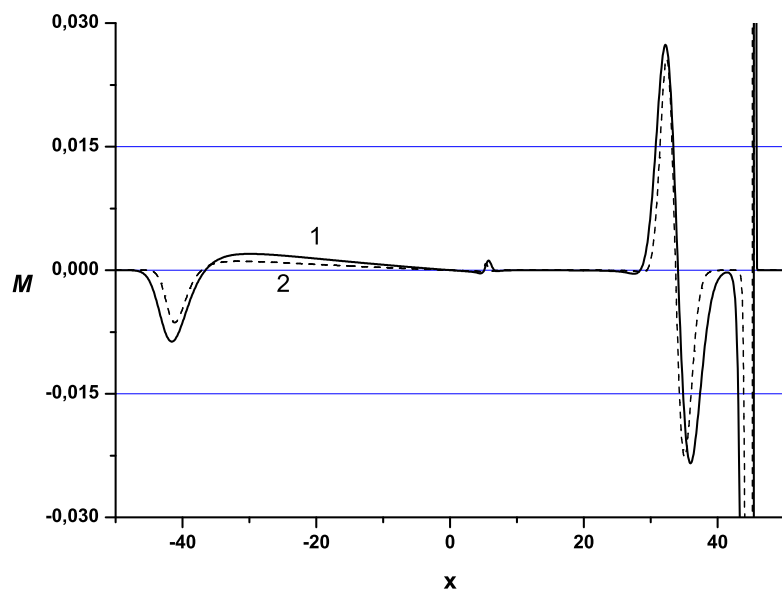


Рис. 4: Распределение добавки  $M_i$  к плотности. Сетки  $h = 0.05$  (линия 1) и  $0.025$  (линия 2).

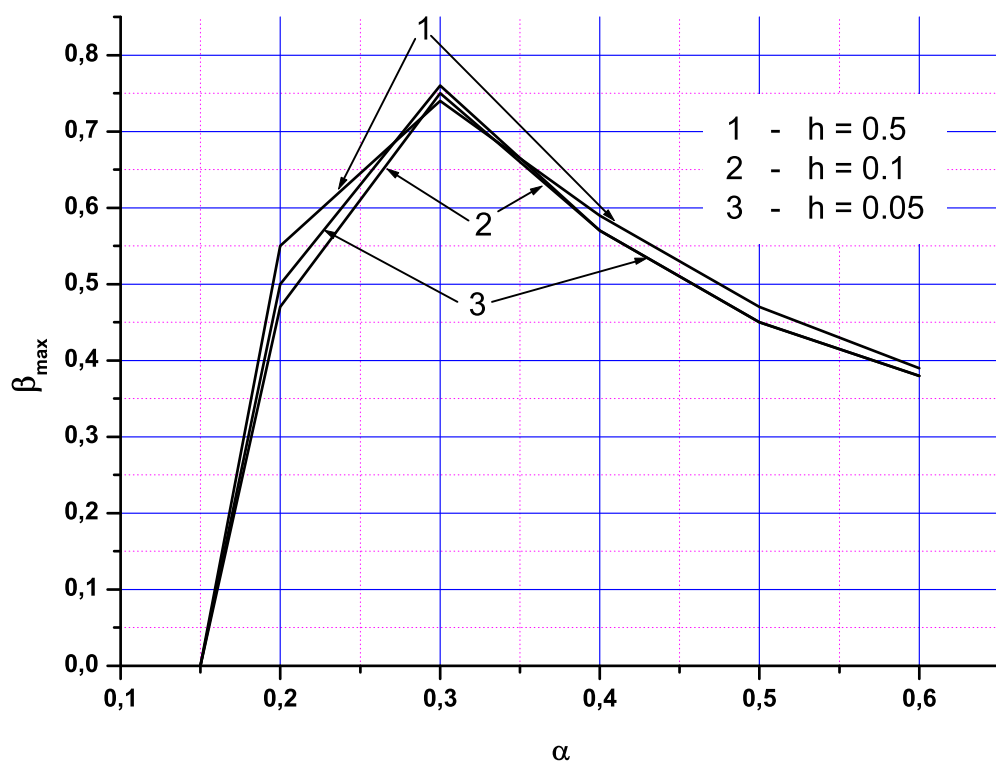


Рис. 5: Зависимость шага по времени ( $\beta_{max}$ ) от параметра регуляризации ( $\alpha$ ) для задачи о распаде разрыва.



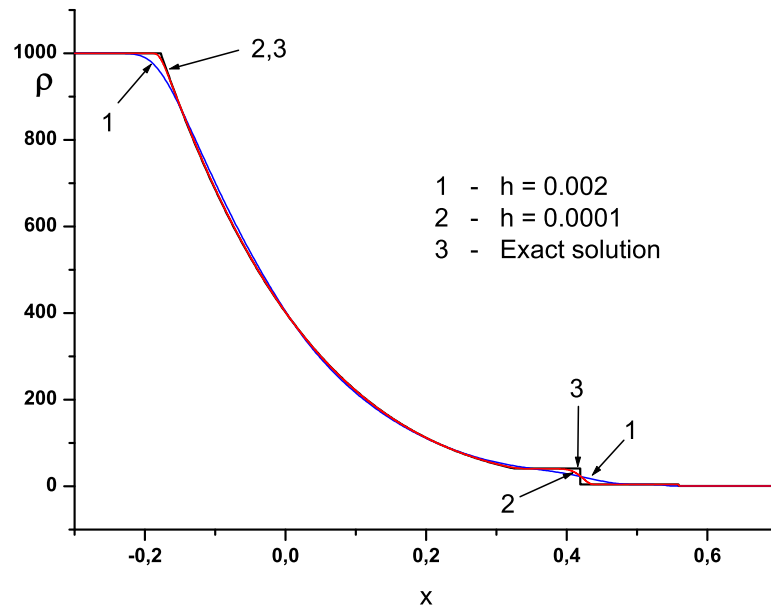


Рис. 6: Распределение плотности  $\rho$ . Сходимость решения по сетке.

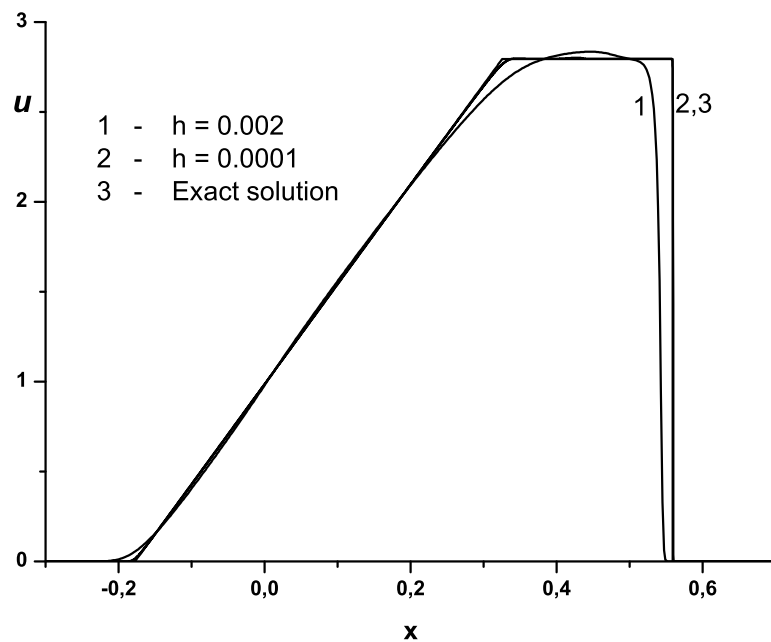


Рис. 7: Распределение скорости  $u$ . Сходимость решения по сетке.

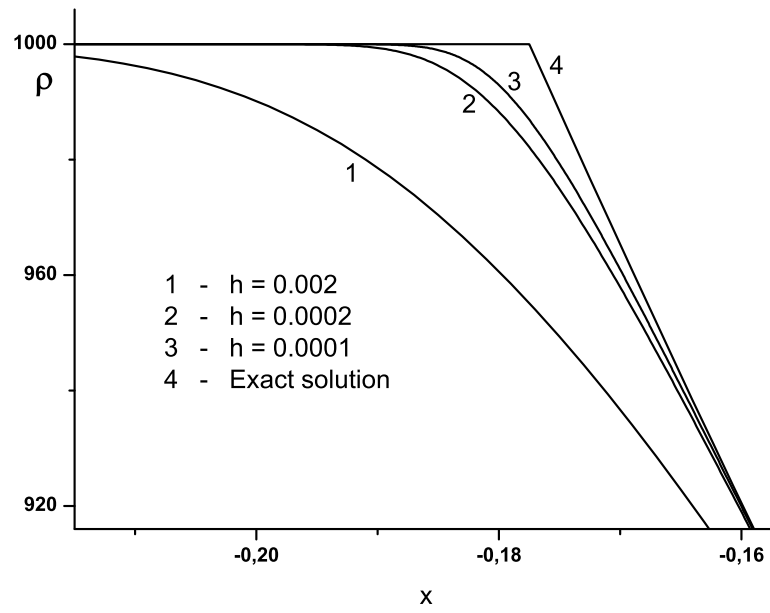


Рис. 8: Фрагмент распределения плотности  $\rho$  вблизи левой звуковой точки. Сходимость решения по сетке.

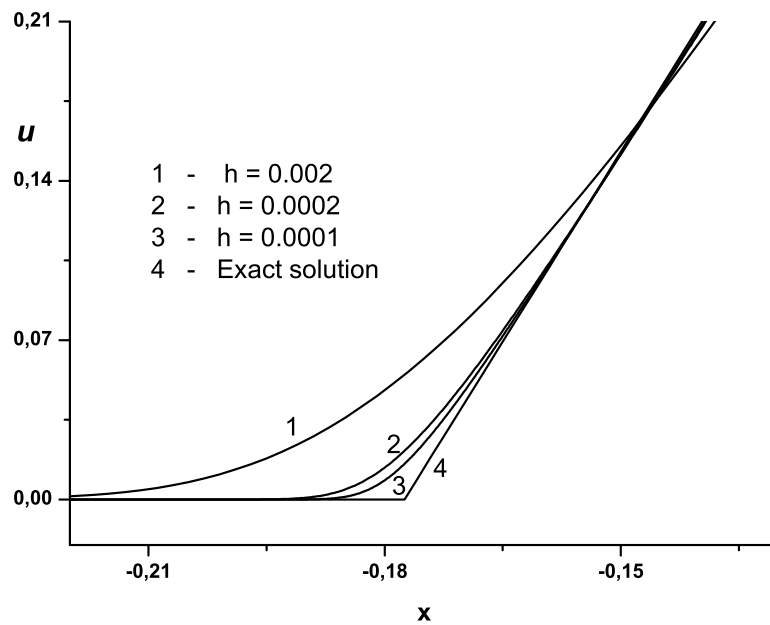


Рис. 9: Фрагмент распределения скорости  $u$  вблизи левой звуковой точки. Сходимость решения по сетке.

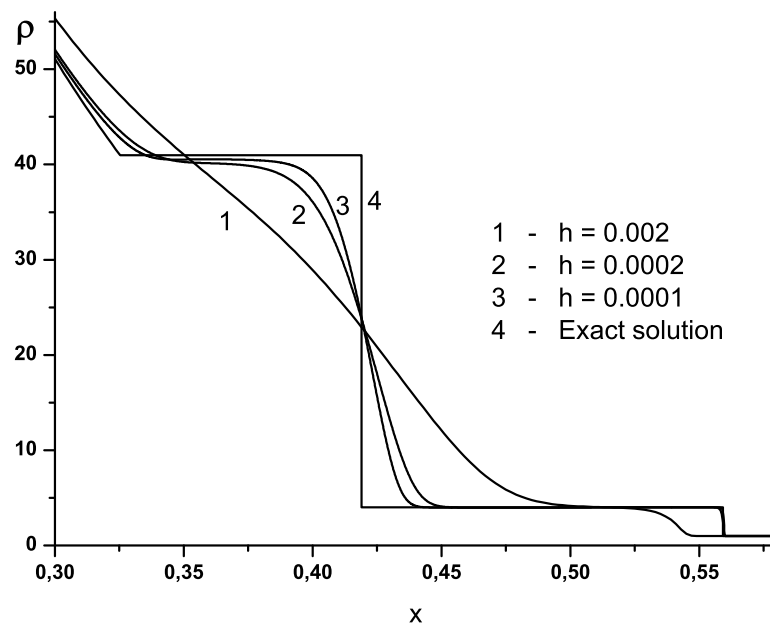


Рис. 10: Фрагмент распределения плотности  $\rho$  в центре области. Сходимость решения по сетке.

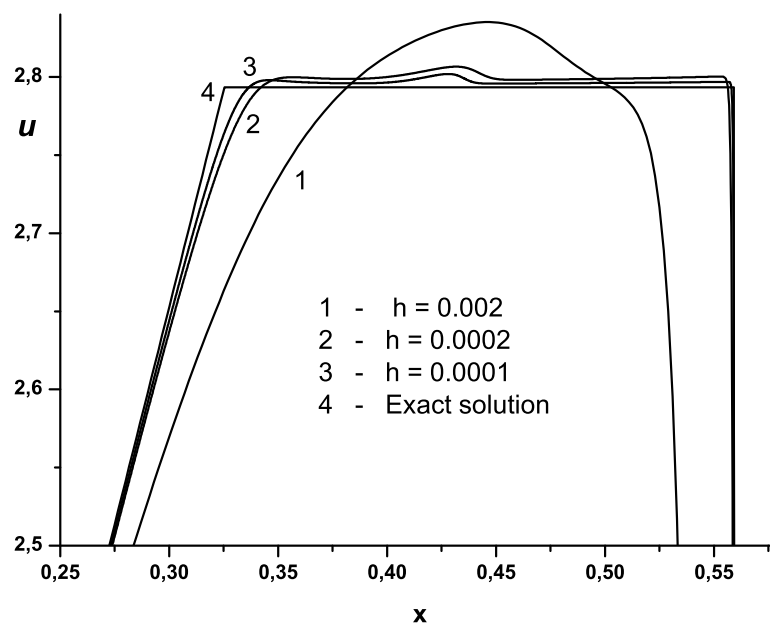


Рис. 11: Фрагмент распределения скорости  $u$  в центре области. Сходимость решения по сетке.

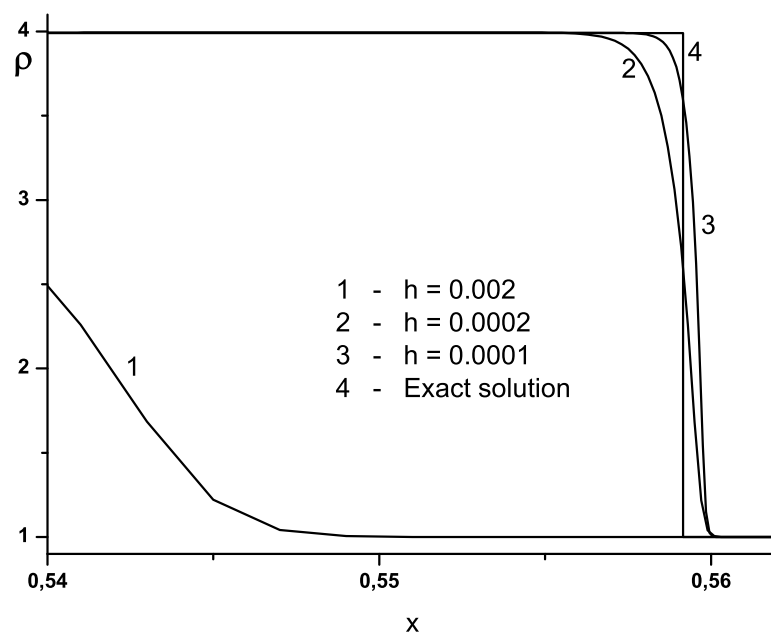


Рис. 12: Фрагмент распределения плотности  $\rho$  на ударной волне. Сходимость решения по сетке.

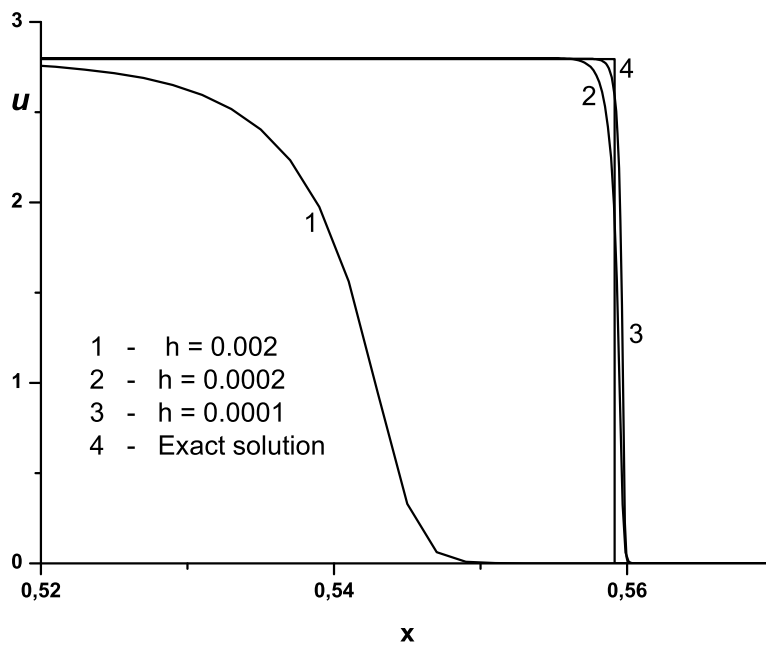


Рис. 13: Фрагмент распределения скорости  $u$  на ударной волне. Сходимость решения по сетке.

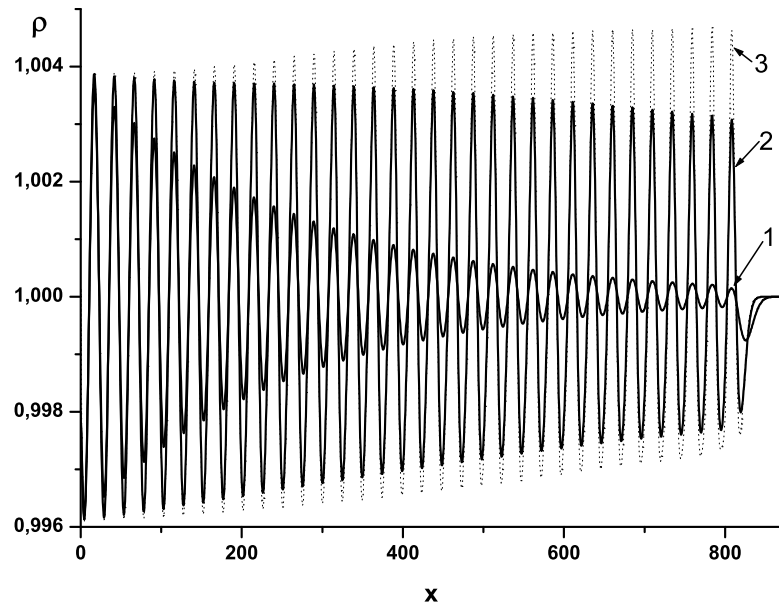


Рис. 14: Распространение звукового возмущения, амплитуда  $A_0=0.005$ .  $h = 0.5$ ,  $t = 700$ .  
Зависимость затухания от коэффициента вязкости.  $Sc=1$  (1),  $Sc=0.1$  (2),  $Sc=0$  (3).

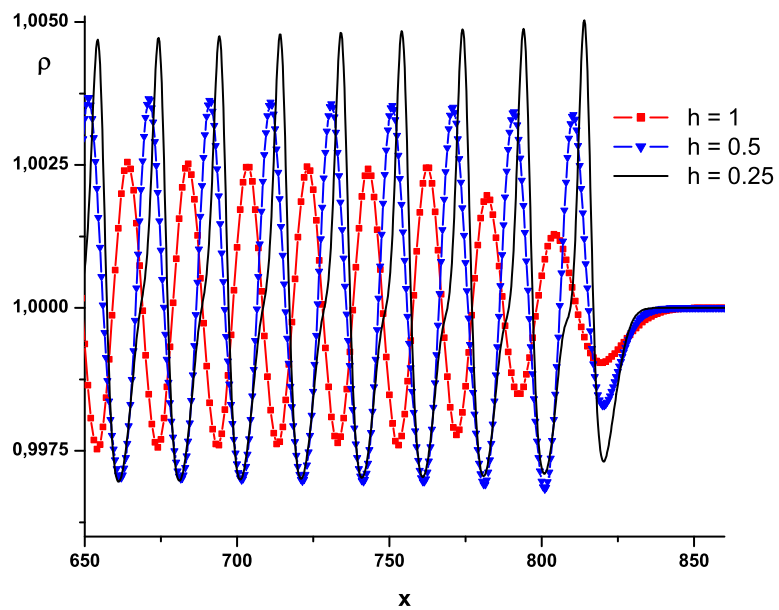


Рис. 15: Распространение звукового возмущения (плотность) на момент времени  $t = 700$ . Зависимость от шага пространственной сетки, фрагмент.  $A = 0.005$ ,  $Sc = 0$ .

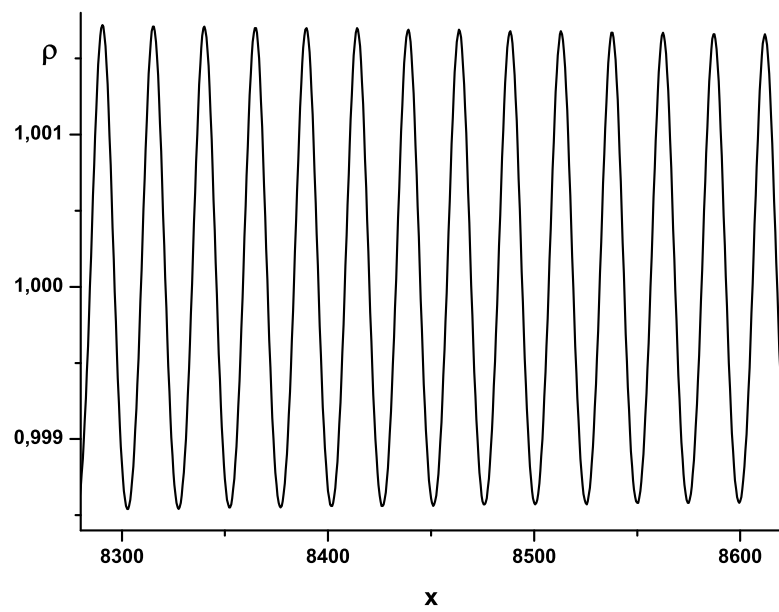


Рис. 16: Распространение звукового возмущения на момент времени  $t = 8000$ ,  $A = 0.01$ ,  $Sc = 0.01$ ,  $h = 0.5$ , фрагмент.