

Регуляризованные уравнения мелкой воды

Т. Г. Елизарова^{1,2,a}, М. В. Афанасьева²

¹Институт математического моделирования РАН. Россия, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4а.

²Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра нейтронографии. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

E-mail: ^atelizar@mail.ru

Статья поступила 22.07.2009, подписана в печать 13.10.2009

На основе регуляризованных уравнений Навье–Стокса строятся регуляризованные уравнения в приближении мелкой воды и предлагается алгоритм их численного решения. Работоспособность предложенной модели изучается на примере численного решения задачи Римана о распаде разрыва.

Ключевые слова: регуляризация, квазигидродинамические уравнения, уравнения мелкой воды, метод численного решения.

УДК: 517.958:533.7. PACS: 47.11.Df; 47.40.Dc.

Введение

Движение несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в поле тяжести может быть описано в приближении мелкой воды (уравнения Сен-Венана). Данное приближение строится в предположении, что глубина жидкости мала по сравнению с характерными размерами задачи, например неровностями дна водоема. В этом случае поперечной (вертикальной) компонентой скорости можно пренебречь по сравнению с составляющими скорости вдоль слоя (горизонтальные компоненты скорости) и полагать продольную скорость постоянной вдоль толщины слоя. В этом приближении жидкость описывается как среда, обладающая в момент времени t в точке (x, y) скоростью $\mathbf{u}(x, y, t)$ и толщиной слоя $h(x, y, t)$.

Соответствующие математические модели широко используются для расчета задач, представляющих как академический, так и практический интерес. К последним относится моделирование течений в относительно неглубоких водоемах, реках, водохранилищах, течений вблизи побережья морей и океанов, расчет волн цунами и сброса вод вблизи гидроэлектростанций, а также множество других задач, непосредственно связанных с проблемами экологии. Важность указанной тематики подтверждается большим числом научных статей и конференций, посвященных теории и приложениям уравнений мелкой воды. Способы получения указанной системы уравнений и ее исследования в различных приближениях приведены, например, в [1–5]. Изучение уравнений типа мелкой воды для многослойных течений изложено в книге [6].

По своей природе уравнения мелкой воды тесно связаны с уравнениями динамики газа и могут быть выведены из этих уравнений, записанных в приближении Эйлера, при использовании ряда специальных предположений. Численные алгоритмы решения уравнений мелкой воды разнообразны и достаточно сложны. В настоящей работе предлагаются регуляризованные уравнения мелкой воды, которые допускают простой и эффективный метод численного решения. Устойчивость решения обеспечивается регуляризирующими добавками.

Регуляризованные уравнения мелкой воды построены на основе нового класса уравнений динамики газа, в основе которого лежит учет пространственно-временного осреднения при определении основных газодинамических величин — плотности, скорости и давления. Упомянутые уравнения отличаются от уравнений Навье–Стокса и Эйлера дополнительными диссипативными слагаемыми, которые выполняют роль регуляризаторов и обеспечивают устойчивость и точность соответствующих численных алгоритмов.

Система уравнений мелкой воды

В [2–5, 7] проводится аналогия между системой уравнений мелкой воды и уравнениями Эйлера, описывающими невязкие газодинамические течения. Рассмотрим эту аналогию на простом примере.

Согласно [7], система уравнений мелкой воды для плоского одномерного течения в отсутствие внешних сил имеет вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial u^2 h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh^2}{2} \right) + gh \frac{\partial b}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Неизвестными величинами являются $h(x, t)$ — высота уровня жидкости и $u(x, t)$ — ее скорость. Известная величина $b(x)$ определяет отметку рельефа дна, g — ускорение свободного падения (рис. 1).

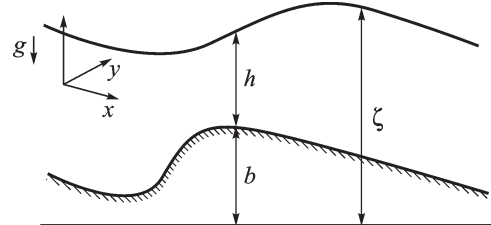


Рис. 1. Обозначения для уравнений мелкой воды

Выпишем уравнения неразрывности и импульса системы уравнений Эйлера для плоского одномерного течения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Здесь неизвестными величинами являются $\rho(x, t)$ — плотность газа, $u(x, t)$ — скорость и $p(x, t)$ — давление, которое вычисляется с помощью уравнения состояния.

Как нетрудно видеть, вводя в системе уравнений (3), (4) замену

$$\rho = h, \quad p = gh^2/2, \quad (5)$$

мы получаем уравнения мелкой воды (1), (2) для течения над плоским рельефом, т. е. течения при $b = \text{const}$.

В модели мелкой воды аналогом числа Маха Ma в газовой динамике $Ma = u/c$, где $c = \sqrt{\gamma RT}$ — скорость звука в газе, является число Фруда $Fr = u/c$. При этом скорость распространения малых возмущений вычисляется как $c = \sqrt{gh}$.

Регуляризованные уравнения мелкой воды

Выпишем систему уравнений газовой динамики с учетом пространственно-временного осреднения. В качестве такой системы возьмем систему квазигидродинамических (КГД) уравнений Шеретова [11, 13], которая в традиционных обозначениях имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} j_m = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(j_m \otimes u) + \nabla p = \text{div} \Pi, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \text{div} \left[j_m \left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right] + \text{div} q = \text{div}(\Pi \cdot u). \quad (8)$$

Здесь вектор плотности потока массы и тензор вязких напряжений вычисляются как

$$j_m = \rho(u - w), \quad w = \frac{\tau}{\rho} [\rho(u \cdot \nabla)u + \nabla p], \quad (9)$$

$$\Pi = \Pi_{NS} + \rho u \otimes w, \quad (10)$$

где Π_{NS} — тензор вязких напряжений Навье–Стокса, q — тепловой поток, τ — параметр регуляризации, который имеет размерность времени. Слагаемые с коэффициентом τ можно рассматривать как регуляризирующие добавки к уравнениям Навье–Стокса.

Для плоского одномерного течения невязкого газа первые два уравнения системы Шеретова (6)–(10) имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_m}{\partial x} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial j_m u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \rho u w}{\partial x}, \quad (12)$$

где

$$j_m = \rho(u - w), \quad w = \frac{\tau}{\rho} \left(\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} \right). \quad (13)$$

По аналогии с классическим подходом, выполняя в системе уравнений (11)–(13) формальную замену (5) и вводя слагаемое, учитывающее профиль подстилающей поверхности, получим систему уравнений мелкой воды с регуляризатором

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial j_m}{\partial x} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial j_m u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh^2}{2} \right) + gh \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial huw}{\partial x}, \quad (15)$$

где

$$j_m = h(u - w), \quad w = \tau \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{\partial b}{\partial x} \right). \quad (16)$$

Исключая в (14), (15) величину j_m (16), приходим к системе уравнений

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} = \frac{\partial wh}{\partial x}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial u^2 h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh^2}{2} \right) + gh \frac{\partial b}{\partial x} = 2 \frac{\partial huw}{\partial x}, \quad (18)$$

где

$$w = \tau \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{\partial b}{\partial x} \right). \quad (19)$$

При $\tau = 0$ система уравнений (17)–(19) переходит в классическую систему уравнений мелкой воды (1), (2). Можно показать, что для стационарных течений добавки имеют порядок $O(\tau^2)$. При проведении численных расчетов слагаемые с коэффициентом τ рассматриваются как регуляризирующие добавки.

По аналогии с приведенным выводом, используя систему уравнений, приведенные в [7] и [13], можно выписать регуляризованную систему уравнений мелкой воды в отсутствие внешних сил и сил трения для плоского двумерного течения. Регуляризованные уравнения мелкой воды с учетом внешних воздействий — ветра, силы Кориолиса, трения о дно и других эффектов — можно получить, рассматривая законы сохранения массы и импульса для малого, но конечного неподвижного объема. Этот способ для построения КГД систем изложен в [11, 13].

Численный алгоритм и результаты расчетов

Обзор современных численных алгоритмов решения системы уравнений мелкой воды изложен в [7–10] и цитированной в этих работах литературе.

По аналогии с алгоритмами, разработанными для квазигазодинамических уравнений, для численного решения регуляризованных уравнений мелкой воды будем использовать явную по времени разностную схему с аппроксимацией всех пространственных производных центральными разностями. Разностные схемы такого типа показали свою высокую эффективность и точность при расчете течений вязкого сжимаемого газа (см., напр., [11–13]). Значения искомых переменных $h(x, t)$ и $u(x, t)$ определим в узлах пространственной сетки. Устойчивость численного алгоритма обеспечивается слагаемыми с коэффициентом τ , величина которого связывается с шагом пространственной сетки h_x и вычисляется в виде

$$\tau = \alpha \frac{h_x}{c}, \quad c = \sqrt{gh}, \quad (20)$$

где $0 < \alpha < 1$ — численный коэффициент, выбираемый из условий точности и устойчивости счета. Условие устойчивости имеет вид условия Куранта, где шаг по времени выбирается как

$$\Delta t = \beta h_x / c. \quad (21)$$

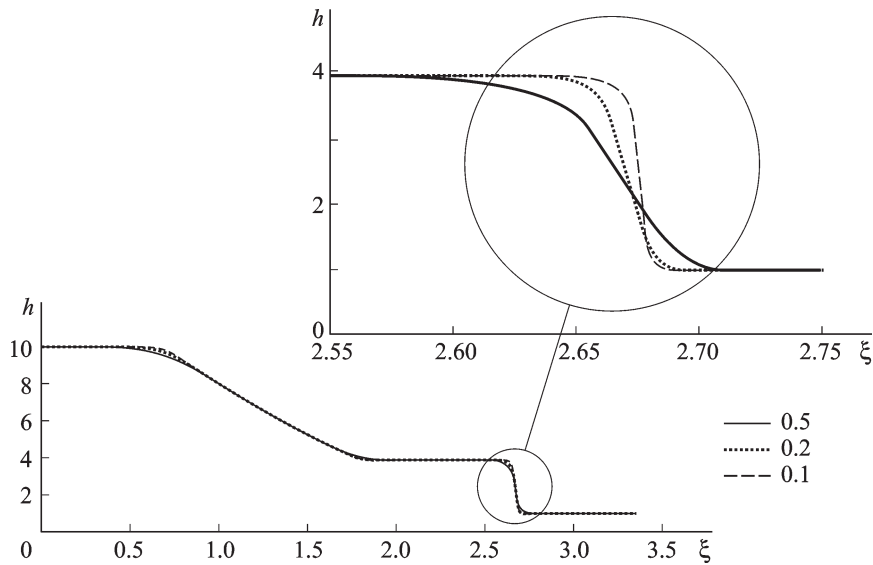


Рис. 2. Сходимость по сетке, высота уровня жидкости $h(\xi)$. Фрагмент графика показан в увеличенном масштабе

Здесь коэффициент $0 < \beta < 1$ зависит от величины параметра регуляризации τ и подбирается в процессе вычислений для обеспечения монотонности численного решения.

Для проверки работоспособности метода выбрано решение задачи Римана, которая представляет собой начально-краевую задачу о распаде разрыва. Эта задача использовалась в [7] и [9] для тестирования численных методов решения уравнений мелкой воды на основе разностных алгоритмов типа схем Годунова первого и второго порядка точности.

Рассмотрим плоское одномерное течение жидкости в канале длины L с плоским дном $b = \text{const}$. В начальный момент в центре области задается разрыв уровня воды, разделяющий два однородных состояния с высотой уровня $h = h_l$ слева от разрыва и $h = h_r$ справа от разрыва. В начальный момент времени справа и слева от разрыва жидкость неподвижна, $u_l = u_r = 0$. В соответствии с [7] и [9] $L = 100$ м, $h_l = 10$ м, $h_r = 1$ м. Расчет ведется до времени $T_f = 2$ с.

В расчетах использовались равномерные пространственные сетки. Для удобства уравнения были приведены к безразмерному виду с использованием величин h_r и $\sqrt{gh_r}$, где $g = 9.8$ м/с².

На рис. 2 представлены профили высоты жидкости $h(x)$, полученные на последовательности равномерных пространственных сеток с шагами $h_x = 0.1, 0.2$ и 0.5 , параметр регуляризации (20) вычисляется при $\alpha = 0.5$, шаг по времени (21) соответствует $\beta = 0.3$. Для сопоставления с данными [7] результаты приведены в виде зависимости $h(\xi)$, где $\xi = x/(t\sqrt{gh_l})$ – автомодельная переменная. Графики демонстрируют быструю и монотонную сходимость численного решения к автомодельному решению при сгущении пространственной сетки. На рис. 3 приведено распределение скорости $u(x)$ на сетке $h_x = 0.5$.

Устойчивость численного решения обеспечивается регуляризирующими τ -добавками. При вычислении параметра регуляризации τ (20) имеется один свободный параметр – численный коэффициент $0 < \alpha < 1$,

рис. 4 демонстрирует зависимость шага по времени (коэффициент β) от значения параметра регуляризации (коэффициент α), обеспечивающую устойчивое решение задачи. Здесь β_{max} соответствует случаю, когда осцилляции в профиле скорости составляют 1–3% от значения скорости в соответствующей точке, точки β_{dist} соответствуют критерию 10–12%. Заметим, что в рассматриваемой задаче скорость $u(x, t)$ является более чувствительной характеристикой, чем высота слоя жидкости $h(x, t)$.

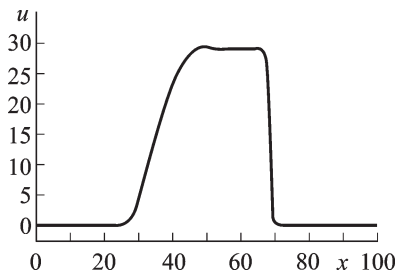


Рис. 3. Распределение скорости $u(x)$, расчет на сетке с шагом $h_x = 0.5$

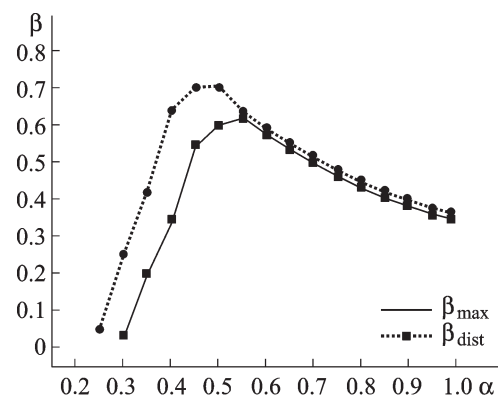


Рис. 4. Устойчивость метода в зависимости от величины параметра регуляризации

Данные по устойчивости, полученные для сеток $h_x = 0.1, 0.2$ и 0.5 , практически совпадают, что подтверждает справедливость условия Куранта (20) для рассмотренного алгоритма и наличие оптимального значения параметра регуляризации, соответствующего $\alpha \sim 0.5$. При дальнейшем увеличении величины параметра регуляризации устойчивость схемы уменьшается. При этом значения β_{\max} и β_{dist} в этой зоне сближаются и при $\alpha > 0.6$ практически совпадают, что говорит о том, что зависимость решения от величины τ становится более жесткой.

Как показывает сопоставление полученных результатов с данными [7] и [9], для достаточно грубых сеток предложенный алгоритм уступает по точности методам, основанным на схемах Годунова. Однако точность данного алгоритма быстро возрастает при сгущении пространственной сетки, и вычислительные затраты, связанные с подробностью сетки, компенсируются алгоритмической простотой и как следствие этого высокой эффективностью работы вычислительной системы. Последнее очень важно в связи с применением современных многопроцессорных и многоядерных вычислительных модулей.

Выводы

В настоящей работе построены регуляризованные уравнения мелкой воды и предложен эффективный численный алгоритм их решения. Сходимость и точность метода показаны на примере решения классической задачи Римана.

В отличие от известных методов, в которых для решения уравнений мелкой воды используются достаточно сложные и дорогостоящие вычислительные алгоритмы [7–10], предложенный метод представляется чрезвычайно простым с точки зрения алгоритмической

реализации. Поэтому данный метод естественным образом обобщается на неструктурированные сетки и может быть эффективно реализован на многопроцессорных вычислительных системах. Это позволит в дальнейшем моделировать течения, соответствующие реальным природным условиям, например паводковые течения, разливы рек, течения в гидроузлах, отстойниках и прибрежных зонах рек и морей.

Список литературы

1. Сретенский Н.Л. Теория волновых движений жидкости. М., 1977.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М., 1986.
3. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М., 1981.
4. Нелинейные волны / Под ред. С. Лейбович, А. Сибасс; Пер. с англ. М., 1977.
5. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М., 1978.
6. Габов С.А., Свешников А.Г. Задачи динамики стратифицированных жидкостей. М., 1986.
7. Куликоский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М., 2001.
8. Годунов С.К. Воспоминания о разностных схемах. Новосибирск, 1997.
9. Birman A., Falcovitz J. // J. Computat. Physics. 2007. **222**. P. 131.
10. Ricchiuto M., Abgrall R., Deconinck H. // J. Computat. Physics. 2007. **222**. P. 287.
11. Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. М.: Ижевск, 2009.
12. Елизарова Т.Г., Соколова М.Е., Шеретов Ю.В. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2005. **45**, № 3. С. 545.
13. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М., 2007.

Regularized shallow water equations

T. G. Elizarova^{1,2,a}, M. V. Afanasieva²

¹Institute for Mathematical Modeling, Russian Academy of Sciences, Miusskaya sq. 4a, Moscow 125047, Russia.

²Department of Neutronography, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: ^atelizar@mail.ru.

Using regularized Navier-Stokes system the regularized shallow water equation system is constructed, that is efficient for numerical simulations of the wide range of problems related with the not deep water reservoirs. The test Riemann problem demonstrates the possibilities of the proposed numerical algorithm.

Keywords: regularization, quasi hydrodynamic equations, shallow water equations, numerical method.

PACS: 47.11.Df; 47.40.Dc.

Received 22 July 2009.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 1(2010).

Сведения об авторах

1. Елизарова Татьяна Геннадьевна — профессор, гл. науч. сотр. Ин-та матем. моделирования РАН; e-mail: telizar@mail.ru.
2. Афанасьева Марина Владимировна — студентка кафедры нейтрографии физического факультета МГУ.