

УДК 519.634

К столетию со дня рождения
академика А.А. Дородницына

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕЛКОЙ ВОДЫ И ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕТОД ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЙ В НЕГЛУБОКИХ ВОДОЕМАХ¹⁾

© 2011 г. О. В. Булатов*, Т. Г. Елизарова**

(*119992 Москва, Ленинские горы, МГУ;

**125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМатем. РАН)

e-mail: dombulatov@mail.ru; telizar@mail.ru

Поступила в редакцию 25.07.2010 г.

На основе регуляризации уравнений Навье–Стокса в виде квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений выводятся регуляризованные уравнения мелкой воды. Последнее позволяет построить эффективные конечно-разностные алгоритмы для численного моделирования течений в неглубоких водоемах. Возможности предложенной модели изучаются на примерах численного решения тестовых задач о распаде разрыва, о течениях над неровностями дна и задачи о движении воды, возникающем при разрушении несимметричной дамбы. Библ. 18. Фиг. 14.

Ключевые слова: квазигазодинамические и квазигидродинамические уравнения, регуляризованные уравнения мелкой воды, метод конечного объема.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения мелкой воды (МВ) представляют собой упрощенную модель полных уравнений Навье–Стокса, описывающих пространственные нестационарные течения вязкого сжимаемого газа. При выводе системы уравнений МВ предполагается, что среда представляет собой достаточно тонкий слой, глубина которого много меньше его продольного размера, поэтому вертикальной составляющей скорости в слое можно пренебречь и полагать, что продольные скорости постоянны по толщине слоя. Дополнительно предполагается, что жидкость несжимаема, находится в поле сил тяжести и ее температура постоянна.

Уравнения МВ – широко известное приближение, на основе которого проводится численное моделирование разнообразных задач экологии, течений в реках и водохранилищах, прибрежных зонах морей и океанов, движения ледников, волн цунами, а также ряда задач циркуляции атмосферы. Эти проблемы непосредственно примыкают к тематике исследований А.А. Дородницына, выполненных им в ранних работах и посвященных, в частности, решению задач о движении воздушных масс в окрестности горных преград. Некоторые аналитические решения, полученные А.А. Дородницыным, могут теперь быть дополнены численными решениями этих задач в рамках уравнений мелкой воды с учетом неровностей дна.

В отсутствие внешних сил и дополнительных усложняющих задачу факторов, уравнения МВ можно получить, рассматривая классические уравнения Эйлера в баротропном приближении. Эта аналогия между уравнениями МВ и системой уравнений Эйлера для невязкого сжимаемого газа хорошо известна и является причиной того, что численные алгоритмы, используемые для решения уравнений МВ, как правило, основываются на методах, развитых для уравнений Эйлера. Эта идея используется в настоящей работе, где на основе развитых ранее методов расчета трехмерных нестационарных газодинамических течений строятся алгоритмы для расчета течений в приближении мелкой воды.

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 10-01-00136).

В работах [1]–[4] предложен и изучен способ регуляризации уравнений Навье–Стокса и Эйлера, позволяющий строить эффективные численные алгоритмы решения соответствующих задач. Указанные алгоритмы основаны на квазигазодинамических и квазигидродинамических (КГД) уравнениях, которые показали свою эффективность при численном моделировании широкого круга течений вязкого сжимаемого газа и несжимаемой жидкости. КГД-уравнения отличаются от уравнений Навье–Стокса и Эйлера дополнительными дивергентными слагаемыми, появление которых связано с введением в рассмотрение двухскоростной модели газодинамического течения, обусловленной выделением диффузионных потоков в уравнении неразрывности. Возникающие при этом дополнительные слагаемые выполняют роль регуляризаторов и обеспечивают устойчивость и точность численных алгоритмов, построенных с учетом этих слагаемых. В частности, для КГД-уравнений доказана теорема о неубывании полной термодинамической энтропии, что подтверждает диссипативный характер соответствующих добавок.

В данной работе предложены два способа построения регуляризованных уравнений мелкой воды и показана их прямая связь с КГД-уравнениями. Первый способ основан на использовании баротропного приближения КГД-уравнений, второй использует интегральное представление исходных уравнений МВ и позволяет получать соответствующие добавки к различным вариантам этих уравнений. Предложены конечно-разностные алгоритмы решения уравнений МВ, которые тесно связаны с уже существующими методами решения КГД-уравнений. Приведены примеры решения задачи о распаде разрыва и о течении над неровностями дна, а также двумерной задачи о течении в окрестности несимметричной плотины.

2. УРАВНЕНИЯ МЕЛКОЙ ВОДЫ КАК БАРОТРОПНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

В ряде работ, среди которых укажем [5]–[8], проводится аналогия между системой уравнений мелкой воды и уравнениями Эйлера, описывающими невязкие газодинамические течения.

Выпишем систему уравнений Эйлера в потоковом представлении:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}[\mathbf{u}(E + p)] = 0. \quad (3)$$

Неизвестными величинами в системе (1)–(3) являются $\rho(\mathbf{x}, t)$ – плотность газа, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – скорость и E удельная полная энергия, которая для идеального политропного газа вычисляется по формулам $E = \rho(\mathbf{u}^2/2 + \varepsilon) = 0.5\rho\mathbf{u}^2 + p/(\gamma - 1)$. Здесь $p(\mathbf{x}, t)$ и $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ – давление и внутренняя энергия газа, которые связаны через уравнение состояния, γ – показатель адиабаты.

Баротропное приближение уравнений газовой динамики представляет собой упрощение этих уравнений, в котором полагается, что давление в газе зависит только от плотности:

$$p = p(\rho). \quad (4)$$

При этом из общей системы уравнений исключается уравнение для полной энергии и вводится понятие первого адиабатического показателя

$$\Gamma(\rho) = \frac{\rho p'(\rho)}{p(\rho)}, \quad (5)$$

который для идеального политропного газа равен $\Gamma = \gamma$.

Используя баротропное приближение системы уравнений (1)–(3) для двумерного плоского течения и полагая

$$\rho = h, \quad p(h) = gh^2/2 \quad \text{и} \quad \Gamma = 2, \quad (6)$$

приходим к системе уравнений мелкой воды для течения над плоским рельефом (см., например, [8]). Здесь g – ускорение силы тяжести. Таким образом, для течения над плоским дном в отсутствие дополнительных внешних сил система уравнений мелкой воды имеет вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div} h \mathbf{u} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial(h\mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla \frac{gh^2}{2} = 0. \quad (8)$$

Неизвестными величинами в системе (7), (8) являются $h(\mathbf{x}, t)$ – высота уровня жидкости и $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – ее скорость.

В модели мелкой воды аналогом числа Маха в газовой динамике $\text{Ma} = \sqrt{\mathbf{u}^2}/c$, где $c = \sqrt{\gamma RT}$ – скорость звука в газе, является число Фруда $\text{Fr} = \sqrt{\mathbf{u}^2}/c$. При этом скорость распространения малых возмущений вычисляется как $c = \sqrt{gh}$.

В предшествующих работах, в частности [1]–[3], были выведены две системы уравнений, обобщающие систему уравнений Навье–Стокса, названные системами квазигазодинамических и квазигидродинамических (КГД) уравнений. Обе эти системы можно рассматривать как системы уравнений Эйлера или Навье–Стокса с регуляризаторами, которые позволяют строить эффективные численные методы решения уравнений газовой динамики для широкого круга задач. Обе КГД-системы уравнений в баротропном приближении позволяют построить, соответственно, два варианта регуляризованных уравнений МВ для течения над плоским дном.

Системы КГД-уравнений в отсутствие внешних сил и источников в традиционных обозначениях имеют вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_m = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{j}_m \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \operatorname{div} \Pi, \quad (10)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} \left[\frac{\mathbf{j}_m}{\rho} (E + p) \right] + \operatorname{div} \mathbf{q} = \operatorname{div}(\Pi \cdot \mathbf{u}). \quad (11)$$

В отличие от уравнений Навье–Стокса, вектор плотности потока массы \mathbf{j}_m не совпадает с вектором потока импульса $\rho \mathbf{u}$ и отличается от него на малую величину \mathbf{w} :

$$\mathbf{j}_m = \rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}). \quad (12)$$

Таким образом, КГД-системы являются двухскоростными моделями, т.е. системами уравнений, включающими в себя скорость \mathbf{j}_m/ρ , связанную с потоком массы, и скорость \mathbf{u} , связанную с потоком импульса. Указанные скорости отличаются на малую величину \mathbf{w} , что влечет за собой появление малой добавки к тензору вязких напряжений и вектору теплового потока.

Для системы уравнений, выписанной в 1996 г. Ю.В. Шеретовым, добавки к скорости и тензору вязких напряжений вычисляются по формулам

$$\mathbf{w} = \frac{\tau}{\rho} [\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p], \quad (13)$$

$$\Pi = \Pi_{\text{NS}} + \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{w}, \quad (14)$$

где Π_{NS} – тензор вязких напряжений Навье–Стокса. Для этой КГД-системы вектор теплового потока совпадает с соответствующей величиной для уравнений Навье–Стокса $\mathbf{q} = \mathbf{q}_{\text{NS}}$. Здесь τ – малая величина, которая называется параметром регуляризации или временного сглаживания и имеет размерность времени. Слагаемые с коэффициентом τ можно рассматривать как регуляризирующие добавки к уравнениям Навье–Стокса.

Для квазигазодинамической системы уравнений соответствующие величины имеют более сложный вид и вычисляются по формулам

$$\mathbf{w} = \frac{\tau}{\rho} [(\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p)], \quad (15)$$

$$\Pi = \Pi_{\text{NS}} + \tau \mathbf{u} \otimes [\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p] + \tau I[(\mathbf{u} \cdot \nabla)p + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{u}], \quad (16)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_{\text{NS}} - \tau \rho \mathbf{u} \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon) + p(\mathbf{u} \cdot \nabla) \left(\frac{1}{\rho} \right) \right]. \quad (17)$$

Показано, что регуляризирующие добавки носят диссипативный характер и для стационарных течений имеют порядок $O(\tau^2)$. Баротропные приближения КГД-уравнений изучались в [9]–[11].

По аналогии с классическим подходом, переходя к баротропному приближению системы КГД-уравнений (9)–(12) для двумерного течения и вводя замену (6), получаем регуляризованную систему уравнений мелкой воды в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_m = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial(h\mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{j}_m \otimes \mathbf{u}) + \nabla \frac{gh^2}{2} = \operatorname{div} \Pi, \quad (19)$$

где вектор потока массы по-прежнему обозначим через \mathbf{j}_m и будем вычислять по формуле

$$\mathbf{j}_m = h(\mathbf{u} - \mathbf{w}). \quad (20)$$

Для квазигидродинамической системы уравнений добавки к скорости и тензор вязких напряжений (13), (14) в приближении мелкой воды рассчитываются по формулам

$$\mathbf{w} = \tau[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] + g \nabla h, \quad (21)$$

$$\Pi = \Pi_{\text{NS}} + h \mathbf{u} \otimes \mathbf{w}. \quad (22)$$

Беря за основу квазигазодинамическую систему уравнений, соответствующие величины будем строить на основе выражений (15), (16) и вычислять по формулам

$$\mathbf{w} = \frac{\tau}{h} \left[(\operatorname{div}(h \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla \frac{gh^2}{2}) \right], \quad (23)$$

$$\Pi = \Pi_{\text{NS}} + \tau \mathbf{u} \otimes \left[h(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \frac{gh^2}{2} \right] + \tau I \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \frac{gh^2}{2} + gh^2 \operatorname{div} \mathbf{u} \right]. \quad (24)$$

В зависимости от постановки задачи, тензор вязких напряжений Π_{NS} может быть включен в рассмотрение или отброшен.

Таким образом, путем баротропного преобразования вида (6) для двух систем КГД-уравнений получаем две системы уравнений мелкой воды с регуляризаторами. Обе системы построены для простейшего случая течений над плоским дном в отсутствие внешних сил.

В следующем разделе приведен способ построения регуляризованных уравнений МВ, учитывающих влияние профиля дна водоема и внешних сил. В качестве последних может быть, например, влияние ветра, сила Кориолиса или трение о дно. Изложенный далее подход может применяться для построения регуляризаторов и к другим формам уравнений мелкой воды, возникающих в практических приложениях.

3. ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ОБЩЕГО ВИДА

В [1], [3] был предложен способ построения КГД-уравнений, основанный на рассмотрении трех основных законов сохранения, записанных для малого, но конечного неподвижного объема газа. В [2] этим способом были получены КГД-уравнения для описания течения газа с учетом внешних сил и тепловых источников.

Применим указанный подход к построению регуляризованных уравнений МВ с учетом внешних сил и неровностей подстилающей поверхности. В качестве исходной системы выберем систему уравнений МВ для плоского двумерного течения, записанную в потоковом виде (см. [8]):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial u_x h}{\partial x} + \frac{\partial u_y h}{\partial y} = 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial h u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h u_x^2 + \frac{1}{2} g h^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (h u_x u_y) = h f_x - g h \frac{\partial b}{\partial x}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial h u_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h u_x u_y) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h u_y^2 + \frac{1}{2} g h^2 \right) = h f_y - g h \frac{\partial b}{\partial y}. \quad (27)$$

Неизвестными величинами в системе (25)–(27) являются уровень воды $h(x, y, t)$, измеряемый от отметки дна, профиль которого является известной функцией $b(x, y)$, и компоненты скорости $u_x(x, y, t)$ и $u_y(x, y, t)$. Здесь f_x и f_y обозначают компоненты заданной внешней силы.

Повторяя способ построения КГД-уравнений, основанный на системе уравнений Навье–Стокса, переписываем исходную систему (25)–(27) в интегральном виде, применяя интегрирование по малому, но конечному объему ΔV с границей Σ . При этом заменим дифференциальный вид производной по времени ее разностным аналогом, вычисляемым на конечном шаге по времени Δt :

$$\int_V \frac{\hat{h} - h}{\Delta t} dV + \int_{\Sigma} h^* u_i^* d\sigma = 0, \quad (28)$$

$$\int_V \frac{\hat{h} u_i - h u_i}{\Delta t} dV + \int_{\Sigma} \Lambda_{ij}^* d\sigma = \int_V h^* \left(f_i - g \frac{\partial b}{\partial x_i} \right) dV. \quad (29)$$

Здесь, для удобства записи, использован индексный вид исходной системы уравнений (25)–(27) и введен тензор $\Lambda_{i,j}$ с компонентами

$$\Lambda_{xx} = h u_x^2 + \frac{1}{2} g h^2, \quad \Lambda_{xy} = \Lambda_{yx} = h u_x u_y, \quad \Lambda_{yy} = h u_y^2 + \frac{1}{2} g h^2.$$

Далее сделаем естественное предположение, что подынтегральные величины, отмеченные знаком звездочка, относятся к промежуточному временному слою $t < t^* < t + \Delta t$, т.е. $h^*(x_i, t) = h(x_i, t^*)$ и $u_i^*(x_i, t) = u_i(x_i, t^*)$. Тем самым мы предполагаем, что за малое время Δt значения уровня жидкости и ее скорости успевают измениться. Это изменение мало, и при условии существования и достаточной гладкости производных его можно оценить, ограничиваясь первым членом ряда в разложении по времени. Сопоставляя величину t^* с серединой временного интервала Δt , $t^* = t + \Delta t/2$, и обозначая $\tau = (\Delta t)/2$, можно записать

$$h^* = h + \tau \frac{\partial h}{\partial t}, \quad u_i^* = u_i + \tau \frac{\partial u_i}{\partial t}. \quad (30)$$

Используя разложения (30) и ограничиваясь членами только первого порядка малости по τ , получаем

$$h^* u_x^* = \left(h + \tau \frac{\partial h}{\partial t} \right) \left(u_x + \tau \frac{\partial u_x}{\partial t} \right) = h u_x + \tau \frac{\partial (h u_x)}{\partial t} + O(\tau^2) = j_{mx} + O(\tau^2). \quad (31)$$

Здесь, по аналогии с построением КГД-систем, введено выражение для потока массы:

$$j_{mx} = h(u_x - w_x),$$

где

$$w_x = \frac{\tau}{h} \left(\frac{\partial (h u_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial (h u_x u_y)}{\partial y} + g h \frac{\partial h}{\partial x} + g h \frac{\partial b}{\partial x} - h f_x \right).$$

Для преобразования производных по времени в (31) было использовано уравнение (26).

Таким же образом получим уравнение

$$h^* u_y^* = \left(h + \tau \frac{\partial h}{\partial t} \right) \left(u_y + \tau \frac{\partial u_y}{\partial t} \right) = hu_y + \tau \frac{\partial(hu_y)}{\partial t} + O(\tau^2) = j_{my} + O(\tau^2),$$

в котором

$$j_{my} = h(u_y - w_y),$$

и

$$w_y = \frac{\tau}{h} \left(\frac{\partial(hu_x u_y)}{\partial x} + \frac{\partial(hu_y^2)}{\partial y} + gh \frac{\partial h}{\partial y} + gh \frac{\partial b}{\partial y} - hf_y \right).$$

Выражения для компонент тензора Λ_{ij}^* на промежуточном слое по времени получают аналогичным образом и имеют вид

$$\Lambda_{xx}^* = h^*(u_x^*)^2 + \frac{1}{2}g(h^*)^2 = u_x j_{mx} + \frac{1}{2}gh^2 - \Pi_{xx} + O(\tau^2),$$

$$\Lambda_{xy}^* = h^* u_y^* u_x^* = u_y j_{mx} - \Pi_{xy} + O(\tau^2),$$

$$\Lambda_{yx}^* = h^* u_x^* u_y^* = u_x j_{my} - \Pi_{yx} + O(\tau^2),$$

$$\Lambda_{yy}^* = h^*(u_y^*)^2 + \frac{1}{2}g(h^*)^2 = u_y j_{my} + \frac{1}{2}gh^2 - \Pi_{yy} + O(\tau^2).$$

Выражения для Π_{ij} имеют вид первых пространственных производных с коэффициентом τ :

$$\Pi_{xx} = \tau hu_x \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{\partial b}{\partial x} - f_x \right) + \tau gh \left(u_x \frac{\partial h}{\partial x} + u_y \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial u_x}{\partial x} + h \frac{\partial u_y}{\partial y} \right),$$

$$\Pi_{yx} = \tau u_y h \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{\partial b}{\partial x} - f_x \right),$$

$$\Pi_{xy} = \tau u_x h \left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} + g \frac{\partial b}{\partial y} - f_y \right),$$

$$\Pi_{yy} = \tau hu_y \left(u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial y} + g \frac{\partial b}{\partial y} - f_y \right) + \tau gh \left(u_y \frac{\partial h}{\partial y} + u_x \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u_x}{\partial x} + h \frac{\partial u_y}{\partial y} \right).$$

Возвращаясь к интегральной форме уравнений (28), (29), отбрасывая слагаемые порядка $O(\tau^2)$ и вновь заменяя разностную производную по времени ее дифференциальным аналогом, приходим к системе дифференциальных уравнений МВ в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx}}{\partial x} + \frac{\partial j_{my}}{\partial y} = 0, \tag{32}$$

$$\frac{\partial hu_x}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx} u_x}{\partial x} + \frac{\partial j_{my} u_x}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh^2}{2} \right) = h^* \left(f_x - g \frac{\partial b}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yx}}{\partial y}, \tag{33}$$

$$\frac{\partial hu_y}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx} u_y}{\partial x} + \frac{\partial j_{my} u_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{gh^2}{2} \right) = h^* \left(f_y - g \frac{\partial b}{\partial y} \right) + \frac{\partial \Pi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yy}}{\partial y}, \tag{34}$$

где

$$h^* = h - \tau \left(\frac{\partial hu_x}{\partial x} + \frac{\partial hu_y}{\partial y} \right). \tag{35}$$

Система уравнений (32)–(35) тесно связана с исходной системой уравнений МВ и при $\tau = 0$ переходит в систему (25)–(27). Вид слагаемых с коэффициентом τ определяется видом исходных уравнений, поэтому стационарные решения исходной системы (25)–(27) являются стационарными решениями системы (32)–(35). Одним из таких решений является решение задачи о “покоящемся озере”: для стационарной задачи при $u_x = u_y = 0$ в отсутствие внешних сил $f_x = f_y = 0$ система уравнений МВ удовлетворяет условию гидростатического баланса

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{gh^2}{2} \right) + gh \frac{\partial b}{\partial x_i} = 0, \quad (36)$$

т.е. в этом случае уровень воды в озере горизонтален, $h(x, y) + b(x, y) = \text{const}$. Для системы уравнений МВ с добавками указанное решение также удовлетворяется, что может быть проверено его непосредственной подстановкой в систему (32)–(35).

Выписанные выше регуляризованные уравнения МВ соответствуют системе уравнений (18)–(20) с замыканием (23), (24), построенной как баротропное приближение квазигазодинамической системы уравнений. Численный алгоритм и примеры расчетов, выполненных с помощью уравнений (32)–(35), приведены в следующем разделе.

Система регуляризованных уравнений МВ с учетом неровности дна и внешних сил, отвечающая замыканию (21), (22), получена аналогичным образом из предположения, что за малое время τ скорость жидкости успевает измениться, а высота слоя остается неизменной. Это означает, что в выражении (30) следует положить $h^* = h$. Для одномерных пространственных течений указанная система уравнений МВ и пример решения задачи о распаде разрыва приведены в [12].

4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Для плоских одномерных течений регуляризованные уравнения МВ (32)–(35) имеют вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial j_m}{\partial x} = 0, \quad (37)$$

$$\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial j_m u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh^2}{2} \right) = g \left(h - \tau \frac{\partial hu}{\partial x} \right) \left(f - \frac{\partial b}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad (38)$$

где

$$j_m = h(u - w), \quad w = \frac{\tau}{h} \left(\frac{\partial hu^2}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} + gh \frac{\partial b}{\partial x} - hf \right), \quad (39)$$

$$\Pi = \tau uh \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{\partial b}{\partial x} - f \right) + \tau gh \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (40)$$

По аналогии с алгоритмами, разработанными для квазигазодинамических уравнений, для численного решения регуляризованных уравнений МВ (37)–(40) будем использовать явную по времени разностную схему с аппроксимацией всех пространственных производных центральными разностями. Разностные схемы такого типа показали свою высокую эффективность и точность при расчете течений вязкого сжимаемого газа (см., например, [1]–[3], [13]).

Значения искоемых переменных $h(x, t)$ и $u(x, t)$ зададим в узлах пространственной сетки i . Значения переменных в полужелых пространственных точках $i + 1/2$ вычисляются как среднее арифметическое значений в соседних точках

$$h_{i+1/2} = 0.5(h_i + h_{i+1}), \quad u_{i+1/2} = 0.5(u_i + u_{i+1}), \quad b_{i+1/2} = 0.5(b_i + b_{i+1}). \quad (41)$$

Используя значения в полужелых точках, вычисляем потоки в этих точках (39), (40):

$$J_{m,i+1/2} = h_{i+1/2}(u_{i+1/2} - w_{i+1/2}), \quad (42)$$

где

$$w_{i+1/2} = \frac{\tau_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} \left(\frac{h_{i+1} u_{i+1}^2 - h_i u_i^2}{\Delta x} + gh_{i+1/2} \frac{h_{i+1} - h_i}{\Delta x} + gh_{i+1/2} \frac{b_{i+1} - b_i}{\Delta x} - h_{i+1/2} f_{i+1/2} \right). \quad (43)$$

Таким же образом определим

$$\begin{aligned} \Pi_{i+1/2} = & \tau_{i+1/2} u_{i+1/2} h_{i+1/2} \left(u_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + g \frac{h_{i+1} - h_i}{\Delta x} + g \frac{b_{i+1} - b_i}{\Delta x} - f_{i+1/2} \right) + \\ & + \tau_{i+1/2} g h_{i+1/2} \left(u_{i+1/2} \frac{h_{i+1} - h_i}{\Delta x} + h_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \right). \end{aligned} \quad (44)$$

В качестве следующего этапа численного метода аппроксимируем первое уравнение МВ в виде

$$\frac{h_i^{k+1} - h_i^k}{\Delta t} + \frac{j_{m,i+1/2} - j_{m,i-1/2}}{\Delta x} = 0, \quad (45)$$

где индекс k соответствует текущему слою по времени, а шаг по времени составляет Δt . Все пространственные производные вычисляются на временном шаге k .

Уравнение для определения расхода (38) аппроксимируется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{h_i^{k+1} u_i^{k+1} - h_i^k u_i^k}{\Delta t} + \frac{j_{m,i+1/2} u_{i+1/2} - j_{m,i-1/2} u_{i-1/2}}{\Delta x} + \\ & + \frac{g h_{i+1/2}^2 - h_{i-1/2}^2}{2 \Delta x} = g h_i^* \left(f_i - \frac{b_{i+1/2} - b_{i-1/2}}{\Delta x} \right) + \frac{\Pi_{i+1/2} - \Pi_{i-1/2}}{\Delta x}. \end{aligned} \quad (46)$$

Здесь

$$h_i^* = 0.5(h_{i+1/2} + h_{i-1/2}) - \tau_i \frac{h_{i+1/2} u_{i+1/2} - h_{i-1/2} u_{i-1/2}}{\Delta x}. \quad (47)$$

Выписанная выше аппроксимация обеспечивает свойство алгоритма, известное под названием “хорошей балансировки” (well-balanced). Последнее означает, что вычислительная схема не нарушает естественного условия, состоящего в том, что в отсутствие внешних сил покоящаяся жидкость с горизонтальной поверхностью $h(x) + b(x) = \text{const}$ не может самопроизвольно придти в движение над неровным дном, т.е. сохраняет условие $u = 0$ (задача о покоящемся озере). Это свойство разностной схемы проверяется непосредственной подстановкой разностного решения $u_i = 0, h_i + b_i = \text{const}$ в систему разностных уравнений (41)–(47) для стационарной задачи. Для известных численных алгоритмов указанное качество разностных схем как правило, достигается с помощью достаточно сложных построений (см., например, [14] и [15]).

Устойчивость численного алгоритма обеспечивается слагаемыми с коэффициентом τ , величина которого связывается с шагом пространственной сетки Δx и вычисляется в виде

$$\tau = \alpha \frac{\Delta x}{c}, \quad c = \sqrt{gh}, \quad (48)$$

где $0 < \alpha < 1$ – числовой коэффициент, выбираемый из условий точности и устойчивости счета. Условие устойчивости имеет вид условия Куранта, где шаг по времени выбирается по формуле

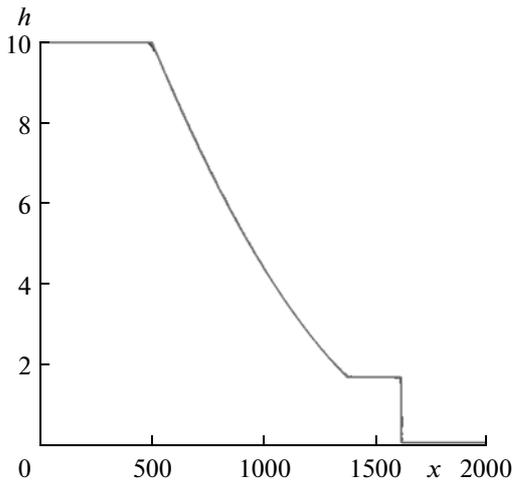
$$\Delta t = \beta (\Delta x / c)_{\min}. \quad (49)$$

Здесь число Куранта $\beta, 0 < \beta < 1$, зависит от величины параметра регуляризации τ и подбирается в процессе вычислений для обеспечения устойчивости численного решения.

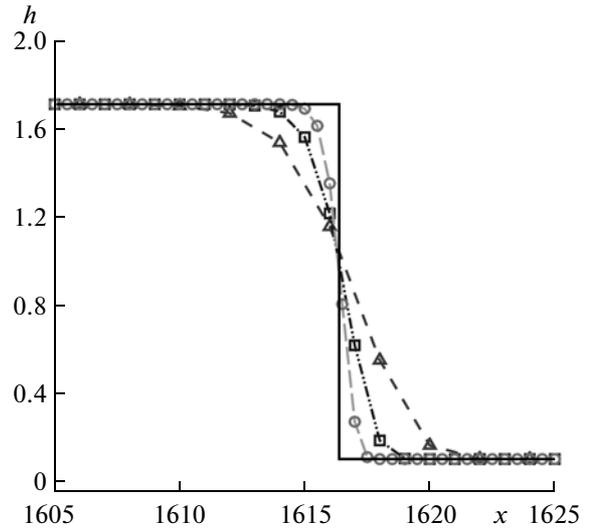
Далее приведены примеры решения известных тестовых задач, выполненные с помощью изложенного выше разностного алгоритма. Во всех расчетах использованы равномерные пространственные сетки.

4.1. Тест 1. Задача о распаде разрыва

Для проверки работоспособности метода выбрано решение задачи Римана, которая представляет собой начально-краевую задачу о распаде разрыва и часто называется в литературе задачей о разрушении плоской плотины. Эта задача использовалась в [8] и [16] для тестирования численных методов решения уравнений мелкой воды на основе разностных алгоритмов, основанных на схемах С.К. Годунова первого и второго порядков точности. Эта же задача исследовалась в целом ряде других работ, среди которых укажем [14], где тестируются схемы с хорошей балансировкой,



Фиг. 1.



Фиг. 2.

построенные на основе кинетического подхода, и [17], посвященная построению конечно-разностных алгоритмов произвольного порядка точности. В [14] отмечено, что большинство вычислительных алгоритмов, основанных на аппроксимации потоков направленными разностями, не позволяет рассчитывать указанный тест.

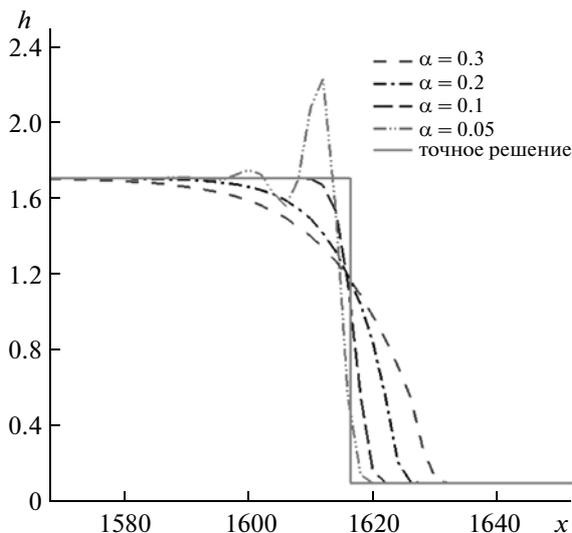
Рассматривается плоское одномерное течение жидкости в канале длины L с плоским дном $b = \text{const}$. В начальный момент в центре области задается разрыв уровня воды, разделяющий два однородных состояния с высотой уровня $h = h_l$ слева от разрыва и $h = h_r$ справа от разрыва. В начальный момент времени справа и слева от разрыва жидкость неподвижна, $u_l = u_r = 0$. Были рассчитаны варианты распада разрыва для значений h_r/h_l от 0.5 до 0.0001, однако далее представлен лишь расчет, соответствующий статье [6], где $L = 2000$ м, $h_l = 10$ м, $h_r = 0.1$ м, $g = 9.8$ м/с². Результаты приведены для момента времени $t = 50$ с.

На фиг. 1 представлены профили высоты жидкости $h(x)$, полученные на последовательности равномерных пространственных сеток с шагами $\Delta x = 0.5, 1$ и 2 м (сплошная линия – автомодельное решение). Фрагмент общей картины представлен на фиг. 2, где узлы сетки отмечены маркерами: $\Delta x = 2$ м – треугольники, $\Delta x = 1$ м – квадраты, $\Delta x = 0.5$ м – кружки. Вычисления проведены для параметра регуляризации (48), вычисленного при $\alpha = 0.1$. Графики демонстрируют монотонную сходимость численного решения к автомодельному при сгущении пространственной сетки.

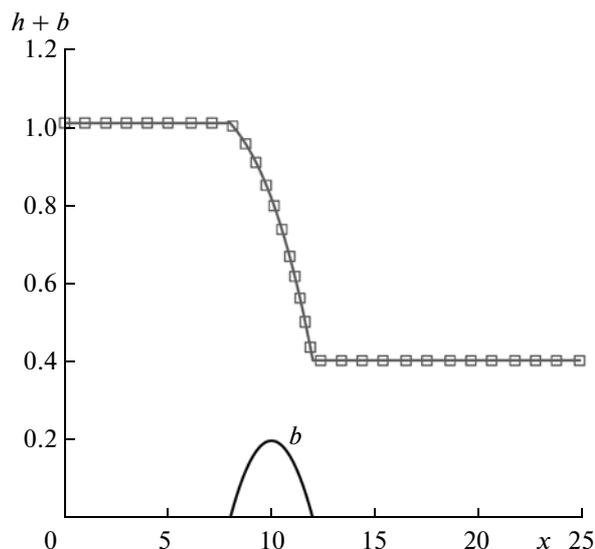
Зависимость численного решения от величины параметра регуляризации показана на фиг. 3 (фрагмент). Приведены профили высоты жидкости $h(x)$, полученные на сетке с шагом $\Delta x = 2$ м для последовательности параметров регуляризации (48), вычисленных при $\alpha = 0.05, 0.1, 0.2$ и 0.3 . Шаг по времени (49) был равен $\Delta t = 0.02$ с, что соответствует числу Куранта $\beta = 0.1$. С ростом α разрыв решения сглаживается, при уменьшении α в численном решении появляются осцилляции ($\alpha = 0.05$), и при дальнейшем уменьшении величины регуляризатора решение теряет устойчивость. Опыт расчетов показывает, что имеется область оптимальных значений параметра α , числа Куранта и шага сетки, обеспечивающих требуемую точность решения задачи.

Устойчивость разностного решения в зависимости от параметра τ для разностного алгоритма с регуляризатором вида (13), (14) изучалась в [12]. Было показано, что имеется некоторое оптимальное значение коэффициента α , при котором достигается максимальный шаг по времени.

Для $\alpha = 0.1$ ширина скачка занимает 5–6 точек разностной сетки (фиг. 2) и при уменьшении величины α ширину ударного перехода можно уменьшить до 3–5 точек разностной сетки. В прецизионных (и поэтому существенно более сложных) численных алгоритмах удается аппроксимировать разрыв на меньшем числе точек сетки; так, в [14] разрыв аппроксимируется на 3–4 точках разностной сетки, а использование обобщенного метода Римана (см. [16]) позволяет описать разрыв на 1–2 точках сетки. Однако указанные методы существенно превосходят предложенный авторами алгоритм по числу арифметических операций для одного шага по времени в расчете на одну точку пространственной сетки.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

4.2. Тест 2. Задача о транскритическом течении над неровностями дна

Этот тест — классическая задача о транскритическом течении над неровным дном, где наблюдается изменение числа Фруда от значений, меньших единицы, до значений, больших единицы, включая сверхкритические значения. В зависимости от начальных и граничных условий в течении может или формироваться, или не формироваться неподвижный разрыв — гидродинамический скачок. Для течения без разрыва система уравнений МВ имеет точное решение вида

$$hu = Q_0 = \text{const}, \quad \frac{Q_0^2}{2gh^2} + h + b = \text{const}_1.$$

Система уравнений МВ с регуляризатором также удовлетворяет этому точному решению, поскольку на этом решении все слагаемые с коэффициентом τ обращаются в ноль.

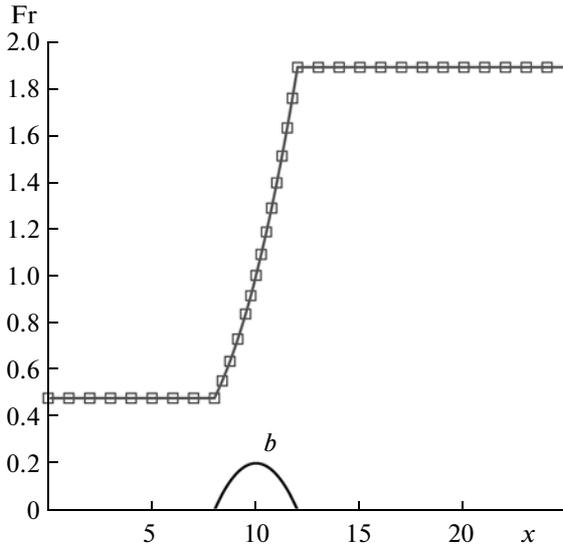
Согласно [14], рассмотрим два наиболее сложных случая транскритического течения с образованием гидродинамического разрыва и без него. Рассмотрим канал длиной 25 м, форма дна которого описывается функцией $b(x) = 0.2 - 0.05(x - 10)^2$, если $8 < x < 12$, и $b(x) = 0$ вне этого интервала.

Случай 1: течение без разрыва. Слева налагается граничное условие $hu = 1.53 \text{ м}^2/\text{с}$, $\partial h/\partial x = 0$. Справа ставим условия сноса потока $\partial h/\partial x = 0$, $\partial u/\partial x = 0$. В качестве начального условия выбрано $h + b = 0.4 \text{ м}$, $u = 0$.

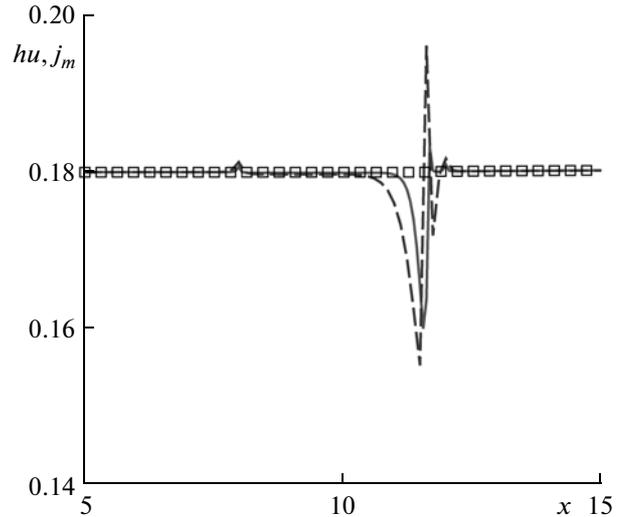
Рассчитанные значения hu и j_m с высокой точностью соответствуют аналитическому решению этой задачи $Q_0 = j_m = hu = 1.53 \text{ м}^2/\text{с}$. В зоне над неровностью дна имеется отличие величины hu от точного значения, которое составляет $\sim 0.001 \text{ м}^2/\text{с}$. Расчеты выполнены для значений параметра регуляризации $\alpha = 0.6$, числа Куранта $\beta = 0.05$ и шагов сетки $\Delta x = 0.0625$ и 0.125 м (последнее значение совпадает со значением из [14]). При этом величина ошибки при вычислении значения hu над неровностью дна оказывается меньше, чем в [14], использующей громоздкий вычислительный газокинетический алгоритм. Известно, что аккуратное определение расхода над препятствием представляет большие вычислительные сложности, чем определение скорости или уровня жидкости в этой зоне.

Распределение уровня жидкости $h + b$ и числа Фруда показано на фиг. 4 и 5 для шагов сетки $\Delta x = 0.0625 \text{ м}$ (сплошная линия) и 0.125 м (маркеры-квадраты). Видно малое отличие численных решений при сгущении сетки, что свидетельствует о достигнутой точности, а также транскритический характер течения: при переходе через холмик, который образует поверхность дна, наблюдается рост скорости, соответствующий переходу числа Фруда через единицу (фиг. 5).

Случай 2: течение с неподвижным разрывом. Формирование гидродинамического разрыва обусловлено следующими граничными и начальными условиями: слева на границе полагаем



Фиг. 5.



Фиг. 6.

$hu = 0.18 \text{ м}^2/\text{с}$, $\partial h/\partial x = 0$, справа на границе требуем выполнения условия $h = 0.33 \text{ м}$ и условия сноса для скорости $\partial u/\partial x = 0$. В качестве начального условия выберем $h + b = 0.33 \text{ м}$, $u = 0$.

При численном интегрировании этой задачи в зоне за разрывом появляется вычислительная неустойчивость – сеточные осцилляции решения. Для сглаживания этих нефизических колебаний, по аналогии с КГД-алгоритмом для моделирования сверхзвуковых течений газа, выражение для тензора вязких напряжений (40) следует дополнить слагаемым

$$\Pi_{\text{NS}} = \tau \frac{gh^2}{2} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Это слагаемое представляет собой дополнительный регуляризатор типа вязкости Навье–Стокса.

Расчеты выполнены для значений параметра регуляризации $\alpha = 0.6$, числа Куранта $\beta = 0.1$ и шагов сетки $\Delta x = 0.125 \text{ м}$ (штриховая линия) и 0.0625 м (сплошная линия; см. фиг. 6–8).

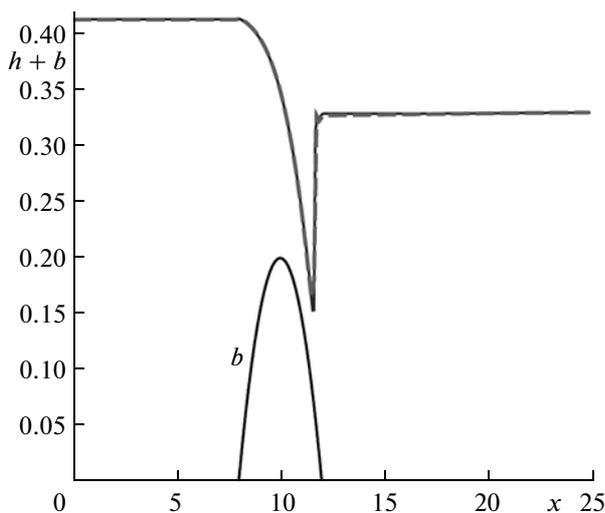
На фиг. 6 представлены рассчитанные значения j_m (маркеры-квадраты) и hu . Точное решение задачи соответствует величине расхода $Q_0 = hu = 0.18 \text{ м}^2/\text{с}$. Во всей области течения для обоих сеток $j_m = Q_0$. Расход hu также хорошо совпадает с аналитическим значением везде, за исключением узкой зоны вблизи разрыва, где наблюдаются осцилляции, область которых занимает 8–10 шагов разностной сетки и уменьшается при ее сгущении.

Распределение уровня жидкости и числа Фруда для указанных сеток показаны на фиг. 7 и 8. Видно очень близкое совпадение результатов расчета уровня жидкости для обеих сеток (фиг. 7) и монотонная сходимость численных результатов к аналитическому решению для числа Фруда (фиг. 8). Для сетки $\Delta x = 0.125 \text{ м}$ максимальное значение числа Фруда составляет $\text{Fr}_{\text{max}} = 2.35$, для сетки $\Delta x = 0.0625 \text{ м}$ максимум равен $\text{Fr}_{\text{max}} = 2.48$, аналитическое значение равно $\text{Fr}_{\text{max}} = 2.78$. Отметим, что, в отличие от результатов из [14] и цитируемых там работ, в представленных расчетах не наблюдается превышения величины числа Фруда над его аналитическим значением.

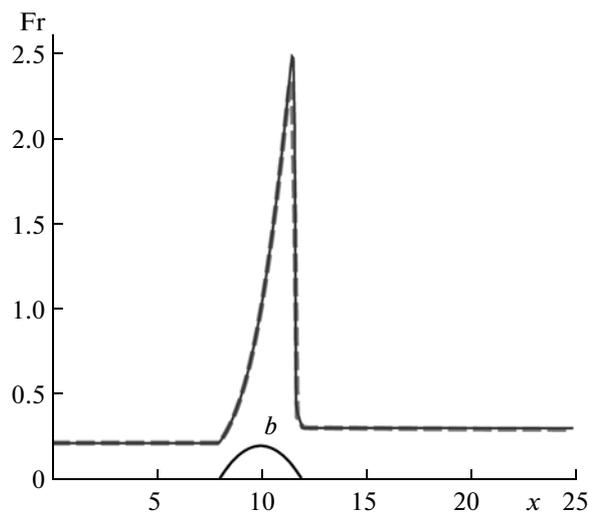
Согласно [14], соответствие численного и аналитического решений задачи в зоне над препятствием представляет собой наиболее сложную проблему практически для всех численных алгоритмов.

5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СХЕМА ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ И ЗАДАЧА О РАЗРУШЕНИИ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ДАМБЫ

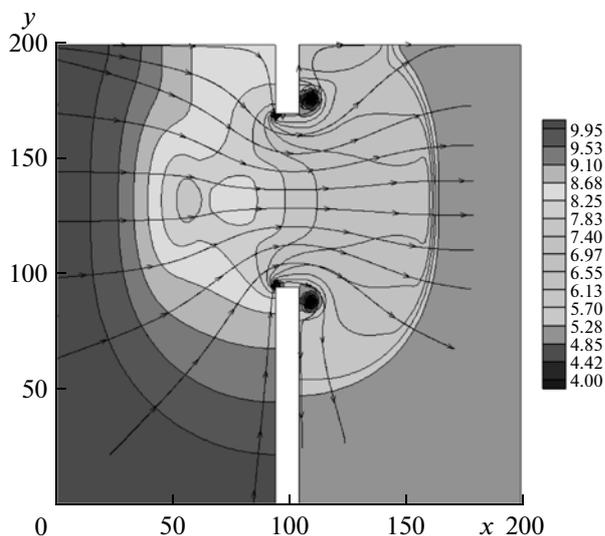
Численный алгоритм для расчета двумерных течений строится таким же способом, как и алгоритм расчета одномерных течений. Система уравнений (32)–(35) аппроксимируется с помощью метода конечного объема, причем все пространственные производные аппроксимируются



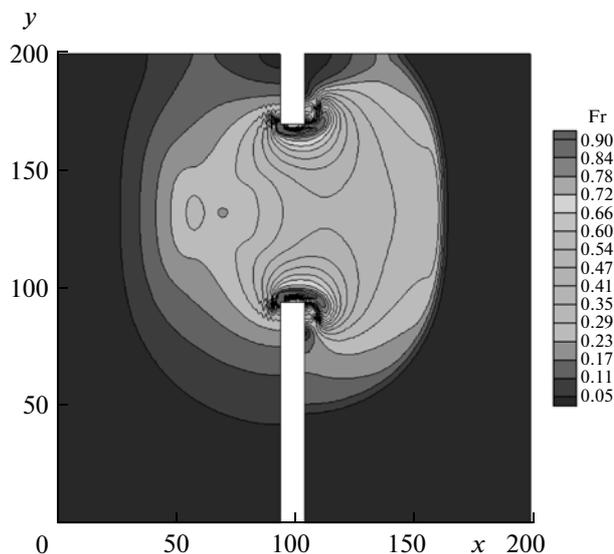
Фиг. 7.



Фиг. 8.



Фиг. 9.



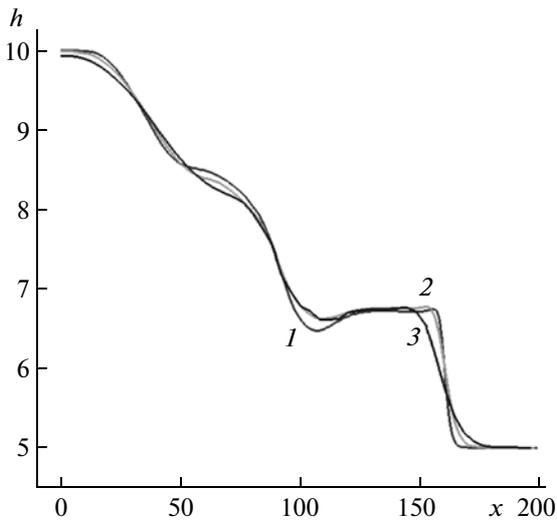
Фиг. 10.

центральной разности со вторым порядком точности. Метод в целом аналогичен методу решения КГД-уравнений для двумерных течений (см., например, [2] и [13]).

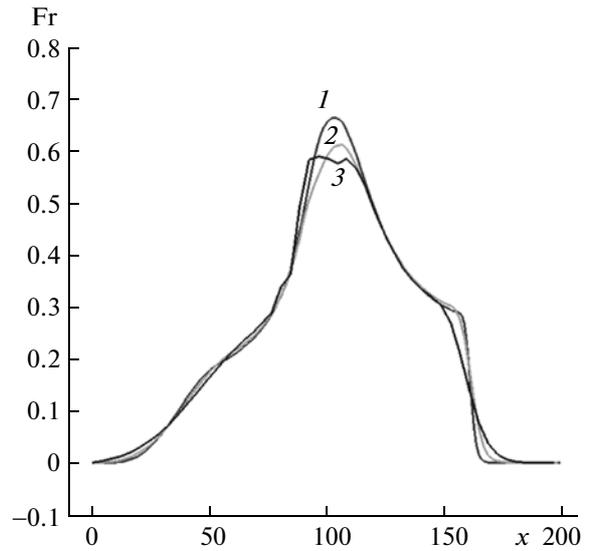
Возможности двумерного алгоритма иллюстрируются примером расчета нестационарного течения, возникающего при разрушении несимметричной дамбы. Это — известная тестовая задача, постановка которой изложена, например, в [17], [18] и в приведенных в этих работах ссылках. В этих расчетах внешние силы не учитываются, $f_x = f_y = 0$ и дно водоема полагается плоским $b(x, y) = 0$.

В соответствии с [18] будем рассматривать задачу о течении, возникающем при мгновенном разрушении дамбы, разделяющей два бассейна с водой. Высота уровня воды в левом бассейне составляет 10 м, в правом 5 м. Длина разрыва равна 75 м, начало разрыва расположено в точке с координатой $y = 95$ м (см. фиг. 9). Толщина стенки дамбы равна 10 м, и ее левая сторона расположена в точке с координатой $x = 95$ м. На всех границах дамбы ставятся отражающие граничные условия $g = 9.8 \text{ м/с}^2$.

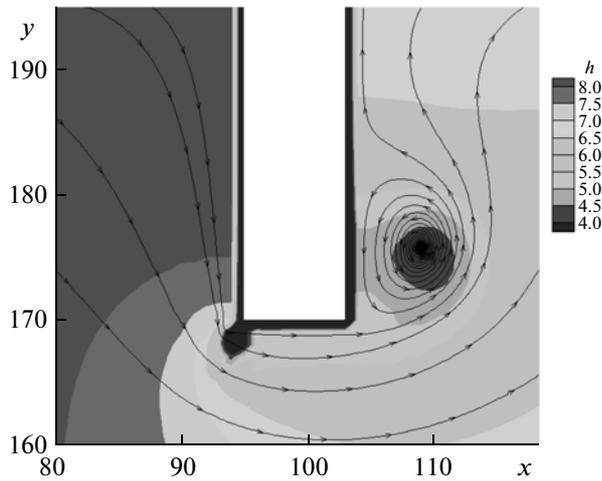
Высота уровня жидкости и распределение линий тока (касательные к скоростям), а также изолинии числа Фруда представлены на фиг. 9 и 10 для момента времени $t = 7.2$ с и равномерной



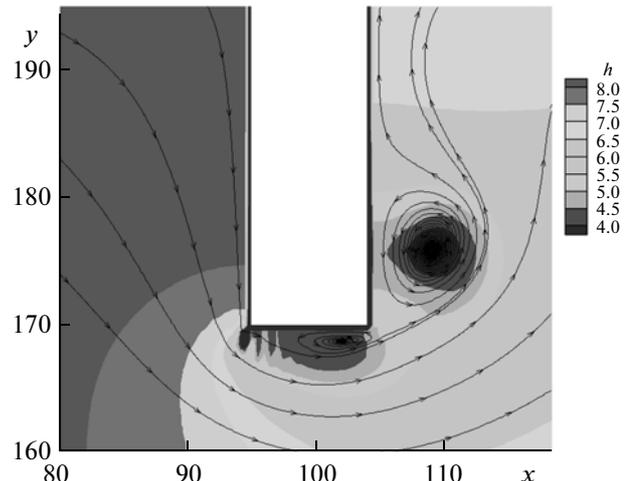
Фиг. 11.



Фиг. 12.



Фиг. 13.



Фиг. 14.

пространственной сетки с шагами $\Delta x = \Delta y = 1$ м. Вычисления проведены для параметра регуляризации $\alpha = 0.2$ и числа Куранта $\beta = 0.2$. На рисунке видны характерные особенности возникающего к указанному моменту времени течения, а именно, сглаженный немонотонный профиль слева от разрыва и резкий, но монотонный профиль в правом бассейне, а также отражение волны от верхней стенки бассейна.

Фиг. 11 и 12 демонстрируют одномерные распределения уровня жидкости $h(x)$ и числа Фруда $Fr(x)$ соответственно вдоль линии $y = 160$ м для последовательности сеток с шагами $\Delta x = \Delta y = 1$ (линия 1), 2 (линия 2) и 4 (линия 3) м. Из этих рисунков следует сходимость численного решения при сгущении сетки к эталонному решению, в качестве которого выбрано решение этой задачи, приведенное в [18]. В указанной работе задача о дамбе решается на неструктурированной пространственной сетке с помощью двух численных алгоритмов высокого порядка точности, результаты которых оказываются близкими. Результаты расчетов на основе алгоритма с регуляризацией для $\Delta x = \Delta y = 1$ м хорошо совпадают с решением из [18], полученным на сетке с шагами ~ 2 м.

Двумерный алгоритм был адаптирован для проведения расчетов на многопроцессорной вычислительной системе. Использовался принцип геометрического параллелизма, MPI-интерфейс

и язык программирования Си. Эффективность параллельной реализации была близка к оптимальной, и расчет на 10-процессорной системе ускорил работу программы практически в 10 раз. Были проведены расчеты на сетке с шагами $\Delta x = \Delta y = 0.5$ м до времени $t \sim 30$ с. В результате получены картины течения, демонстрирующие отражение волны от правой стенки области и ее движение назад в створ дамбы, а также резкий подъем жидкости в правом верхнем углу правого бассейна. Кроме того, расчеты на подробной сетке показывают детали формирования отрывных течений вблизи выступающих участков дамбы, причем с увеличением подробности сетки удается разрешить большее число вихревых образований. На фиг. 13 и 14 показаны фрагменты вихревого течения вблизи верхней части дамбы, рассчитанные на сетках с шагами 1 и 0.5 м на момент времени $t = 7.2$ с. Видно более детальное разрешение вихревых образований на сетке с большим числом узлов²⁾.

6. ВЫВОДЫ

На основе баротропного приближения систем квазигазодинамических и квазигидродинамических КГД-уравнений выписаны системы уравнений МВ с регуляризаторами. Те же уравнения с учетом внешних сил и неровностей дна водоема получены с использованием интегрального представления уравнений МВ. Полученные таким образом регуляризирующие добавки имеют вид вторых пространственных производных и тесно связаны с соответствующими добавками для КГД-систем уравнений. Построенные добавки не нарушают условий гидростатического баланса системы.

Предложен и опробован численный алгоритм решения уравнений МВ, основанный на методе конечного объема с аппроксимацией всех пространственных производных, включая конвективные слагаемые, с помощью центральных разностей. Устойчивость алгоритма обеспечивается регуляризирующими добавками. Условием устойчивости является условие Куранта.

Предложенный алгоритм опробован на задачах о распаде разрыва, задаче о транскритическом течении над препятствием, а также на задаче о течении воды, образующемся при разрушении несимметричной дамбы. Для одномерных расчетов полученные численные результаты сходятся к аналитическим решениям при сгущении пространственной сетки. В двумерной задаче расчеты соответствуют эталонным данным, полученным по схемам высокого порядка точности.

Простота численного алгоритма, его точность, применимость к решению задач разной природы совместно с невысокими вычислительными затратами и возможностями параллельной реализации делают предложенный авторами алгоритм конкурентоспособным по сравнению с дорогостоящими методами высоких порядков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шеретов Ю.В.* Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. Тверь: Тверской гос. ун-т, 2000.
2. *Елизарова Т.Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научн. мир, 2007.
3. *Шеретов Ю.В.* Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. М.—Ижевск, 2009.
4. *Четверушкин Б.Н.* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: Макс Пресс, 2004.
5. *Сретенский Н.Л.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
7. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений. М.: Мир, 1978.
8. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
9. *Шеретов Ю.В.* О свойствах решений квазигидродинамических уравнений в баротропном приближении // Вестн. Тверского гос. ун-та. Сер. прикл. матем. 2009. № 3. С. 5—19.
10. *Zlotnik A.A., Chetverushkin B.N.* Parabolicity of the quasi-gasdynamic system of equations, its hyperbolic second-order modification, and the stability of small perturbations for them // Comput. Math. and Math. Phys. 2008. V. 48. № 3. P. 420—446.

²⁾ Расчеты на параллельной вычислительной системе выполнены студентом физического факультета МГУ М.И. Байдаковым.

11. Злотник А.А. Энергетические равенства и оценки для баротропных квазигазо- и квазигидродинамических систем уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 2. С. 325–337.
12. Елизарова Т.Г., Афанасьева М.В. Регуляризованные уравнения мелкой воды // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика. Астрономия. 2010. № 1. С. 15–18.
13. Елизарова Т.Г., Соколова М.Е., Шеретов Ю.В. Квазигазодинамические уравнения и численное моделирование течений вязкого газа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45. № 3. С. 545–556.
14. Kun Xu. A well-balanced gas-kinetic scheme for the shallow-water equations with source terms // J. Comput. Phys. 2002. V. 178. P. 533–562.
15. Noelle S., Pankratz N., Puppo G., Natvig J.R. Well-balanced finite volume schemes of arbitrary order of accuracy for shallow water flows // J. Comput. Phys. 2006. V. 213. P. 474–499.
16. Birman A., Falcovitz J. Application of the GRP scheme to open channel flow equations // J. Comput. Phys. 2007. V. 222. P. 131–154.
17. Glaster P. The efficient prediction of shallow water flows. Part II: Application // Comput. Math. Applic. 1997. V. 33. № 9. P. 115–148.
18. Ricchiuto M., Abgarall R., Deconinck H. Application of conservative residual distribution schemes to the solution of the shallow water equations on unstructured meshes // J. Comput. Phys. 2007. V. 222. P. 287–331.

Сдано в набор 16.09.2010 г.

Подписано к печати 02.12.2010 г.

Формат бумаги 60 × 88¹/₈

Цифровая печать

Усл. печ. л. 23.0

Усл. кр.-отт. 5.0 тыс.

Уч.-изд. л. 23.0

Бум. л. 11.5

Тираж 212 экз.

Зак. 927

Учредители: Российская академия наук, Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

Издатель: Российская академия наук. Издательство “Наука”, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 90

Оригинал-макет подготовлен МАИК “Наука/Интерпериодика”

Отпечатано в ППП “Типография “Наука”, 121099, Москва, Шубинский пер., 6