

**ФОРМИРОВАНИЕ УЕДИНЕННОЙ ВОЛНЫ
В КОЛЬЦЕВОМ АЭРОГИДРОКАНАЛЕ**© 2012 г. *Т.Г. Елизарова, М.А. Истомина, Н.К. Шелковников*

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН; telizar@mail.ru
МГУ им. М.В. Ломоносова, Физический факультет, кафедра математики
МГУ им. М.В. Ломоносова, Физический факультет, кафедра физики моря и вод суши

Работа поддержана грантом РФФИ 10-01-00136.

Приведено краткое описание лабораторных экспериментов, демонстрирующих формирование ветрового солитона в кольцевом аэрогидроканале. В рамках приближения мелкой воды построена математическая модель для описания указанного явления. Соответствующий конечно-разностный алгоритм основан на уравнениях мелкой воды с регуляризацией. Впервые в численных экспериментах получено решение типа ветрового солитона, качественно соответствующее данным эксперимента.

Ключевые слова: ветро-волновой солитон, уравнения мелкой воды, квазигазодинамические уравнения, регуляризованные уравнения мелкой воды.

**NUMERICAL SIMULATION OF THE SOLITARY WAVE GENERATION
IN A WIND-WATER CIRCULAR TUNNEL***T.G. Elizarova, M.A. Istomina, N.K. Shelkovnikov*

The short description of the wind-water solitary wave generation in a laboratory wind-water circular tunnel is presented. Mathematical model of this phenomenon in the framework of shallow-water equation system is constructed. Numerical algorithm for solving the system is based on the regularized equations. For the first time a numerical solution of the wind-water solitary wave is obtained based on shallow water equations. Numerical soliton is qualitatively similar to the wind-water soliton, examined in the experiment.

Key words: wind-water solitary wave, shallow water equations, quasi-gas dynamic equations, regularized shallow water equations.

Введение

Среди волновых движений, происходящих в морях и океанах, большой интерес представляет возникновение и поведение уединенных волн большой амплитуды, которые в литературе получили название экстремальных, или гигантских волн. В ряде публикаций такие волны называются волнами-убийцами. В мировой практике накоплено большое количество свидетельств о встрече судов и буровых платформ с необычными волнами, обладающими большей высотой по сравнению с окружающими волнами, с неожиданностью их появления и исчезновения [1]-[4]. Как и в случае волн-цунами сейсмического происхождения, высота таких волн при подходе к берегу резко увеличивается, что может причинить существенный ущерб побережью.

Согласно современным представлениям и опыту наблюдений, в ряде случаев такие волны могут образовываться под влиянием ветра и вести себя как уединенный солитон или группа солитонов. В данном случае под солитоном понимается

устойчивая уединенная волна, которая проявляет некоторые свойства частицы при взаимодействии таких волн друг с другом и при их отражении от препятствий [5], [6].

Механизм формирования волно-ветровых солитонов до конца не выяснен, поскольку исследование таких солитонов в реальных условиях представляет непреодолимые трудности. Изучение этого явления проводилось на экспериментальных установках [2, 3], а для теоретического анализа использовались уравнения Кортевега–Фриза и нелинейные уравнения типа уравнения Шредингера [4]. Обе теоретические модели заранее предполагают существование решений вида солитона.

В данной работе впервые показана возможность прямого численного моделирования процесса возникновения уединенного ветро-волнового солитона на основе уравнений мелкой воды. Численный алгоритм построен с использованием регуляризованных уравнений [7, 8, 9]. Основные параметры математической модели, положенной в основу описанных ниже результатов, соответствуют данным лабораторных экспериментов [2, 3].

1. Описание эксперимента

Согласно [2, 3], экспериментальная установка представляет собой кольцевой гидроканал с внешним и внутренним диаметрами $R_1 = 2.02$ м и $R_2 = 1.65$ м соответственно. Высота канала 0.4 м. Здесь и далее все величины приведены в системе СИ. Боковые стенки канала изготовлены из оргстекла, благодаря чему через них можно вести непосредственное наблюдение и видео- или фотосъемку волн.

Воздушный поток от вентилятора нагнетается в пространство между поверхностью воды и крышкой канала. Вентилятор располагается в центре канала, а поток воздуха, регулируемый специальным устройством, поступает в раструбы через герметические гибкие рукава. В нижней части раструбы имеется дно, благодаря которому поток воздуха выравнивается и входит в канал практически в горизонтальном направлении. Скорость ветра можно изменять от 3 до 15 м/сек. Фотография экспериментальной установки приведена на рис.1.

Регистрация волн проводилась с помощью четырех струнных волнографов, сигнал с которых подавался на вход АЦП-платы компьютера. Кроме того использовалось 5 видеокамер, расположенных по длине всего канала.

Солитоны возникали при изменении глубины от 0.05 до 0.14 м и при изменении скорости ветра от 12 до 15 м/сек.

В данных условиях процесс образования ветровых уединенных волн проходил следующие основные стадии. После включения вентилятора по прошествии некоторого периода установления на поверхности жидкости образуется последовательность из нескольких волн разных размеров. Характерные особенности этого первичного этапа могут несколько различаться от эксперимента к эксперименту и зависят от скорости ветра, глубины воды и свойств ее поверхности, а также наличия в ней примесей.

В результате нелинейного взаимодействия этих образований крупные волны догоняют и поглощают мелкие волны, причем такое поглощение сопровождается сложным процессом их взаимодействия. Одной из стадий этого процесса является формирование в канале двух солитонов, см. рис.2 и 3. В итоге формируется единственный импульс, подветренный склон которого более крутой, а наветренный – растянут, рис.4. При дальнейшем укручении переднего фронта происходит его



Рис. 1. Фотография экспериментальной установки. Кольцевой канал.

частичное обрушение, однако общая форма солитона сохраняется. Этот результирующий импульс является устойчивым и движется с постоянной скоростью и амплитудой до тех пор, пока не изменится ветровое воздействие. После выключения вентилятора движение солитона замедляется и он полностью затухает.



Рис. 2. Фотография экспериментальной установки. Фрагмент, демонстрирующий наличие двух солитонов.



Рис. 3. Фотография - два солитона в кольцевом канале.

2. Математическая модель и конечно-разностный алгоритм

Ширина аэрогидроканала составляет около 0.4 м, а его длина при среднем радиусе $R = (R_1 + R_2)/2$ равна 5.76 м, что существенно больше ширины канала. Пренебрегая поперечными возмущениями в жидкости, будем описывать происходящие в ней волновые явления в рамках одномерных плоских уравнений гидродинамики. Высота жидкости в канале составляет ~ 0.1 м, высота солитона также не превышает 0.15 м. Последнее позволяет использовать в качестве математической модели



Рис. 4. Ветровой солитон в кольцевом канале. Видно частичное обрушение переднего фронта. Реальный размер поля течения составляет $\sim 1 : 0.2$ м.

процесса систему уравнений мелкой воды для плоского одномерного течения. С учетом силы ветра и трения жидкости о стенки канала система уравнений мелкой воды имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} hu &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} hu + \frac{\partial}{\partial x} hu^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh^2}{2} \right) &= h \left(f - g \frac{\partial b}{\partial x} \right) - \mu u |u|. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь h и u – высота уровня жидкости и ее скорость, b – профиль дна, g – ускорение силы тяжести. В рассматриваемом случае дно канала плоское, поэтому в расчетах значение $b=0$. Сила f , действующая на поверхность жидкости, пропорциональна скорости ветра U , $f = \gamma U^2$, где $U = 3 - 15$ м/с. Коэффициент ветрового трения γ измеряется экспериментально. Его значение зависит от многих параметров, в том числе от состояния поверхности жидкости и от скорости ветра. Например, эксперименты, выполненные для Черного моря, дают значения коэффициента ветрового трения $\gamma \sim 10^{-2}$ ([12], стр.302), для Азовского моря $\gamma \sim 10^{-5}$. Оценки коэффициента ветрового трения для данного эксперимента дают значения в интервале 0.01–0.2, поэтому значение f будем рассматривать как параметр задачи. Другим параметром задачи является коэффициент трения о стенки и дно канала μ , который для данных экспериментов неизвестен.

В соответствии с условиями эксперимента в качестве начальных условий выберем возмущение профиля поверхности неподвижной жидкости в форме возвышения уровня в некоторой небольшой области. В качестве граничных условий поставим условия периодичности для скорости и высоты жидкости, что отражает течение жидкости в кольцевом канале.

Для численного решения задачи (1) будем использовать регуляризованную систему уравнений мелкой воды [7]–[9]. Эта система была получена на основе осреднения по малому интервалу времени уравнений мелкой воды, а также как баротропное приближение системы квазигазодинамических уравнений [10], [11]. Указанные уравнения содержат регуляризирующие, или сглаживающие добавки, которые позволяют использовать простые и эффективные численные алгоритмы для их реализации. Эти алгоритмы эффективны при расчетах нестационарных или колебательных движений газа и жидкости. Детальное тестирование численного алгоритма для одномерных течений в приближении мелкой воды приведено в [9].

Регуляризованная система уравнений мелкой воды для одномерных течений с

учетом внешних сил и неровностей дна имеет вид [8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} j_m &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} hu + \frac{\partial}{\partial x} j_m u + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh^2}{2} \right) &= \left(h - \tau \frac{\partial hu}{\partial x} \right) \left(f - g \frac{\partial b}{\partial x} \right) - \mu u |u| + \frac{\partial}{\partial x} \Pi, \\ j_m &= h(u - w), \end{aligned} \quad (2)$$

$$w = \frac{\tau}{h} \left(\frac{\partial hu^2}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} + gh \frac{\partial b}{\partial x} - hf \right),$$

$$\Pi = \tau u h \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{\partial b}{\partial x} - f \right) + \tau g h \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

где τ – параметр регуляризации, или сглаживания.

Введем равномерную сетку по координате x с шагом h_x , координатами узлов x_i , а также сетку по времени с шагом Δt . Для решения системы уравнений (2) используем явную по времени схему с центральными разностями. Значения газодинамических величин определяются в узлах сетки. Значения потоков определяются в полуцелых узлах. Разностная аппроксимация системы уравнений (2) имеет вид

$$\hat{h}_i = h_i - \Delta t \frac{j_{i+1/2} - j_{i-1/2}}{h_x}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_i &= \frac{1}{\hat{h}_i} \left(h_i u_i - \Delta t \frac{j_{m,i+1/2} u_{i+1/2} - j_{m,i-1/2} u_{i-1/2}}{h_x} - \Delta t \frac{g}{2} \frac{h_{i+1/2}^2 - h_{i-1/2}^2}{h_x} - \right. \\ &\quad \left. - \Delta t \mu u_i |u_i| + \Delta t f_i \left(\frac{h_{i+1/2} + h_{i-1/2}}{2} - \tau_i \frac{h_{i+1/2} u_{i+1/2} - h_{i-1/2} u_{i-1/2}}{h_x} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \Delta t \frac{\Pi_{i+1/2} - \Pi_{i-1/2}}{h_x} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где значения потоков в полуцелых точках вычисляются как

$$j_{m,i+1/2} = h_{i+1/2} (u_{i+1/2} - w_{i+1/2}), \quad (5)$$

$$w_{i+1/2} = \frac{\tau_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} \left(\frac{h_{i+1} u_{i+1}^2 - h_i u_i^2}{h_x} + g h_{i+1/2} \frac{h_{i+1} - h_i}{h_x} - h_{i+1/2} f_{i+1/2} \right). \quad (6)$$

Разностная аппроксимация величины $\Pi_{i+1/2}$ строится аналогично формулам для потока $w_{i+1/2}$. Символ (\wedge) указывает значение функции на верхнем временном слое. Параметр сглаживания вычисляется как

$$\tau_{i+1/2} = \alpha \frac{h_x}{\sqrt{g h_{i+1/2}}}. \quad (7)$$

Устойчивость и точность численного алгоритма зависит от параметра сглаживания τ , в котором числовой коэффициент $0 < \alpha < 1$ выбирается из условий точности и устойчивости решения. Условие устойчивости имеет вид условия Куранта

$$\Delta t = \beta \frac{h_x}{\sqrt{g h}}, \quad (8)$$

где число Куранта $0 < \beta < 1$ подбирается во время вычислений для обеспечения устойчивости счета. Значения μ и f рассматриваются как параметры задачи.

3. Численное моделирование образования солитона

Рассматривается задача в области $0 \leq x \leq L$, $L = 6$ м. Начальные условия для высоты выбираются в виде импульса шириной в шаг сетки h_x , $h(x, 0) = 0.2$. В начальный момент времени жидкость неподвижна $u(x, 0) = 0$.

Периодические граничные условия $u(x) = u(x + L)$, $h(x) = h(x + L)$ задаются в разностном виде как

$$\begin{aligned} h(1) &= h(N - 1), & h(N) &= h(2), \\ u(1) &= u(N - 1), & u(N) &= u(2). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь N – число точек разностной сетки по пространству, $i = 1, \dots, N$. Шаг по времени вычисляется в виде

$$\Delta t = \beta \frac{h_x}{\sqrt{g h_{max}(x, 0)}}.$$

Для численного исследования данной задачи была выполнена серия расчетов, в которых величина внешней силы f и коэффициент трения о стенки μ варьировались в пределах $0 - 100$ и $0.01 - 100$ соответственно. Сеточные параметры α и β изменялись в пределах $0.01 - 1$. Большинство расчетов выполнены на сетке с шагом $h_x = 0.01$. Численные эксперименты показали, что для данной задачи разностный алгоритм устойчив при выборе регуляризатора с коэффициентом $\alpha \sim 0.1 - 0.3$ и числом Куранта $\beta \sim 0.05 - 0.1$. При увеличении α решение сильно сглаживается, при его уменьшении решение теряет устойчивость. Для сохранения устойчивости расчета в этом случае требуется уменьшение шага по времени. Разностная схема является условно-устойчивой, поэтому при уменьшении числа Куранта ниже указанных значений численное решение не зависит от шага по времени.

Среди 70 выполненных расчетов для 11 вариантов были обнаружены солитонные решения. В остальных случаях начальное возмущение уровня жидкости затухало, либо формировалось нестационарное течение без образования солитонов. Расчеты показали, что формирование одиночного солитона происходит при соотношении силы ветра и коэффициента трения вида $f/\mu \sim 50 - 100$ [м/сек²]. Время формирования солитона занимает от 10 до 60 сек, весь расчет проводился до времени $t = 600$ сек. Полученные в различных расчетах солитоны несколько отличались по своей форме, скорости и способу их установления.

Типичный пример с образованием солитонного решения приведен на последовательности рис. 5–9. Здесь показано развитие одиночного солитона, полученное при

значениях $\mu = 0.1$, $f = 10$ и параметрах численного алгоритма $h_x = 0.01$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.05$. Видно развитие возмущения поверхности жидкости (рис.5,6), дальнейшая эволюция этого возмущения с образованием двух солитонов разного размера, последующее взаимодействие этих солитонов, в процессе которого солитон с большей амплитудой догоняет и поглощает солитон меньшего размера (рис.7,8). В результате этого процесса формируется одна незатухающая волна. Такой процесс формирования солитона полностью соответствует экспериментальным наблюдениям, детально описанным в [1–3] и проиллюстрированным на рис.2, 3 и 4. Наветренный фронт результирующего солитона более пологий, подветренный – более крутой (рис.8), высота солитона составляет порядка 0.15 м, что также соответствует наблюдаемой в эксперименте картине (рис.4).

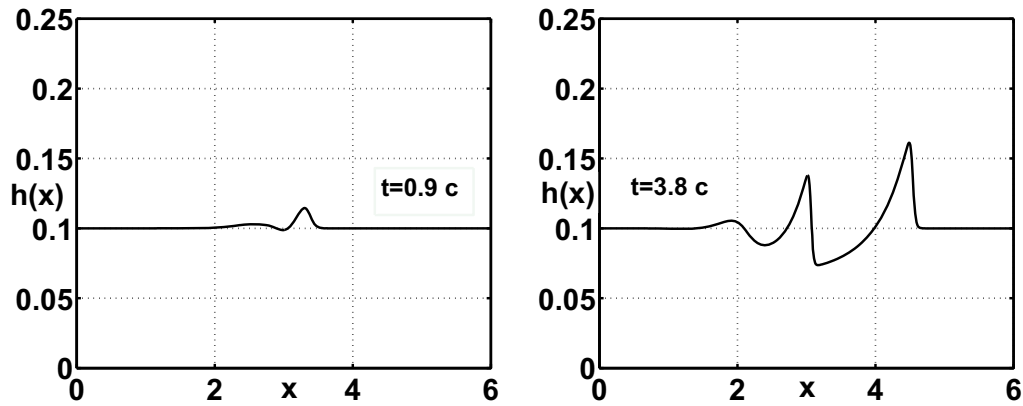


Рис. 5. Высота $h(x)$ при $t = 0.9$ и 3.8 с.

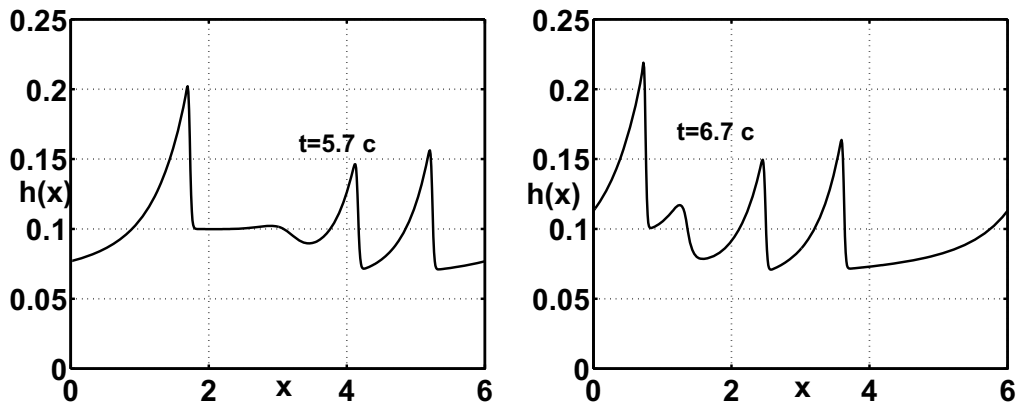
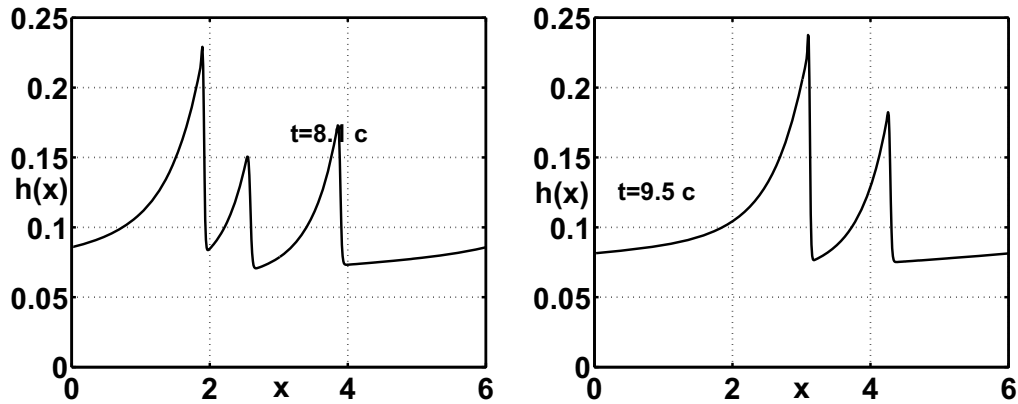
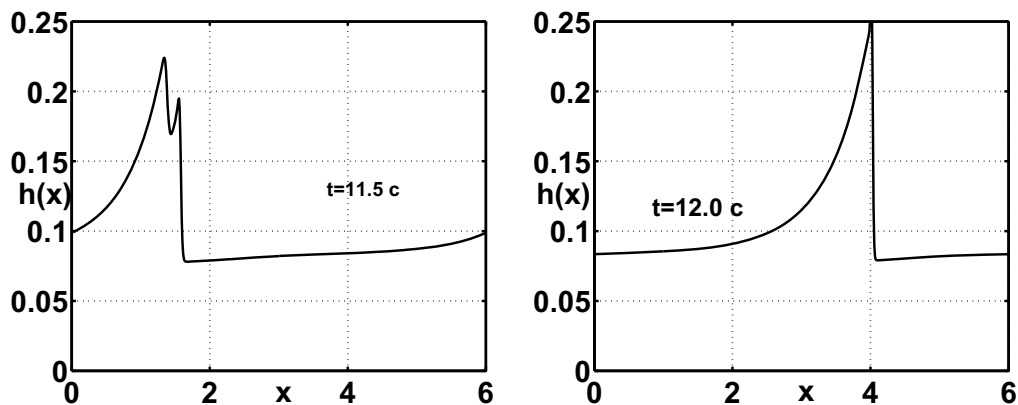


Рис. 6. Высота $h(x)$ при $t = 5.7$ и 6.7 с.

Скорость жидкости на момент времени $t = 12$ сек приведена на рис. 9. Видно, что солитон движется быстрее чем жидкость, на поверхности которой он сформи-

Рис. 7. Высота $h(x)$ при $t = 8.1$ и 9.5 с.Рис. 8. Высота $h(x)$ при $t = 11.5$ и 12.0 с.

ровался. Согласно теоретическим оценкам, сделанным в рамках модели уравнения Кортевега–де Фриза, для случая неподвижной жидкости скорость движения солитона C_s приближенно выражается соотношением [1–3]

$$C_s = c \left(1 + \frac{h_c}{2H} \right), \quad (10)$$

где $c = \sqrt{gH}$ – лагранжева скорость волн, h_c – высота солитона, H – глубина жидкости.

В соответствии с рис.9 относительно движущейся жидкости скорость солитона составляет $C_s \approx 1.6$. Согласно рис.8 $h_c \sim 0.15$, $H \sim 0.1$, то есть $1 + h_c/2H = 1.75$, $c \approx 1$ и, таким образом, оценка (10) дает $C_s \sim 1.75$, что качественно согласуется с данными расчета.

Как и в эксперименте, при выключении внешней силы импульс быстро затухает. Если в качестве начального условия задано не возвышение, а понижение

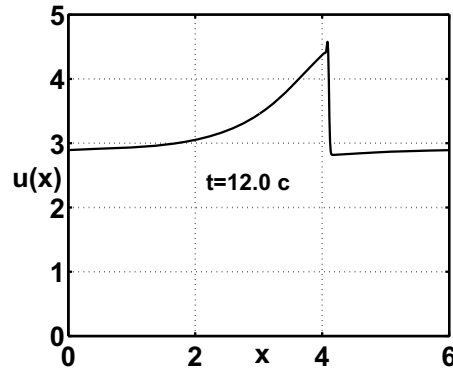


Рис. 9. Скорость солитона $u(x)$ при $t = 12.0$ с.

уровня жидкости, то как в натурном, так и в численном эксперименте солитон не формируется.

Существование солитона обусловлено аккуратным выполнением баланса гидродинамических нелинейных процессов, приводящих к увеличению крутизны переднего фронта волны, и дисперсионных и вязких процессов, направленных на расплывание уединенной волны, см., например, [5], [6]. Очевидно, вязкие эффекты играют важную роль в процессе формирования солитонного решения.

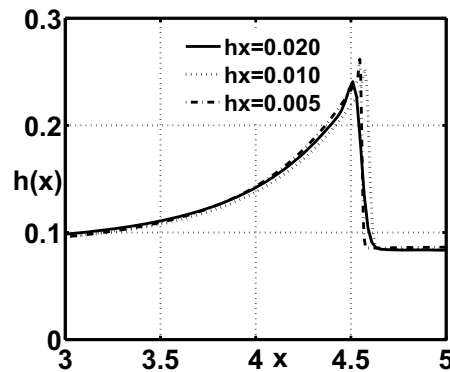


Рис. 10. Влияние сетки. Форма солитона в установившемся режиме $h(x)$ при $f = 10.0$, $\mu = 0.1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$ для $h_x = 0.025$, 0.010 и 0.005 .

В использованной авторами разностной схеме присутствует искусственная диссипация, величина которой пропорциональна шагу пространственной сетки. На рис. 10 приведены профили солитона в установившемся режиме, полученные в расчетах на сетках с шагами $h_x = 0.005$, 0.01 и 0.025 . Для всех трех сеток существует солитонное решение, при этом передний фронт солитона на более подробной сетке $h_x = 0.005$ оказывается немного круче, а его максимум немного выше, чем в расчетах на более грубых сетках. В целом форма солитона слабо зависит от шага сетки, что говорит о малой численной диссипации разностной схемы.

Таким образом, впервые показано, что в рамках модели уравнений мелкой воды с учетом силы ветра и силы трения удастся получить численное решение вида ветрового солитона. Процесс образования солитона, форма и характер его формирования и движения соответствуют данным экспериментов в ветро-волновом канале. Данный результат вносит существенный вклад в понимание механизма образования волно-ветровых уединенных волн.

Выводы

В работе приведено краткое описание экспериментов в аэрогидроканале и впервые построена математическая модель ветро-волнового солитона в рамках приближения мелкой воды.

Модель представляет собой уравнения мелкой воды для плоского одномерного течения с учетом силы трения о стенки и влияния ветра. Для численного моделирования используется регуляризованный вид уравнений. Полученные решения правильно отражают особенности формирования и поведения уединенных волн, обнаруженные в эксперименте.

Изучение механизма формирования ветро-волновых солитонов в лабораторном эксперименте достаточно трудоемко, а в природных условиях практически невозможно. Поэтому описание указанного явления в приближении уравнений мелкой воды и его исследование в численном эксперименте представляют большой интерес.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Б.В., Носов М.А. Физика цунами. – М.: Янус-К., 2005, 360с.
2. Глебова О.А., Кравцов Ал.В., Шелковников Н.К. Экспериментальное и численное исследование ветровых уединенных волн на воде // Изв. Акад. наук, серия физическая, 2002, т.66, №12, с.1727-1729.
3. Шелковников Н.К. Вынужденный солитон в жидкостях // Письма в ЖЭТФ, 2005, т.82, вып.10, с.720-723.
4. Кравцов Ал.Н., Кравцов В.В., Шелковников Н.К. Численный эксперимент по моделированию уединенных волн на поверхности жидкости в кольцевом канале // ЖВМ и МФ, 2004, т.44, №3, с.559-561
5. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. – М.: Мир, 1988, 696с.
6. Волобуев А.Н., Кошев В.И., Петров Е.С. Биофизические принципы гемодинамики. – М.: 2009, 183с.
7. Elizarova T.G., Vulatov O.V. Regularized shallow water equations and a new method of simulation of the open channel flows // Comp. Fluids. 2011, № 46, p.206-211.
8. Булатов О.В., Елизарова Т.Г. Регуляризованные уравнения мелкой воды и эффективный метод численного моделирования течений в неглубоких водоемах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2011, т.51, №1, с.170–184.
9. Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Никитина О.В. Моделирование одномерных течений мелкой воды на основе регуляризованных уравнений / Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша, 2011, № 33, 36 с.
10. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. – М.: Научный мир, 2007.
11. Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. – Москва-Ижевск, 2009.
12. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1982.

Поступила в редакцию 11.08.2011.