

Математические модели и численные методы в динамике газа и жидкости.

Проф. Елизарова Татьяна Геннадьевна

Спецкурс для аспирантов кафедры математики Физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, сентябрь--декабрь 2015г.

Объем курса 3 часа x 18 недель = 54 учебных часа.

Курс лекций предназначен для аспирантов кафедры математики, а также для всех научных сотрудников, аспирантов и студентов, интересующихся численными алгоритмами и математическим моделированием в задачах механики жидкости и газа.

В лекциях рассказывается о математических моделях, постановках задач и численных методах их решения для течений вязкого сжимаемого газа и вязкой несжимаемой жидкости.

Помимо классических подходов в курсе рассказывается о новых конечно-разностных схемах, основанных на сглаженных уравнениях гидро и газодинамики. Эти схемы оригинальны, быстро сходятся при сгущении сетки, очень просты в плане программной реализации и эффективны для расчетов на многопроцессорных вычислительных системах. Схемы позволяют проводить численное моделирование разнообразных нестационарных течений газа и жидкости в одномерной, двумерной и трехмерной постановках. В частности, рассчитывать дозвуковые и сверхзвуковые течения вязкого газа, а также течения вязкой несжимаемой жидкости и течений в приближении мелкой воды. Построенный алгоритм позволяет моделировать турбулентные течения.

Курс читается в осеннем семестре по понедельникам в ауд. 4-46, Физического факультета в 13-30 – 15-05.

Первая лекция состоится 14 сентября.

Желающие посещать спецкурс могут записаться, послав сообщение на адрес telizar@mail.ru, а также на сайте кафедры математики.

Более подробная информация о содержании курса имеется на сайте <http://elizarova.imamod.ru/>.

Программа курса

1. Введение. Историческая справка о развитии математических моделей для описания течений жидкости и газа. Вывод уравнений газовой динамики на основе законов сохранения: Процедура осреднения. Пространственные и пространственно-временные средние. Уравнение неразрывности. Преобразование Галилея. Интегральные законы сохранения. Переход к дифференциальным уравнениям. Диссипативный характер уравнений.

2. Классический способ замыкания – уравнения Навье-Стокса. Уравнения Эйлера. Нетрадиционный способ замыкания – квазигидродинамическая и квазигазодинамическая (КГД) системы. Вектор плотности потока массы и параметр релаксации. Барометрическая формула Лапласа. Дивергентный и недивергентный вид уравнений. Преобразование Галилея на примере одномерного течения.

3. Численные алгоритмы решения одномерных задач газовой динамики: Разностная аппроксимация одномерных нестационарных уравнений. Пример вязкого течения – задача о структуре ударной волны. Условия Рэнкина-Гюгонио. Расчет на основе уравнений Навье-Стокса и КГД системы. Сравнение с экспериментом для одноатомных газов. Введение искусственной диссипации. Пример невязкого течения - задача о распаде сильного разрыва.

4. Двумерные задачи газовой динамики и численные алгоритмы их решения: Запись уравнений в декартовой системе координат. Задача о течении газа в канале. Начальные и граничные условия. Пример точного решения – течение Куэтта. Безразмерный вид уравнений. Упрощенные формы уравнений газовой динамики. Задача Блазиуса и приближение Прандтля. Параболизированные уравнения. Приближение Стокса.

5. Разностные алгоритмы решения 2Д уравнений газовой динамики. Запись уравнений в потоковом виде и метод контрольного объема. Численное решение уравнений на прямоугольных сетках. Аппроксимация граничных условий с помощью фиктивных узлов. Искусственная диссипация. Особенности численного моделирования дозвуковых течений. Неотражающие граничные условия на свободных границах. Численное решение уравнений газовой динамики в областях сложной формы. Неструктурированные сетки и построение численного алгоритма. Примеры расчетов – нестационарное течение в канале со ступенькой. Течение в окрестности цилиндрического торца. Параметры торможения. Течение за обратным уступом. Течение в следе за цилиндром. Дорожка Кармана.

6. Элементы кинетической теории. Уравнение Больцмана. Интеграл столкновений. H-теорема. Построение моментных уравнений. Равновесная функция распределения и уравнения Эйлера. Уравнения Навье-Стокса.

Расчет средних величин в равновесном газе. Кинетические оценки для коэффициентов диффузии, вязкости и теплопроводности.

7. Релаксационный вид интеграла столкновений - БГК приближение и построение моментных уравнений. Варианты БГК-приближения и построение моментных уравнений для неравновесных газов. Уравнения для описания бинарной смеси не реагирующих газов. Численное моделирование течений разреженного газа. Свободномолекулярные течения. Течения с умеренными числами Кнудсена. Кнудсеновский слой и граничные условия Максвелла. Кинетическая модель разлет — столкновения. Метод прямого численного моделирования Монте-Карло. Демонстрация работы программы.

8. Разностная аппроксимация уравнения Больцмана. Модельное кинетическое уравнение и его свойства. Кинетический вывод КГД уравнений. Пример построения КГД системы для одномерного плоского течения. Моделирование неравновесных течений. Представление КГД уравнений в виде законов сохранения. Коэффициенты релаксации и их обобщения. Асимптотика стационарных КГД уравнений.

9. Моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости: Уравнения Навье-Стокса и квазигидродинамические КГД уравнения. Теорема об энтропии. Уравнения КГД и Навье-Стокса для несжимаемого течения. Теорема о диссипации кинетической энергии. Вид уравнений для плоского двумерного течения. Примеры точных решений – закон Архимеда, течения Куэтта и Пуазейля, нестационарные задачи Стокса и Рэлея. Приближение Буссинеска и модель тепловой конвекции. Примеры точных решений – течения в плоском вертикальном и горизонтальном слое.

10. Численные алгоритмы расчета вязких несжимаемых течений. Безразмерный вид. Естественные переменные и переменные «функция тока – вихрь скорости». Уравнения Пуассона для давления и функции тока. Постановка граничных условий. Примеры расчетов – течение в квадратной каверне, течение за обратным уступом. Тепловая конвекция в квадратной полости, моделирование колебательных режимов течений.

11. Уравнения мелкой воды и численные алгоритмы их решения. Условия для сухого дна. Примеры численного моделирования. Течения в Черном и Азовском морях. Замечания о современных многопроцессорных вычислительных системах и о параллельной реализации численных алгоритмов.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Москва, Наука, 1986.
2. Берд Г.А. Молекулярная газовая динамика. Москва, 1981.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. Москва, 1987.
4. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. Москва, 1980.
5. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика т.10. Москва, Физматлит, 2002.
6. Калиткин Н.Н. Численные методы. М., Наука, 1978.

7. Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно—временном осреднении. М.—Ижевск:НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009.
8. Шеретов Ю.В. Математические модели гидродинамики. Учебное пособие. Тверь, Тверской гос. Университет, 2004.
9. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. Москва, Научный мир, 2007.
10. <http://elizarova.imamod.ru/>