

Об однородном алгоритме численного моделирования волны цунами

Т. Г. Елизарова^{1*} А. В. Иванов^{2†}

¹Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН
Россия, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4

²Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Статья поступила 19.03.018; Подписана в печать 21.06.2018)

Изложен численный алгоритм, позволяющий однородным способом проводить моделирование волны цунами во всей зоне её распространения, начиная от исходного возмущения поверхности над глубоководной зоной вплоть до береговой линии, включая процессы наводнения и осушки береговой зоны. Алгоритм основан на использовании регуляризованных уравнений мелкой воды совместно с адаптивным выбором параметра регуляризации. В качестве теста приведён пример моделирования распространения волны цунами 2011 г. у побережья Японии.

PACS: 47.35.-i

УДК: 517.9, 532

Ключевые слова: уравнения мелкой воды, волна цунами, адаптивные пространственные сетки, оперативный прогноз.

ВВЕДЕНИЕ

Численное моделирование распространения волн цунами необходимо как для изучения их природы с использованием уже имеющихся натуральных измерений, так и для создания методик прогнозирования этих разрушительных природных явлений. Разработка и совершенствование подходов к этим задачам постоянно и широко освещается в литературе, например [1, 2].

Для типичных сейсмологических цунами длина волны существенно превосходит глубину соответствующей морской акватории, поэтому для математического моделирования такой задачи можно использовать уравнения гидродинамики в приближении мелкой воды (МВ). В этом приближении уравнения проинтегрированы по толщине слоя жидкости, и тем самым в модели пренебрегается вертикальными градиентами параметров и вертикальной скоростью [3].

Большие расстояния, на которые распространяется волна, и большие глубины соответствующей акватории позволяют использовать линеаризованные уравнения для описания её движения. Последнее упрощает численное решение задачи по сравнению с полной нелинейной постановкой. В то же время моделирование движения волны в прибрежной зоне и описание её наката на берег описывается полными нелинейными уравнениями. Для решения задачи в целом требуется шивание решений в глубоководной и мелководной областях, полученных по разным методикам, что представляет достаточно сложную задачу [1, 2]. Поэтому актуальной темой является разработка единого, сквозного алгоритма для численного решения задачи распространения волны и её взаимодействия с берегом. Желательно, чтобы алгоритм был достаточно эффек-

тивен и при необходимости позволял решать задачу в реальном времени.

Более 30 лет назад были разработаны численные алгоритмы решения уравнений газовой динамики, основанные на использовании уравнений, описывающих поведение газодинамических величин, которые предварительно сглажены по некоторому малому промежутку времени. Полученные таким образом уравнения были названы квазигазодинамическими (КГД), или регуляризованными уравнениями газовой динамики, например [4]. Приближение МВ является частным случаем уравнений газовой динамики, выписанных для баротропных течений. На основе указанных газодинамических алгоритмов были построены их модификации для уравнений МВ и алгоритмы их численного решения. В частности, в работе [5] выписаны регуляризованные уравнения мелкой воды (РУМВ) и приведены примеры их использования для решения задач о течении вблизи береговых зон, включая решение задачи о моделировании волны цунами в искусственном лотке, которое описывает цунами Окушири (яп. Okushiri tsunami), произошедшее в 1993 г. в долине Монай (Monai Valley). В [6] приведён пример численного моделирования нагонных явлений в акватории Азовского моря и показано, что используемая методика позволяет решать задачи на больших пространственных масштабах.

В данной работе в рамках регуляризованных уравнений мелкой воды построена математическая модель и показаны возможности её использования для сквозного однородного численного моделирования волны цунами на всей траектории её распространения, начиная от исходного возмущения водной поверхности, движения волны в глубоководной акватории, и заканчивая процессом взаимодействия набегающей волны на мелководное побережье, включая процессы наводнения и осушки. В качестве примера выбраны данные о волне цунами у побережья Японии в 2011 г.

*E-mail: telizar@mail.ru

†E-mail: alexvladiv@mail.ru

1. РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ

Систему РУМВ удобно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j}_m = 0, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (h\mathbf{u})}{\partial t} + \text{div} (\mathbf{j}_m \otimes \mathbf{u}) + \nabla \frac{gh^2}{2} = \\ = h^* (2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} - g\nabla b) - \mathbf{f} + \text{div } \Pi, \end{aligned} \tag{2}$$

$$h^* = h - \tau \text{div} (h\mathbf{u}), \tag{3}$$

$$\mathbf{j}_m = h (\mathbf{u} - \mathbf{w}), \tag{4}$$

$$\mathbf{w} = \frac{\tau}{h} [\text{div} (h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + gh\nabla (b + h)], \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \Pi = \tau \mathbf{u} \otimes [h (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + gh\nabla (b + h)] + \\ + \tau I [gh \text{div} (h\mathbf{u})]. \end{aligned} \tag{6}$$

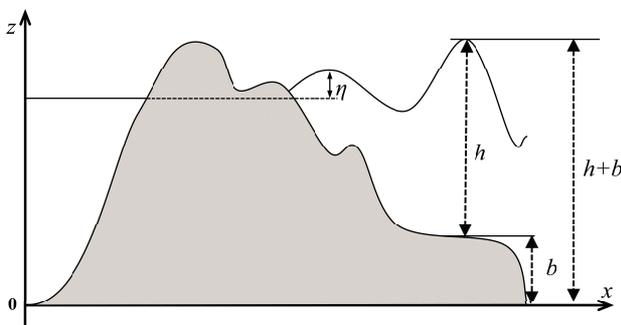


Рис. 1: Схематическое изображение используемых обозначений

Обозначения, используемые в РУМВ, поясняет рис. 1. Здесь $h(\mathbf{x}, t)$ — толщина слоя воды, отсчитываемая от дна, $b(\mathbf{x}, t)$ — уровень дна, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — вектор распределения скоростей, $\boldsymbol{\Omega}$ — параметр Кориолиса, \mathbf{f} — сила трения о дно, g — ускорение силы тяжести, направленное вниз вдоль оси z . За нулевую отметку принят минимальный уровень дна. Параметр регуляризации, являющийся малой величиной размерности времени, обозначен через τ , и его определение будет приведено ниже.

Численный алгоритм решения системы уравнений (1)–(6) строится по аналогии с алгоритмами численного решения квазигазодинамических уравнений и представляет собой явную по времени разностную схему, в которой используется интегроинтерполяционный метод с аппроксимацией пространственных производных в потоках центральными разностями. Данный алгоритм приведен, в частности,

в [5, 6], где он был опробован на тестовых задачах и задачах о течениях в морских акваториях.

Устойчивость численного алгоритма обеспечивается слагаемыми с коэффициентом регуляризации τ . Определим коэффициент регуляризации τ следующим образом:

$$\tau = \alpha \frac{l}{c}, \tag{7}$$

где l — характерный размер пространственной ячейки, который используются в численном алгоритме, например, в виде $l = \sqrt{s}$, где s — площадь ячейки, $c = \sqrt{gh}$ — скорость распространения длинной волны, α — численный коэффициент, выбираемый из условий точности и устойчивости счёта. Как правило $0 < \alpha < 1$, и в качестве базового значения можно выбирать $\alpha = 0.5$.

Одним из преимуществ алгоритма является то, что в задаче не требуется постановки специального вида граничных условий для береговой зоны, форма которой как правило, имеет сложный характер. Вместо этого ставится так называемое условие сухого дна, то есть области, в которой уровень жидкости считается нулевым $h = 0$.

Для описания «сухих областей» используется пространственный подход, детально описанный, например, в [5]. При этом выбирается некий параметр отсечения ε , который задаёт минимальное значение толщины слоя жидкости h , которое вычисляется на основе разностного алгоритма. При значениях $h < \varepsilon$ полагаются $h = \varepsilon$ и $\mathbf{u} = 0$.

Величина ε может быть связана с наклоном профиля дна в виде

$$\varepsilon > l |\nabla b|. \tag{8}$$

В областях сухого дна жидкость покоится, поэтому при малых h ставим ограничение для τ в виде

$$\begin{cases} \tau = \alpha l/c, & h > \varepsilon, \\ \tau = 0, & h \leq \varepsilon, \end{cases} \tag{9}$$

Для численного моделирования задачи о распространении приливной волны или волны цунами в акватории с большими перепадами глубин коэффициент регуляризации τ (7) следует выбирать специальным образом. В областях мелководья коэффициент τ может принимать большие значения, увеличивая искусственную диссипацию алгоритма. Задание нужной величины τ можно достигнуть путём построения пространственной сетки, адаптивной к батиметрии акватории. При этом площадь ячейки должна меняться пропорционально толщине слоя $s \sim h$, обеспечивая нужные значения τ .

Практика расчётов одномерных и двумерных задач ([5, 6]) показывает, что шаг по времени явной разностной схемы, построенной на основе РУМВ, пропорционален минимальному значению τ . Поэтому указанный

выбор коэффициента τ не приводит к неконтролируемому уменьшению вычислительного шага по времени при сгущения сетки в прибрежной зоне.

В силу сложности рельефа дна и береговой линии для построения адаптированных к глубине акватории пространственных сеток удобно использовать неструктурированные сетки, состоящие из треугольников. При этом сетки следует строить так, чтобы площадь соответствующего контрольного объёма была согласована с глубиной акватории и, возможно, с формой береговой линии. Разностный алгоритм для РУМВ на неструктурированных треугольных сетках был построен и опробован в [7].

Идея уменьшения шага пространственной сетки в зонах мелководья для численного моделирования задач цунами была высказана в статье [8] в связи с требованием: $\lambda_{min} \geq 2\Delta x$, т.е. чтобы на одну длину волны приходилось по крайней мере два шага сетки. Поскольку скорость распространения длинноволнового возмущения зависит только от глубины $(gH)^{1/2}$, то для того, чтобы избежать случая, при котором длина волны, соответствующая наименьшему периоду, станет меньше шага сетки, необходимо уменьшать шаг по пространству на мелководье, что приводит к сгущению всех разбиений в случае регулярных сеток. Применительно к использованию РУМВ такая идея оказывается адекватной указанному выше выбору коэффициента регуляризации τ путём построения пространственной сетки, адаптивной к батиметрии акватории.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

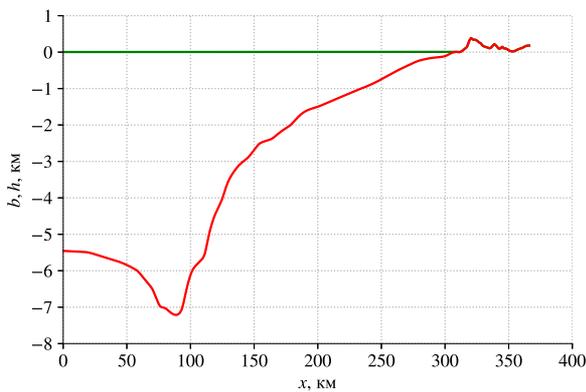


Рис. 2: Батиметрия дна и берега

Описанная выше постановка задачи была реализована для одномерной модели распространения волны цунами, зарегистрированной в 2011 г. у побережья Японии. Батиметрия дна и берега приведены на рис. 2 и заданы на равномерной сетке, состоящей из 1000 узлов с шагом $\Delta x = 366.124$ м. Длина расчётной области

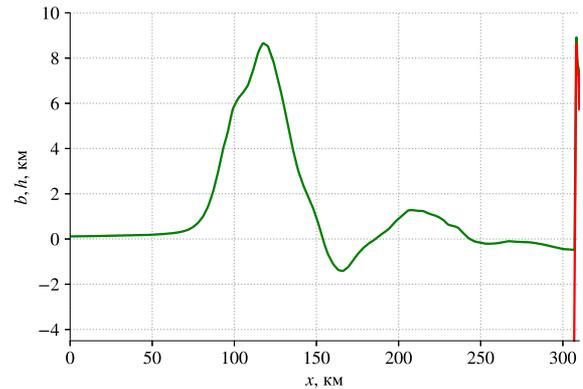


Рис. 3: Начальное возмущение $h_0(x)$. Максимальная высота $h = 8.66$ м

составляет 366.124 км. Расстояние от максимума возмущения до берега $L = 189.65$ км. Высота возмущения в начальный момент времени составляет $h_{max} = 8.66$ м. Форма начального возмущения поверхности приведена на рис. 3.

Слева, в зоне свободной границы, граничным условием является условие сноса, справа используются условия сухого дна, рис. 2. В начальный момент времени скорости во всех точках полагаются равными нулю, так как начальное возмущение вызвано сдвигом поверхности дна.

Результаты расчётов этой задачи, представленные ниже, отсчитывают высоту уровня воды и дна от нулевой отметки, за которую принято значение высоты невозмущённой поверхности $\xi_0 = b(0) + h_0$. Для численного решения РУМВ значения уровней дна и толщины слоя воды пересчитываются в положительные путём вычитания максимальной глубины: $b_{min} = -7214.31$ м.

Система РУМВ, записанная для плоского одномерного течения, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial j_m}{\partial x} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial j_m u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh^2}{2} \right) + gh \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \tag{11}$$

где:

$$j_m = h(u - w), \tag{12}$$

$$w = \frac{\tau}{h} \left[\frac{\partial (hu^2)}{\partial x} + gh \frac{\partial}{\partial x} (h + b) \right], \tag{13}$$

$$\Pi = \tau hu \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial x} (h + b) \right] + \tau gh \frac{\partial (hu)}{\partial x}. \tag{14}$$

Здесь не учитываются силы трения и сила Кориолиса, которые в данной задаче несущественны [2].

Опишем алгоритм построения пространственной сетки для этой задачи, шаги которой адаптированы к форме подстилающей поверхности и обеспечивают постоянство параметра регуляризации. В качестве базового значения параметра регуляризации τ_0 выберем значение, обеспечивающее начального возмущения, которое определяется заданным значением пространственного шага в зоне формирования волны цунами. А именно, используя имеющиеся координаты $\{x_k\}$, находим опорное значение коэффициента регуляризации $\tau = \tau_0$:

$$\tau_0 = \alpha \frac{\Delta x}{\sqrt{gh_{max}}}. \tag{15}$$

По заданной величине τ_0 и глубине определяется значение нового пространственного шага, затем находится положение следующей пространственной точки сетки

$$\Delta \tilde{x}_i = \tau_0 \sqrt{gh_i}, \quad \tilde{x}_i \in [x_k, x_{k+1}], \tag{16}$$

Глубина жидкости в начальный момент и форма дна в полученной точке аппроксимируются линейно по двум соседним точкам заданной сетки:

$$\tilde{b}_i = b_k + \frac{b_{k+1} - b_k}{\Delta x} (\tilde{x}_i - x_k), \tag{17}$$

$$\tilde{h}_i = h_k + \frac{h_{k+1} - h_k}{\Delta x} (\tilde{x}_i - x_k). \tag{18}$$

Таким образом мы получаем новую адаптивную сетку по пространству, число разбиений которой в данной задаче составило $N = 3931$, причём максимальный и минимальный шаги сетки равны $\Delta \tilde{x}_{max} = 365.96$ м, $\Delta \tilde{x}_{min} = 30.6$ м. Зависимость пространственного шага адаптивной сетки от координаты представлена на рис. 4.

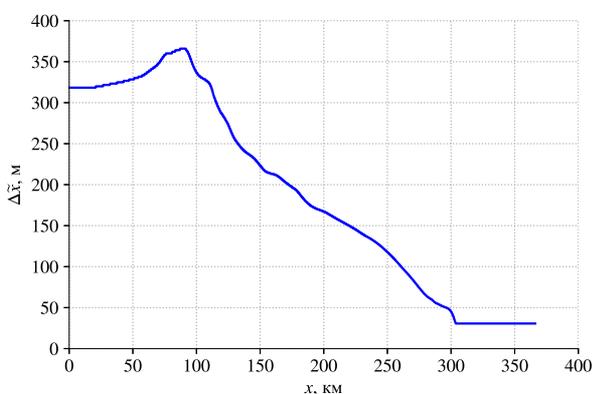


Рис. 4: Зависимость шага адаптивной сетки от координат

На рис. 5 представлены результаты численного моделирования наката волны цунами на берег, полученные при $\alpha = 0.5$. Характерное время достижения волной берега: $t \sim 2170$ с. Шаг по времени составляет

$\Delta t = \tau_0 = 0.137$ с. Обращает на себя внимание течение волны на неровность берега, последующее её преодоление, стекание волны назад, а также остатки воды и наблюдающиеся колебания её уровня в зоне понижения профиля береговой линии.

Численное решение слабо зависит от коэффициента α в интервале $\alpha \in [0.1, 0.7]$. Однако, при значениях $\alpha \leq 0.3$ искусственной диссипации оказывается не достаточно, и в значениях h вблизи берега в отдельные моменты времени наблюдаются численные осцилляции.

Для изучения сходимости решения по сетке следует уменьшать исходное значение τ_0 (15), что приводит к разрешению более высоких частот исходного возмущения. Поэтому для проверки точности построенного численного решения было проведено его сравнение с численным решением, полученным для этой задачи с использованием линейной теории длинных волн на исходной равномерной пространственной сетке.

Известно, что генерация цунами движениями дна океана и последующее движение волны вдали от береговой линии адекватно описывается в рамках линейной теории длинных волн (ЛТДВ). Уравнения в этом приближении сводятся к неоднородному волновому уравнению относительно смещения свободной поверхности. Метод, основанный на данной модели, описан, например, в [9]. В [2] показано, что этот метод свободен от дисперсии. На рис. 6 приведено сравнение расчёта в рамках РУМВ и ЛТДВ. Сравнение формы возмущения на произвольный момент времени показывает поразительно хорошее совпадение решений при их сравнении вдали от береговой линии. Последнее говорит как о высокой точности решения на основе РУМВ, так и о том, что на выбранных расстояниях движения волны в РУМВ алгоритме не наблюдается дисперсии решения.

Время расчёта задачи в рамках РУМВ до момента времени $T = 4000$ с. программой, написанной на языке C++ составляет 15 с. при использовании персонального компьютера с процессором Intel Core i3-3120M CPU 2.5 GHz. Для ускорения счета программа допускает дальнейшую оптимизацию и параллельную реализацию.

Первые успешные расчёты этой задачи были выполнены В. С. Поляковой [10].

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведено описание нового алгоритма для однородного численного моделирования волны цунами начиная от задания возмущения поверхности океана до взаимодействия волны с береговой зоной. Метод характеризуется большой скоростью счета и свободен от нефизичных дисперсионных эффектов. При учёте силы Кориолиса [6] и объёмных сил данный алгоритм может применяться для численного моделирования приливных волн.

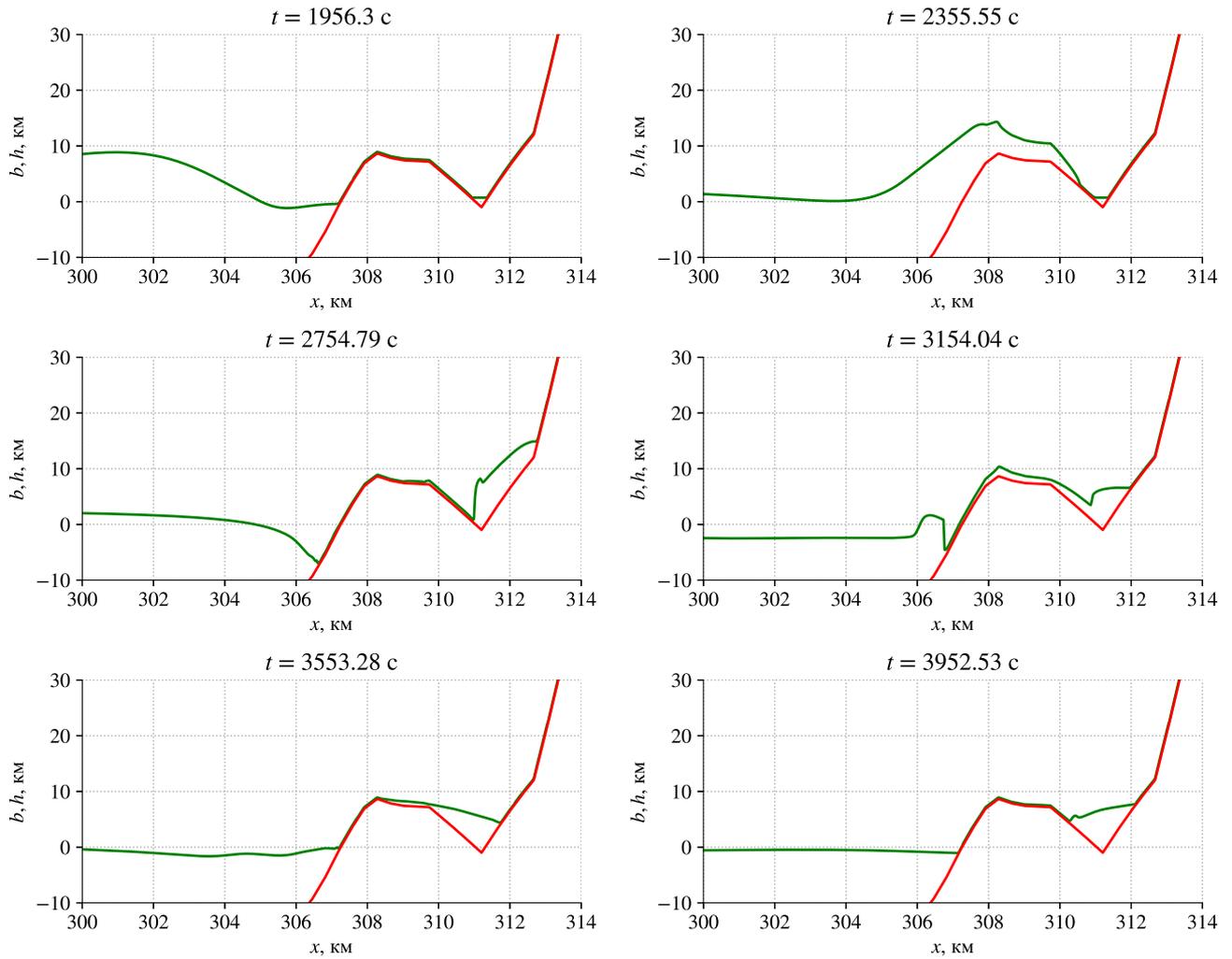


Рис. 5: Набегание на берег для различных моментов времени

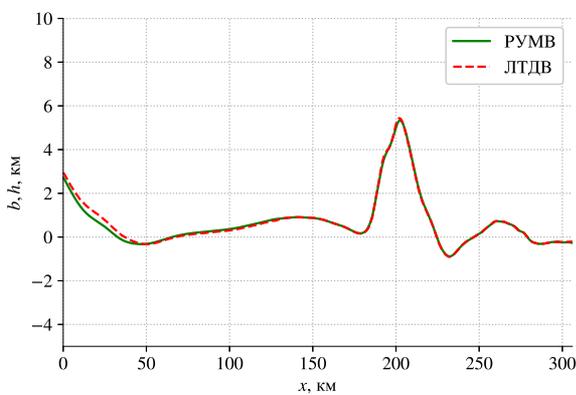


Рис. 6: Сравнение результатов РУМВ с решением в приближении ЛТДВ. $t = 550$ с

Алгоритм для адаптивных неструктурированных се-

ток опробован на одномерной задаче с реальной батиметрией и, по аналогии с [6, 7], может быть реализован в полной двумерной постановке. В целях ускорения счета алгоритм допускает эффективное распараллеливание на многопроцессорных системах с распределённой памятью.

Предложенный в работе метод может использоваться для оперативного прогнозирования приближения волны цунами к побережью с использованием данных от установленных в акватории глубоководных станций, которые фиксируют и передают на берег данные о вариации уровня морской поверхности [11].

Благодарности

Выражаем благодарность М. А. Носову и С. В. Колесову за привлечение внимания авторов к этой задаче, предоставление данных о батиметрии акватории и начальном возмущении, а также данных

для сравнения с численным решением в рамках линейной теории длинных волн.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 16-01-00048а.

-
- [1] *Kowalik Z.* Introduction to numerical modeling of tsunami waves. Fairbanks, January 2012.
- [2] *Levin B., Nosov M.* Physics of Tsunamis, second Edition. Springer International Publishing AG Switzerland, 2016, p. 388.
- [3] *Стокер Дж. Дж.* Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: ИЛ. 1959.
- [4] *Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В.* Теоретическое и численное исследование квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений. Журнал вычислительной математики и математической физики, 2001, т. 41, N 2, с. 239-255.
- [5] *Булатов О.В., Елизарова Т.Г.* ЖВМиМФ. 2016. **56**, № 4. С. 158.
- [6] *Елизарова Т.Г., Сабурин Д.С.* Математическое Моделирование. 2017. **29**, № 1. С. 45.
- [7] *Булатов О.В., Елизарова Т.Г.* Численный алгоритм решения регуляризованных уравнений мелкой воды на неструктурированных сетках. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 2014. № 21. с. 1–27.
- [8] *Носов М. А.* Математическое Моделирование. 2017. **29**, № 12. С. 63.
- [9] *Nosov M. A., Moshenceva A. V., Kolesov S. V.* *Pure Appl. Geophys.* 2013. **170**. Iss. 9–10. P. 1647.
- [10] *Полякова В.С.* Применение регуляризованных уравнений мелкой воды в численном моделировании волновых процессов в морских акваториях: диплом. работа. Москва. МГУ им. М. В. Ломоносова, 2017.
- [11] *Носов М. А., Григорьева С. С.* *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.* 2015. № 4. С. 109.

On a homogeneous algorithm for numerical modeling of a tsunami wave

T. G. Elizarova^a, A. V. Ivanov^b

¹*Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS
Moscow 125047, Russia*

²*Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia*

E-mail: ^atelizar@mail.ru, ^balexvladiv@mail.ru

The paper describes a new numerical algorithm that allows to simulate tsunami wave in a uniform manner throughout the entire its propagation zone, starting from the initial surface perturbation over the deepwater zone up to the shoreline, including the flooding and drying of a coastal zone. The algorithm is based on the regularized shallow water equations in conjunction with the adaptive choice of the regularization parameter. As an example, the tsunami wave propagation near the coast of Japan in 2011 is shown.

PACS: 47.35.-i.

Keywords: shallow water equations, tsunami wave, adaptive spatial grids, operational forecast.

Received 19 March 2018.

Сведения об авторах

1. Елизарова Татьяна Геннадьевна— доктор физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник; email: telizar@mail.ru.
 2. Иванов Александр Владимирович — студент (магистр); email: alexvladiv@mail.ru.
-