

УДК 519.633

## РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ ДВУХСЛОЙНОЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ<sup>1)</sup>

© 2018 г. Т. Г. Елизарова<sup>1</sup>, А. В. Иванов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ РАН;

<sup>2</sup>119991 Москва, Ленинские горы, МГУ)

e-mail: telizar@mail.ru; alexvladiv@mail.ru

Построены регуляризованные уравнения для описания гидродинамических течений в приближении двухслойной мелкой воды. На основе этих уравнений выписана конечно-разностная условно-устойчивая разностная схема метода конечного объема. Тестирование разностной схемы выполнено для серии известных тестовых одномерных задач, включая задачи о распаде разрыва. Библ. 28. Фиг. 12.

**Ключевые слова:** уравнения двухслойной мелкой воды, квазигазодинамический подход, регуляризованные уравнения, метод конечного объема, центрально-разностная схема, одномерные течения, транскритические течения.

**DOI:** 10.7868/S004446691805006X

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Согласно многочисленным работам, (см., например, [1]–[10]), система уравнений мелкой воды (МВ) для двухслойных течений может быть записана в виде системы четырех уравнений. Используемые обозначения пояснены на фиг. 1.

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \operatorname{div}(h_1 \mathbf{u}_1) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + \operatorname{div}(h_2 \mathbf{u}_2) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(h_1 \mathbf{u}_1)}{\partial t} + \operatorname{div}(h_1 \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1) + \nabla \frac{gh_1^2}{2} + gh_1 \nabla(rh_2 + b) = 0, \quad (3)$$

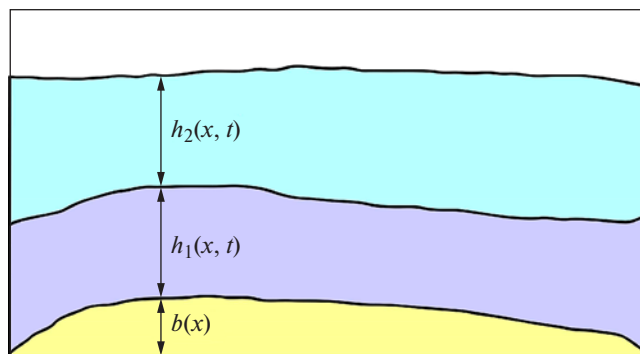
$$\frac{\partial(h_2 \mathbf{u}_2)}{\partial t} + \operatorname{div}(h_2 \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2) + \nabla \frac{gh_2^2}{2} + gh_2 \nabla(h_1 + b) = 0. \quad (4)$$

Здесь  $h_1(\mathbf{x}, t)$  и  $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t)$  – толщина и скорость нижнего слоя,  $h_2(\mathbf{x}, t)$  и  $\mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t)$  – толщина и скорость верхнего слоя,  $b(\mathbf{x})$  описывает топографию дна,  $g$  – ускорение силы тяжести. Нумерация слоев начинается с нижнего слоя (см. фиг. 1). Численный коэффициент  $r = \rho_2 / \rho_1 \leq 1$  представляет собой отношение плотностей верхнего и нижнего слоев. Очевидно, что при  $r > 1$  в жидкой двухслойной системе может формироваться неустойчивость Кельвина–Гельмгольца. Получающаяся при этом картина течения уже не может описываться уравнениями мелкой воды, при выводе которых предполагается, что вертикальная составляющая скорости течения пренебрежимо мала.

Система уравнений выписана без учета внешних сил (например, силы ветра или сил Кориолиса) и без учета сил вязкого трения, включая трение между слоями.

Выписанная система уравнений представляет собой две системы, каждая из которых описывает течение отдельного слоя. Связь между слоями осуществляется только за счет гидростатического давления и описывается неконсервативными нелинейными слагаемыми, включающими в себя  $h_1$  и  $h_2$ .

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 16–01–00048а).



Фиг. 1. Схематическое изображение двухслойной мелкой воды.

Последнее приводит к дополнительным неустойчивостям численного решения по сравнению с решением однослойных уравнений. Для преодоления возникающих проблем используются многочисленные приемы, включающие в себя методы расщепления, кинетические алгоритмы и методы, в которых для стабилизации решения вводится третий (промежуточный) слой исчезающей толщины. Описание разработанных численных алгоритмов и их особенностей, позволяющих преодолеть специфическую неустойчивость численных алгоритмов для двухслойных уравнений, имеется в работах [1]–[10] и приведенных в них ссылках.

Поскольку положенные в основу численного алгоритма уравнения (1)–(4) записаны в недивергентной форме, то получаемая разностная схема является неконсервативной и ее предельные разрывные решения в общем случае будут зависеть от способа задания схемной вязкости [11]. Проблема формулировки модели двухслойной мелкой воды в виде полной системы базисных законов сохранения была сформулирована в работе [12], где эта модель изучалась на дифференциальном уровне. В дальнейшем решению этой проблемы был посвящен целый ряд работ, обзор которых можно найти в [13]. В частности, в [14] была предложена система базисных законов сохранения, в которую вошли законы сохранения массы в слоях, закон сохранения полного импульса и закон сохранения скачка скорости на границе раздела слоев. Детальный анализ разрывных решений, допускаемых такой базисной системой законов сохранения, в том числе и в двумерном случае, приведен в [15].

Сопоставление численных алгоритмов, основанных на недивергентной (уравнения (1)–(4) и дивергентной (см. [14])) формах записи уравнений двухслойной мелкой воды, приведенное в разд. 9, показало, что обе разностные схемы дают очень близкие численные результаты. Поэтому в данной работе в основном применяется алгоритм, полученный путем аппроксимации недивергентной системы (1)–(4).

В работе приведен новый конечно-разностный алгоритм для численного решения двухслойных уравнений мелкой воды, в основе которого лежит квазигазодинамический подход (см. [16]–[18]). В рамках этого подхода ранее был разработан и опробован численный алгоритм решения уравнений мелкой воды, который показал свою эффективность при решении многочисленных задач в указанном приближении, (см. например, [19]–[23]).

Используемый в работе метод регуляризации уравнений для построения устойчивого численного алгоритма можно рассматривать как одну из разновидностей метода введения искусственной вязкости, вид которой согласован с особенностями исходной системы уравнений и ее точными решениями. К таким методам относится, например, способ введения искусственной вязкости, аппроксимирующей физическую вязкость в уравнениях гидродинамики при построении полностью консервативных схем для уравнений газовой динамики (см. [24]). Кинетически-согласованные схемы (см. [16]) и квазигазодинамические уравнения (см. [17], [18]) также можно отнести к такому классу моделей с дополнительной диссипацией.

Регуляризованный вид системы (1)–(4), выписанной с использованием квазигазодинамического подхода, имеет вид

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_1 = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_2 = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial(h_1 \mathbf{u}_1)}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{j}_1 \otimes \mathbf{u}_1) + \nabla \frac{gh_1^2}{2} + g(h_1 - \tau_1 \operatorname{div}(h_1 \mathbf{u}_1)) \nabla(rh_2 + b) - rgh_1 \nabla(\tau_2 \operatorname{div}(h_2 \mathbf{u}_2)) = \operatorname{div} \Pi_1, \quad (7)$$

$$\frac{\partial(h_2 \mathbf{u}_2)}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{j}_2 \otimes \mathbf{u}_2) + \nabla \frac{gh_2^2}{2} + g(h_2 - \tau_2 \operatorname{div}(h_2 \mathbf{u}_2)) \nabla(h_1 + b) - gh_2 \nabla(\tau_1 \operatorname{div}(h_1 \mathbf{u}_1)) = \operatorname{div} \Pi_2; \quad (8)$$

где

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\tau_1}{h_1} [\operatorname{div}(h_1 \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1) + gh_1 \nabla(b + h_1 + rh_2)], \quad (9)$$

$$\mathbf{j}_1 = h_1(\mathbf{u}_1 - \mathbf{w}_1), \quad (10)$$

$$\mathbf{w}_2 = \frac{\tau_2}{h_2} [\operatorname{div}(h_2 \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2) + gh_2 \nabla(b + h_1 + h_2)], \quad (11)$$

$$\mathbf{j}_2 = h_2(\mathbf{u}_2 - \mathbf{w}_2), \quad (12)$$

$$\Pi_1 = \tau_1 \mathbf{u}_1 \otimes [h_1(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 + gh_1 \nabla(b + h_1 + rh_2)] + \tau_1 I [gh_1 \operatorname{div}(h_1 \mathbf{u}_1)], \quad (13)$$

$$\Pi_2 = \tau_2 \mathbf{u}_2 \otimes [h_2(\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \mathbf{u}_2 + gh_2 \nabla(b + h_1 + h_2)] + \tau_2 I [gh_2 \operatorname{div}(h_2 \mathbf{u}_2)]. \quad (14)$$

Приведенные здесь уравнения основаны на недивергентном виде исходной системы (1)–(4) и являются обобщением ранее развитого подхода к регуляризации уравнений для описания однослойной модели мелкой воды (см. [19]– [23]).

В разд. 2 приведен способ построения регуляризованных уравнений для одномерного случая в приближении двухслойной мелкой воды (далее – *большая система*). В разд. 3 выписана соответствующая разностная схема. В разд. 4 выполнена проверка условия хорошей балансировки схемы. В разд. 5, 6, 7 и 8 приведены примеры численных расчетов известных тестовых задач о распространении межслойного интерфейса (interface propagation), распаде неподвижного гидродинамического разрыва, распаде гидродинамического разрыва внутреннего слоя жидкости вблизи наклонного берега (в этом случае требуется учет так называемого эффекта сухого дна), а также задачи о транскритическом течении слоев над неровностями дна.

В приложении приведена регуляризованная система уравнений МВ с использованием квазигидродинамического подхода (далее – *малая система*). Этот подход использовался для расчета тестовых задач и его особенности в сравнении с основным алгоритмом указаны в тексте. Расчеты показывают, что “малая система” проявляет сильные осцилляции на разрывах решения и слабо устойчива для случаев, когда плотности слоев близки между собой.

## 2. СГЛАЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Выпишем одномерные уравнения двухслойной мелкой воды:

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h_1 u_1) = 0; \quad (15)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h_2 u_2) = 0; \quad (16)$$

$$\frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial(h_1 u_1^2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{gh_1^2}{2} \right) + rgh_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} + gh_1 \frac{\partial b}{\partial x} = 0; \quad (17)$$

$$\frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial(h_2 u_2^2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{gh_2^2}{2} \right) + gh_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} + gh_2 \frac{\partial b}{\partial x} = 0. \quad (18)$$

По аналогии с построением регуляризованных уравнений газовой динамики и регуляризованных уравнений мелкой воды будем полагать, что в течение некоторого малого интервала времени (времени сглаживания  $\sim \tau$ ) скорость и высота слоя жидкости изменяются, принимая новые значения  $u^*$  и  $h^*$  соответственно. Для их определения мы разложим соответствующие функции в ряд Тейлора до первого члена по  $\tau$ :

$$u^* = u + \tau \frac{\partial u}{\partial t}, \quad h^* = h + \tau \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (19)$$

Используя (19), распишем  $h^* u^*$ , оставив только слагаемые с первым порядком по  $\tau$ :

$$h^* u^* = \left( h + \tau \frac{\partial h}{\partial t} \right) \left( u + \tau \frac{\partial u}{\partial t} \right) = hu + \tau \frac{\partial(hu)}{\partial t} + O(\tau^2).$$

Выразим производную по времени из уравнений (17), (18). Покажем это на примере регуляризации уравнений для описания течения нижнего слоя  $(h_1, u_1)$ :

$$\frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial t} = -\frac{\partial(h_1 u_1^2)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{gh_1^2}{2} \right) - rgh_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} - gh_1 \frac{\partial b}{\partial x}.$$

Введя обозначение

$$w_1 = \frac{\tau_1}{h_1} \left[ \frac{\partial(h_1 u_1^2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{gh_1^2}{2} \right) + rgh_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} + gh_1 \frac{\partial b}{\partial x} \right], \quad (20)$$

$$j_1 = h_1 (u_1 - w_1), \quad (21)$$

получим

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial j_1}{\partial x} = 0.$$

Аналогично

$$w_2 = \frac{\tau_2}{h_2} \left[ \frac{\partial(h_2 u_2^2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{gh_2^2}{2} \right) + gh_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} + gh_2 \frac{\partial b}{\partial x} \right], \quad (22)$$

$$j_2 = h_2 (u_2 - w_2), \quad (23)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial j_2}{\partial x} = 0.$$

Далее распишем каждое слагаемое уравнения (17) при  $h_1 = h_1^*$  и  $u_1 = u_1^*$ :

$$\begin{aligned} h_1^* (u_1^*)^2 &= \left( h_1 + \tau_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} \right) \left( u_1 + \tau_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 = \left( h_1 + \tau_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} \right) \left( u_1^2 + 2u_1 \tau_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + O(\tau_1^2) \right) = \\ &= u_1 \left( h_1 u_1 + \tau_1 \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial t} \right) + u_1 h_1 \tau_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + O(\tau^2) = u_1 j_1 + u_1 h_1 \tau_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + O(\tau^2). \end{aligned}$$

Выразим производную по времени из уравнения (17)

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = - \left[ u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + g \frac{\partial h_1}{\partial x} + rg \frac{\partial h_2}{\partial x} + g \frac{\partial b}{\partial x} \right]. \quad (24)$$

Распишем следующее слагаемое, используя (15):

$$\frac{1}{2} g (h_1^*)^2 = \frac{1}{2} g \left( h_1 + \tau_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} gh_1^2 + gh_1 \tau_1 \left[ -h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - u_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} \right] + O(\tau^2).$$

Введем обозначение

$$\Pi_1 = \tau_1 u_1 h_1 \left[ u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + g \frac{\partial h_1}{\partial x} + r g \frac{\partial h_2}{\partial x} + g \frac{\partial b}{\partial x} \right] + \tau_1 g h_1 \left[ h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} \right]. \quad (25)$$

Оставшиеся слагаемые содержат  $h_1^*$  вне производной и будут записаны в виде

$$h_1^* = \left( h_1 - \tau_1 \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial x} \right).$$

Последним шагом является преобразование производной  $\partial h_2^* / \partial x$

$$\frac{\partial h_2^*}{\partial x} = \frac{\partial \left( h_2 - \tau_2 \frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial x} \right)}{\partial x} = \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau_2 \frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial x} \right).$$

Таким образом, учитывая перечисленные выше преобразования, для уравнения (17) получаем

$$\frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial(u_1 j_1)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{g h_1^2}{2} \right) + g \left( h_1 - \tau_1 \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial x} \right) \left[ \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau_2 \frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial x} \right) + \frac{\partial b}{\partial x} \right] = \frac{\partial \Pi_1}{\partial x}.$$

Слагаемое

$$g \tau_1 \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau_2 \frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial x} \right) = O(\tau^2)$$

имеет второй порядок малости по  $\tau$  и им можно пренебречь.

Повторив те же действия для уравнения (18) и упростив выражения, получим систему сглаженных уравнений для второго слоя.

Таким образом, построена следующая регуляризованная система для двухслойных уравнений мелкой воды, являющаяся частным случаем выписанной выше системы (5)–(14):

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial j_1}{\partial x} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial j_2}{\partial x} = 0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial(u_1 j_1)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{g h_1^2}{2} \right) + g \left( h_1 - \tau_1 \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial x} \right) \left[ r \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial x} \right] - r g h_1 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau_2 \frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial x} \right) = \frac{\partial \Pi_1}{\partial x}, \quad (28)$$

$$\frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial(u_2 j_2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{g h_2^2}{2} \right) + g \left( h_2 - \tau_2 \frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial x} \right) \left[ \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial x} \right] - g h_2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau_1 \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial x} \right) = \frac{\partial \Pi_2}{\partial x}, \quad (29)$$

где

$$w_1 = \frac{\tau_1}{h_1} \left[ \frac{\partial(h_1 u_1^2)}{\partial x} + g h_1 \frac{\partial}{\partial x} (h_1 + r h_2 + b) \right], \quad (30)$$

$$j_1 = h_1 (u_1 - w_1); \quad (31)$$

$$w_2 = \frac{\tau_2}{h_2} \left[ \frac{\partial(h_2 u_2^2)}{\partial x} + g h_2 \frac{\partial}{\partial x} (h_1 + h_2 + b) \right], \quad (32)$$

$$j_2 = h_2 (u_2 - w_2), \quad (33)$$

$$\Pi_1 = u_1 h_1 \tau_1 \left[ u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial x} (h_1 + r h_2 + b) \right] + g h_1 \tau_1 \frac{\partial (h_1 u_1)}{\partial x}, \quad (34)$$

$$\Pi_2 = u_2 h_2 \tau_2 \left[ u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial x} (h_1 + h_2 + b) \right] + g h_2 \tau_2 \frac{\partial (h_2 u_2)}{\partial x}. \quad (35)$$

### 3. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

По аналогии с алгоритмами из [19], [20], разработанными для квазигазодинамических уравнений, для численного решения регуляризованных уравнений (26)–(35) будем использовать явную по времени разностную схему с аппроксимацией всех пространственных производных центральными разностями.

Значения искоемых переменных  $h_1(x, t)$ ,  $h_2(x, t)$ ,  $u_1(x, t)$ ,  $u_2(x, t)$  зададим в узлах пространственной сетки  $i$ . Значения переменных в полужелтых пространственных точках  $i + 1/2$  вычисляются как среднее арифметическое значений в соседних точках

$$\begin{aligned} b_{i+1/2} &= \frac{b_i + b_{i+1}}{2}, & (\tau_l)_{i+1/2} &= \frac{(\tau_l)_i + (\tau_l)_{i+1}}{2}, \\ (h_l)_{i+1/2} &= \frac{(h_l)_i + (h_l)_{i+1}}{2}, & (u_l)_{i+1/2} &= \frac{(u_l)_i + (u_l)_{i+1}}{2}, \quad l = 1, 2. \end{aligned}$$

Тогда, если  $\Delta t$  и  $\Delta x$  – шаги по времени и координате соответственно, получаем

$$(w_1)_{i+1/2} = \frac{(\tau_1)_{i+1/2}}{(h_1)_{i+1/2}} \left( \frac{(h_1 u_1^2)_{i+1} - (h_1 u_1^2)_i}{\Delta x} + g (h_1)_{i+1/2} \frac{(h_1)_{i+1} + r (h_2)_{i+1} + b_{i+1} - (h_1)_i - r (h_2)_i - b_i}{\Delta x} \right); \quad (36)$$

$$(w_2)_{i+1/2} = \frac{(\tau_2)_{i+1/2}}{(h_2)_{i+1/2}} \left( \frac{(h_2 u_2^2)_{i+1} - (h_2 u_2^2)_i}{\Delta x} + g (h_2)_{i+1/2} \frac{(h_1)_{i+1} + (h_2)_{i+1} + b_{i+1} - (h_1)_i - (h_2)_i - b_i}{\Delta x} \right). \quad (37)$$

Аналогично определим

$$\begin{aligned} (\Pi_1)_{i+1/2} &= (\tau_1)_{i+1/2} (u_1)_{i+1/2} (h_1)_{i+1/2} \left( (u_1)_{i+1/2} \frac{(u_1)_{i+1} - (u_1)_i}{\Delta x} + \right. \\ &\left. + g \frac{(h_1)_{i+1} + r (h_2)_{i+1} + b_{i+1} - (h_1)_i - r (h_2)_i - b_i}{\Delta x} \right) + g (h_1)_{i+1/2} (\tau_1)_{i+1/2} \frac{(h_1)_{i+1} (u_1)_{i+1} - (h_1)_i (u_1)_i}{\Delta x}; \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} (\Pi_2)_{i+1/2} &= (\tau_2)_{i+1/2} (u_2)_{i+1/2} (h_2)_{i+1/2} \left( (u_2)_{i+1/2} \frac{(u_2)_{i+1} - (u_2)_i}{\Delta x} + \right. \\ &\left. + g \frac{(h_1)_{i+1} + (h_2)_{i+1} + b_{i+1} - (h_1)_i - (h_2)_i - b_i}{\Delta x} \right) + g (h_2)_{i+1/2} (\tau_2)_{i+1/2} \frac{(h_2)_{i+1} (u_2)_{i+1} - (h_2)_i (u_2)_i}{\Delta x}. \end{aligned} \quad (39)$$

Тогда имеем

$$(j_1)_{i+1/2} = (h_1)_{i+1/2} ((u_1)_{i+1/2} - (w_1)_{i+1/2}), \quad (40)$$

$$(j_2)_{i+1/2} = (h_2)_{i+1/2} ((u_2)_{i+1/2} - (w_2)_{i+1/2}). \quad (41)$$

Используя (26), (27), (40), (41), аппроксимируем первые уравнения:

$$\frac{(h_1)_i^{k+1} - (h_1)_i^k}{\Delta t} + \frac{(j_1)_{i+1/2} - (j_1)_{i-1/2}}{\Delta x} = 0, \quad (42)$$

$$\frac{(h_2)_i^{k+1} - (h_2)_i^k}{\Delta t} + \frac{(j_2)_{i+1/2} - (j_2)_{i-1/2}}{\Delta x} = 0. \quad (43)$$

Введем также аппроксимацию производных от потоков, обозначив  $s_l = \frac{\partial(h_l u_l)}{\partial x}$ :

$$(s_1)_{i+1/2} = \frac{(h_1)_{i+1}(u_1)_{i+1} - (h_1)_i(u_1)_i}{\Delta x}, \quad (44)$$

$$(s_2)_{i+1/2} = \frac{(h_2)_{i+1}(u_2)_{i+1} - (h_2)_i(u_2)_i}{\Delta x}. \quad (45)$$

Уравнения (28), (29) аппроксимируются следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{(h_1)_i^{k+1}(u_1)_i^{k+1} - (h_1)_i^k(u_1)_i^k}{\Delta t} + \frac{(u_1)_{i+1/2}(j_1)_{i+1/2} - (u_1)_{i-1/2}(j_1)_{i-1/2}}{\Delta x} + \frac{g((h_1)_{i+1/2})^2 - ((h_1)_{i-1/2})^2}{2\Delta x} + \\ & + rg(h_1^*)_i \frac{(h_2)_{i+1/2} - (h_2)_{i-1/2}}{\Delta x} - rg(h_1^{**})_i \frac{(s_2)_{i+1/2}(\tau_2)_{i+1/2} - (s_2)_{i-1/2}(\tau_2)_{i-1/2}}{\Delta x} + g(h_1^*)_i \frac{b_{i+1/2} - b_{i-1/2}}{\Delta x} = \\ & = \frac{(\Pi_1)_{i+1/2} - (\Pi_1)_{i-1/2}}{\Delta x}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(h_2)_i^{k+1}(u_2)_i^{k+1} - (h_2)_i^k(u_2)_i^k}{\Delta t} + \frac{(u_2)_{i+1/2}(j_2)_{i+1/2} - (u_2)_{i-1/2}(j_2)_{i-1/2}}{\Delta x} + \frac{g((h_2)_{i+1/2})^2 - ((h_2)_{i-1/2})^2}{2\Delta x} + \\ & + g(h_2^*)_i \frac{(h_1)_{i+1/2} - (h_1)_{i-1/2}}{\Delta x} - g(h_2^{**})_i \frac{(s_1)_{i+1/2}(\tau_1)_{i+1/2} - (s_1)_{i-1/2}(\tau_1)_{i-1/2}}{\Delta x} + g(h_2^*)_i \frac{b_{i+1/2} - b_{i-1/2}}{\Delta x} = \\ & = \frac{(\Pi_2)_{i+1/2} - (\Pi_2)_{i-1/2}}{\Delta x}. \end{aligned} \quad (47)$$

Здесь подразумевается, что:

$$(h_l^*)_i = (h_l^{**})_i - (\tau_l)_i \frac{(h_l)_{i+1/2}(u_l)_{i+1/2} - (h_l)_{i-1/2}(u_l)_{i-1/2}}{\Delta x}, \quad l = 1, 2. \quad (48)$$

В уравнениях (28), (29) существуют различные способы разностной аппроксимации слагаемых  $h_1^{**}$  и  $h_2^{**}$ , а следовательно  $h_1^*$  и  $h_2^*$  соответственно. Как будет показано в следующем разделе, выбор способа аппроксимации этих величин влияет на точность выполнения условия гидростатического равновесия. Укажем два способа аппроксимации.

Способ 1:

$$(h_l^{**})_i = \frac{(h_l)_{i+1/2} + (h_l)_{i-1/2}}{2}, \quad l = 1, 2. \quad (49)$$

Способ 2:

$$(h_l^{**})_i = (h_l)_i, \quad l = 1, 2. \quad (50)$$

Устойчивость численного алгоритма обеспечивается слагаемыми с коэффициентом  $\tau$ . Определим регуляризатор  $\tau$  с помощью двух независимых коэффициентов  $\tau_1$  и  $\tau_2$  для каждого слоя соответственно

$$\tau_1 = \alpha_1 \frac{\Delta x}{c_1}, \quad c_1 = \sqrt{gh_1}, \quad (51)$$

$$\tau_2 = \alpha_2 \frac{\Delta x}{c_2}, \quad c_2 = \sqrt{gh_2}. \quad (52)$$

Величина  $\tau_i$  пропорциональна шагу пространственной сетки  $\Delta x$  с коэффициентом  $\alpha_i$ , где  $0 < \alpha_i < 1$  – число, выбираемое из условий точности и устойчивости счета. Условие устойчивости имеет вид условия Куранта, где шаг по времени выбирается по формуле

$$\Delta t = \beta \left( \frac{\Delta x}{c} \right)_{\min}. \quad (53)$$

Достаточное условие устойчивости разностной схемы в линейном приближении для уравнений мелкой воды вида (53) получено в [22].

Границы расчетной области располагаются в полуцелых точках. В разностном виде граничные условия ставятся с использованием фиктивных узлов и аппроксимации второго порядка точности.

#### 4. УСЛОВИЯ ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Для удобства представления расчетов введем следующие обозначения:

$$\xi_1(x, t) = h_1(x, t) + b(x), \quad (54)$$

$$\xi_2(x, t) = h_2(x, t) + h_1(x, t) + b(x). \quad (55)$$

А также, при условии  $\alpha_1 = \alpha_2$ , для удобства будем обозначать

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha. \quad (56)$$

Удовлетворение алгоритма условию гидростатического равновесия, которое в данном контексте понимается как условие “хорошей балансировки” (well balanced) означает, что вычислительная схема не нарушает естественного условия, состоящего в том, что в отсутствие внешних сил покоящиеся горизонтальные слои жидкости не могут самопроизвольно приходить в движение над неровным дном.

Для приведенной выше двухслойной системы мелкой воды это условие имеет вид

$$h_2 = \text{const}, \quad h_1 + b = \text{const}, \quad u_1 = u_2 = 0$$

и проверяется непосредственной подстановкой их в уравнения двухслойной мелкой воды и в их регуляризованный аналог. Задача гидростатического равновесия является одним из немногих простых аналитических решений системы двухслойных уравнений мелкой воды.

Обеспечение этого условия для численных алгоритмов решения двухслойной задачи зависит от используемого численного алгоритма. Соответствующие трудоемкие подходы описаны, например, в [1], [2].

Для аппроксимации способом 1 (см. (49)) это условие точно удовлетворяет разностной схеме, что проверяется непосредственной подстановкой разностного решения  $(u_1)_i = (u_2)_i = 0$ ,  $(h_1)_i + b_i = \text{const}$ ,  $(h_2)_i = \text{const}$  в систему разностных уравнений (36)–(47) для стационарной задачи. Аналогичное условие было проверено для однослойного случая в [19].

Для способа 2 (см. (50)) подстановка условия равновесия в схему (36)–(47) приводит к необходимости выполнения соотношениям вида

$$(h_l)_i = \frac{(h_l)_{i+1/2} + (h_l)_{i-1/2}}{2}, \quad l = 1, 2.$$

Для численной проверки условия равновесия в применении к двухслойной жидкости были выбраны две задачи с начальными условиями

$$h_2(x, t = 0) = \text{const} = 2,$$

$$h_1(x, t = 0) + b(x) = \text{const} = 2,$$

$$u_1(x, t = 0) = u_2(x, t = 0) = 0,$$

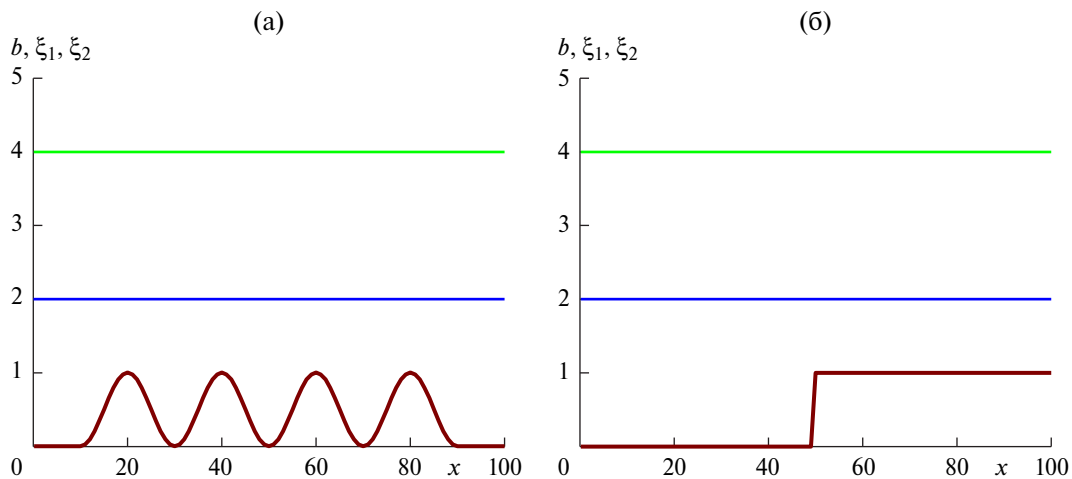
для двух вариантов формы дна – гладкий профиль

$$b(x) = \begin{cases} 0.5(\cos(0.1\pi x) + 1), & 10 \leq x \leq 90, \\ 0, & x < 10 \cup x > 90, \end{cases}$$

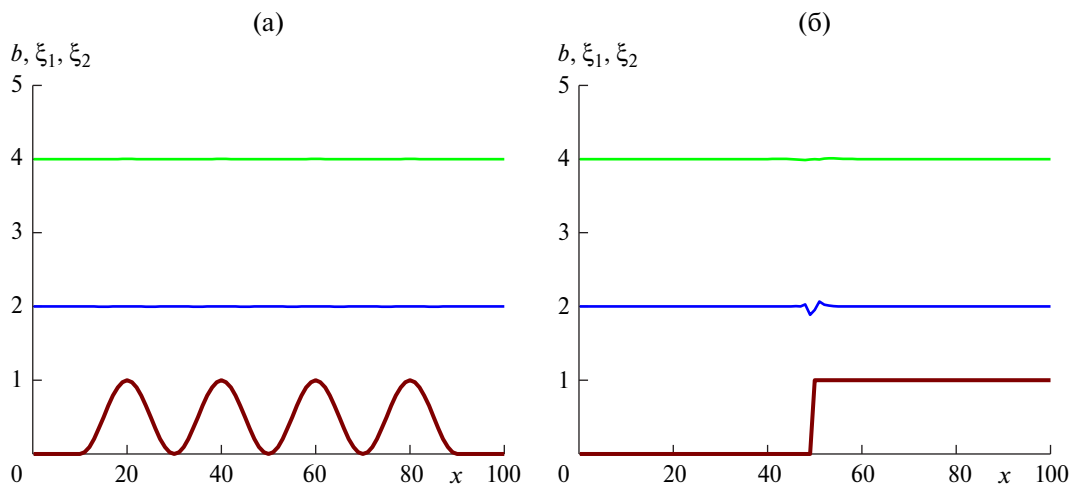
и разрывный профиль в виде ступеньки

$$b(x) = \begin{cases} 0, & x < 50, \\ 1, & x \geq 50. \end{cases}$$





Фиг. 2. Способ 1. Условие гидростатического равновесия. Разбиение  $N = 100$ . а) – гладкое дно; б) – разрывное дно.



Фиг. 3. Способ 2. Условие гидростатического равновесия. Разбиение  $N = 100$ . а) – гладкое дно; б) – разрывное дно.

Расчет проводился при постоянных коэффициентах  $r=0.5$ ,  $\beta=0.1$ ,  $\alpha=0.3$  и при разбиении сетки  $N = 100$ . Стоит отметить, что далее везде используется значение коэффициента  $\beta = 0.1$ . Возможно его уменьшение для получения более подробных сеток по времени, но в тестах, приведенных ниже, это не требовалось. Здесь также величина  $\alpha$  соответствует наиболее устойчивому значению для регуляризованной системы (см. [19]), хотя очевидно, что условие гидростатического равновесия будет выполняться при любых значениях этих коэффициентов. Время счета  $t = 1$ .

Для способа 1 результаты расчетов показаны на фиг. 2. Здесь величину погрешности для расчетов задач с гладким и разрывным дном можно считать равной величине машинного нуля – около  $10^{-15} - 10^{-16}$ .

Для способа 2 результаты расчета приведены на фиг. 3. Видно, что условие равновесия здесь выполняется приближенно. Ниже в таблицах приведены максимальные величины пиков, наблюдающихся в расчетах для этого способа. Для задачи с гладким дном данные табл. 1 показывают быструю сходимость решения при уменьшении шага сетки. Для задачи с разрывным профилем дна (табл. 2) сходимость по сетке не наблюдается.

В дальнейших расчетах используется способ 1, который обеспечивает удовлетворение алгоритма условию хорошей балансировки.

Таблица 1. Гладкое дно

	$N = 100$	$N = 200$	$N = 500$	$N = 1000$
$h_1$	$1.68 \times 10^{-3}$	$4.96 \times 10^{-4}$	$8.42 \times 10^{-5}$	$2.16 \times 10^{-5}$
$h_2$	$5.53 \times 10^{-4}$	$1.68 \times 10^{-4}$	$3.15 \times 10^{-5}$	$8.25 \times 10^{-6}$

Таблица 2. Дно с разрывом

	$N = 100$	$N = 200$	$N = 500$	$N = 1000$
$h_1$	0.13	0.16	0.15	0.14
$h_2$	0.025	0.025	0.021	0.021

## 5. ТЕСТ 1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИНТЕРФЕЙСНОГО СКАЧКА

Этот тест детально исследовался в [1]–[4]. Здесь мы основываемся на постановке из [1]. Рассматривается система с ровным дном ( $b(x) = 0$ ), в которой  $g = 9.81$ ,  $r = 0.98$  и начальная толщина слоев задана в виде

$$\begin{aligned}
 h_2(x, t = 0) &= \begin{cases} 0.5, & x < 0.5, \\ 0.55, & x \geq 0.5, \end{cases} \\
 h_1(x, t = 0) &= \begin{cases} 0.5, & x < 0.5, \\ 0.45, & x \geq 0.5, \end{cases} \\
 u_1(x, t = 0) &= u_2(x, t = 0) = 2.5.
 \end{aligned}$$

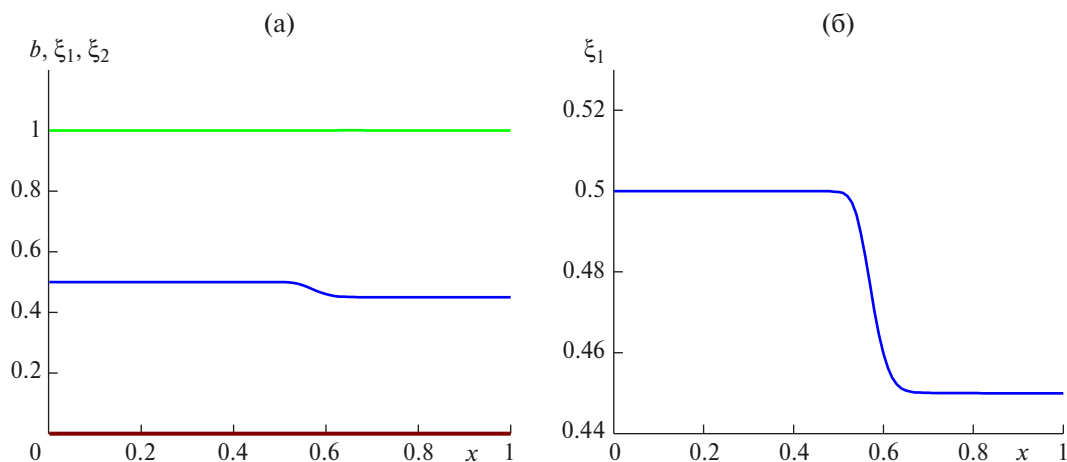
В [1] данная задача решалась для случая  $x \in [0, 1]$ , результаты продемонстрированы для времени  $t = 0.05$  и числа точек сетки  $N = 100$ . При этом использовались разработанные авторами в [1] устойчивые схемы с расщеплением по времени первого и второго порядка точности. Эти схемы удовлетворяют условию *well balance* и дискретному энтропийному неравенству.

Результат для того же момента времени, полученный с использованием регуляризованных уравнений мелкой воды для  $N = 100$  и  $\alpha = 0.3$ , приведен на фиг. 4.

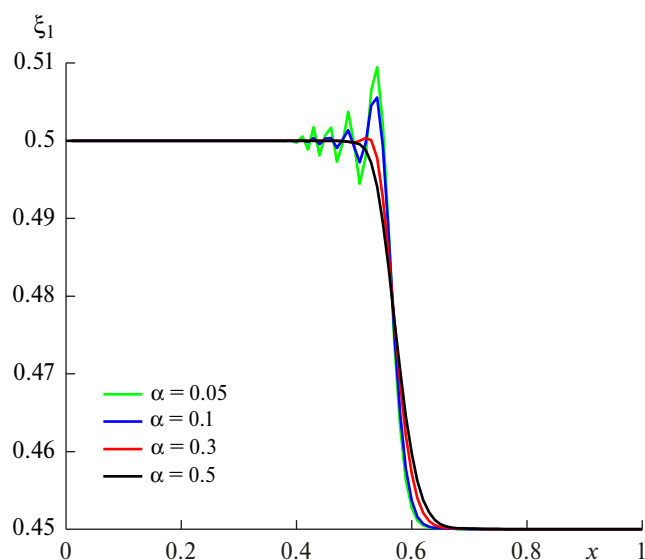
Зависимость численного решения от коэффициента регуляризации  $\alpha$  представлена на фиг. 5 ( $N = 100$ ). При приближении к  $\alpha = 0.05$ , как и в [19], наблюдается появление осцилляций и последующее нарушение устойчивости численного решения.

Как пишут авторы работы [1], в численном решении в окрестности фронта наблюдаются осцилляции, которые видны при увеличении масштаба рисунка по  $x$ . Однако сами осцилляции малы на фоне общей картины, они наблюдаются при  $x \in [0.5, 0.6]$ , а их амплитуда около 0.01 в расчетах по схеме с первым порядком точности и 0.003 в расчетах со вторым порядком точности. Из анализа результатов следует, что полученные в наших расчетах колебания в зоне  $x \in [0.5, 0.6]$  для  $\alpha = 0.1$  практически совпадают по амплитуде с колебаниями решения второго порядка из [1].

В [2] указывается, что в рассматриваемой задаче при недостаточной схемной вязкости на межфазном фронте могут наблюдаться дополнительные интерфейсные неустойчивости, которые становятся более заметны при большом числе расчетных точек. Для момента времени  $t = 0.05$  такая высокочастотная неустойчивость располагается перед фронтом в окрестности точки 0.4. Такие же осцилляции наблюдались при расчете этой задачи с использованием приведенной в приложении квазигидродинамической, или малой системы двухслойных уравнений мелкой воды. Наличие межфазных осцилляций говорит о недостаточном сглаживании, присутствующем в “малой системе” уравнений. Численные эксперименты показали, что квазигазодинамическая (большая система) гораздо стабильней малой и указанных неустойчивостей при ее численном решении не наблюдается.



Фиг. 4. Тест 1.  $N = 100$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\alpha = 0.3$ , а) – общая картина; б) – фрагмент профиля.



Фиг. 5. Тест 1.  $\xi_1$  – для различных значений  $\alpha$ ,  $N = 100$ .

### Расчеты на подробных сетках

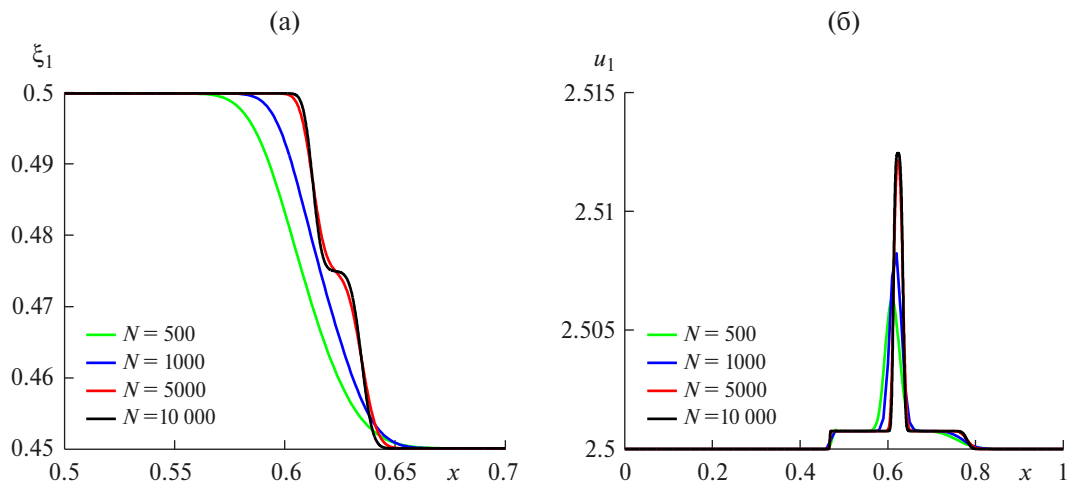
Численные эксперименты показывают, что асимптотическим решением задачи при больших  $N$  является “ступенька” на фронте. Это продемонстрировано на фиг. 6(a). При  $N = 5000$  и  $10\,000$  отчетливо видно раздвоение и выпрямление обоих участков фронта. В [1] рассматривались только  $N = 100$ , и указанное явление не наблюдалось.

Раздвоения фронта и образование ступеньки было получено [2] для случая  $N = 10\,000$ . Отметим, что в [2] задача считалась при  $g = 10$  (это было учтено в нашем расчете), а также использовался метод релаксации с различными вариантами искусственной вязкости. Результаты, представленные на фиг. 6 ( $\alpha = 0.5$ ) хорошо согласуются с результатами, представленными в [2].

При использовании “малой системы” регуляризованных уравнений мелкой воды при увеличении числа разбиений по координате ( $N = 10\,000$ ) также наблюдалось раздвоение фронта интерфейсного скачка.

### Значения $g$ , близкие к 1

В [1] отмечается, что использованные в этой работе схемы начинают расходиться при  $r = \rho_2 / \rho_1 \rightarrow 1$ . Это имеет физическое обоснование: при значениях  $r > 1$  наверху оказывается тяжелый слой, жидкости начинают перемешиваться, что выражается в сильных численных осцилляциях на границе, и, как следствие, приводит к расходимости схемы.



Фиг. 6. Тест 1.  $g = 10$ . Различные значения  $N$ ,  $\alpha = 0.5$ : а) – для  $\xi_1$ , б) – для  $u_1$ .

В [26] показано, что аналогичный эффект наблюдается при использовании регуляризованных уравнений двухслойной мелкой воды. Устойчивость разностных схем при увеличении коэффициента  $r = \rho_2/\rho_1 \rightarrow 1$  является важным фактором при расчете слоев жидкости с небольшими отличиями в плотности.

## 6. ТЕСТ 2. РАСПАД НЕПОДВИЖНОГО РАЗРЫВА ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ $\gamma$

Данный тест был описан и исследован в [1]. В задаче рассматривается схема с ровным дном  $b(x) = 0$ , в которой  $g = 9.81$ ,

$$h_1(x, t = 0) = \begin{cases} 0.2, & x < 5, \\ 1.8, & x \geq 5, \end{cases}$$

$$h_2(x, t = 0) + h_1(x, t = 0) = 2,$$

$$u_1(x, t = 0) = u_2(x, t = 0) = 0.$$

При этом использовалось разбиение по координате  $N = 500$  и  $x \in [0, 10]$ , результаты представлены для  $t = 1$ . Для решения в [1] использовались гидростатические алгоритмы первого и второго порядка точности и кинетический алгоритм, который считается более точным и устойчивым.

Для большой системы в этом тесте, а также во всех последующих, мы использовали оптимальное значение коэффициента регуляризации:  $\alpha = 0.5$ , поэтому везде, где это не уточняется, его значение предполагается таковым и не упоминается.

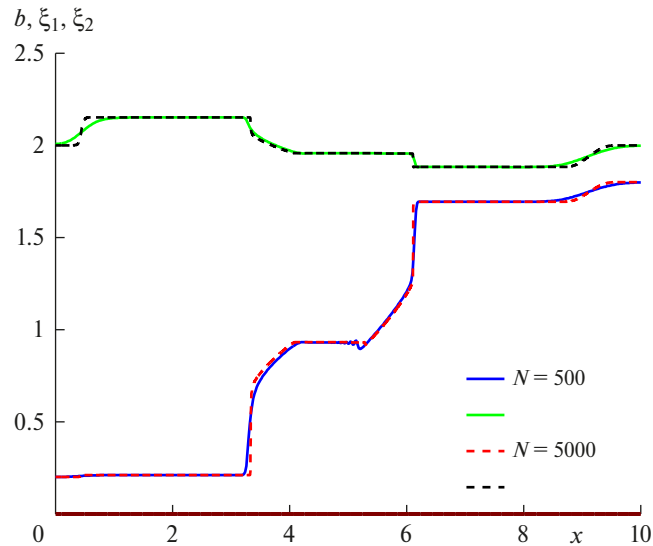
### Вариант $\gamma = 0.7$

Этот случай показан на фиг. 7 для  $t = 1$ . Результаты наших расчетов и расчетов из [1] по схеме второго порядка для гидростатического алгоритма очень близки. Также, как и в [1] наблюдается распределение нижнего слоя около высоты  $h_1 = 1$ :  $x \in [4, 5.5]$ , затем около  $h_1 = 1.75$ :  $x \in [6, 9]$ , нижний слой аналогично имеет три выраженных плато на  $x \in [0, 3]$ ;  $[4, 6]$ ;  $[6, 9]$  соответственно.

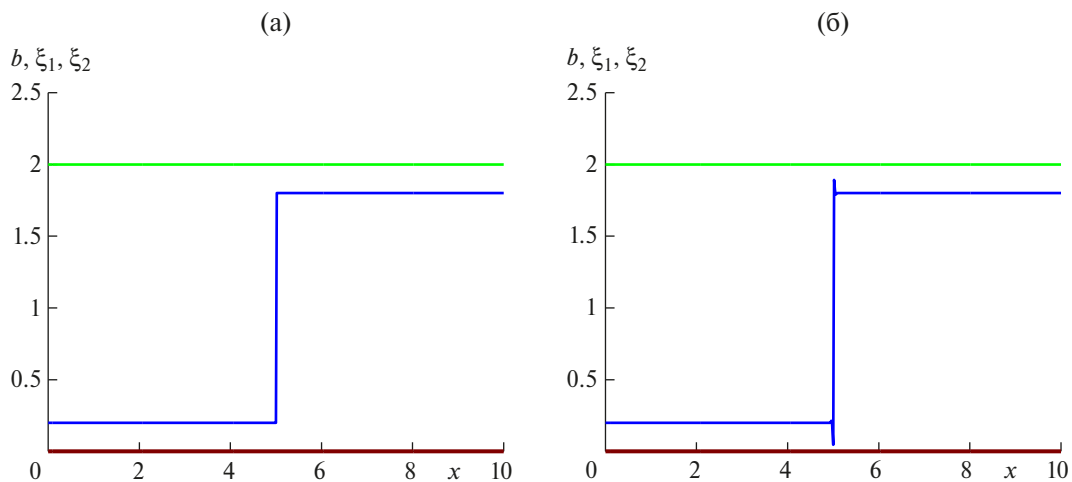
Была рассмотрена зависимость решения от коэффициента  $\alpha$ . При  $\alpha \leq 0.05$  решение начинало осциллировать и расходиться. Сопоставление решений из [1] и расчетов по “большой системе”  $N = 500$  и 5000 показало очень хорошее согласие результатов даже на сетках с одинаковым числом узлов. Фиг. 7 демонстрирует сходимость численного решения по сетке.

Отметим, что для данной задачи в расчетах используется разностная схема первого порядка точности, в которой число Куранта в 10 раз превосходит соответствующую величину из [1].

Авторы [1] отмечают, что решение данной задачи с использованием гидростатического алгоритма первого порядка имеет нефизические разрывы. В то же время более универсальный и более устойчивый кинетический алгоритм первого порядка дает нефизическое слишком сглаженное решение. Адекватное



Фиг. 7. Тест 2. Распределение слоев для различных  $N$  при  $r = 0.7$ ,  $t = 1$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.1$ .



Фиг. 8. Тест 2.  $N = 500$ ,  $\beta = 0.1$  а) – для  $r = 1.0$ ,  $\alpha = 0.3$ ,  $t = 5$ , б) – для  $r = 1.0005$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $t = 1$ .

численное решение получается только при применении гидростатического или кинетического алгоритмов второго порядка точности.

### Вариант $r = 0.98$

В [1] проведено моделирование этой задачи для  $r$ , близкого к 1 ( $\rho_2/\rho_1 = 0.98$ ). Авторы [1] отмечают, что в этом случае формируется стационарный разрыв, вид которого сильно зависит от вида используемого алгоритма. В наших расчетах решение, полученное при использовании “большой системы” значительно отличается от [1]. Более подробно этот случай разобран в [26].

### Вариант $r = 1$

Рассматривались разбиения  $N = 500$ . Фиг. 8(а) представляет устойчивую структуру слоев для  $r = 1$ . Эта структура, при  $\alpha = 0.3$ , практически не меняется с течением времени (наблюдается раздвоение фронта при  $t > 5$ ). Данный результат представляется естественным и физическим, поскольку случай неподвижного разрыва при  $r = 1$  соответствует неподвижной жидкости, плотность которой везде одинакова. Отметим, что предложенный алгоритм оказывается устойчивым для этого специфического предельного случая.

При небольшом увеличении  $r > 1$  наблюдается неустойчивость численного решения, что наглядно показано на фиг. 8(б) ( $\alpha = 0.5$ ). При  $r > 1.0005$  и  $t > 1$  схема расходится. Это, в свою очередь, говорит о том, что результат удовлетворяет физическому свойству неустойчивости таких слоев.

### 7. ТЕСТ 3. РАСПАД РАЗРЫВА ВБЛИЗИ НАКЛОННОГО БЕРЕГА

Для этого теста в [1] рассматривалось  $g = 9.81$ ,  $r = 0.95$ ,  $x \in [0, 10]$  и начальные условия

$$\begin{aligned} h_1(x, t = 0) &= \begin{cases} 0.5, & x < 0.25, \\ 0, & x \geq 0.25, \end{cases} \\ h_2(x, t = 0) &= (1 - h_1(x, t = 0) - b(x))_+, \\ u_1(x, t = 0) &= u_2(x, t = 0) = 0, \end{aligned}$$

при разбиении по координате  $N = 100$ . Результаты представлены для  $t = 0.5$  и  $t = 50$ .

В [1] говорится, что данная система решалась с помощью кинетического алгоритма. Слева использовалось условие “твердой стенки” для сохранения массы. Авторы [1] отмечают, что наблюдается хорошее поведение системы в пустых областях (так называемых “сухих зонах”). Также там было показано достижение устойчивого равновесия (в момент  $t = 50$ ), что говорит о проявлении свойств хорошей балансировки системы [1].

Для решения этой задачи граничные условия системы (36)–(47) были дополнены условиями “сухого дна”. Для этого в соответствии с [20] было выбрано малое  $\varepsilon$  такое, что

$$(\tau_1)_i = \begin{cases} \alpha \frac{\Delta x}{\sqrt{g((h_1)_i)}}, & (h_1)_i > \varepsilon, \\ 0, & (h_1)_i \leq \varepsilon, \end{cases}$$

$$(\tau_2)_i = \begin{cases} \alpha \frac{\Delta x}{\sqrt{g((h_2)_i)}}, & (h_2)_i > \varepsilon, \\ 0, & (h_2)_i \leq \varepsilon, \end{cases}$$

а также

$$(u_1)_i^{k+1} = \begin{cases} (46), & (h_1)_i^{k+1} > \varepsilon, \\ 0, & (h_1)_i^{k+1} \leq \varepsilon, \end{cases}$$

$$(u_2)_i^{k+1} = \begin{cases} (47), & (h_2)_i^{k+1} > \varepsilon, \\ 0, & (h_2)_i^{k+1} \leq \varepsilon. \end{cases}$$

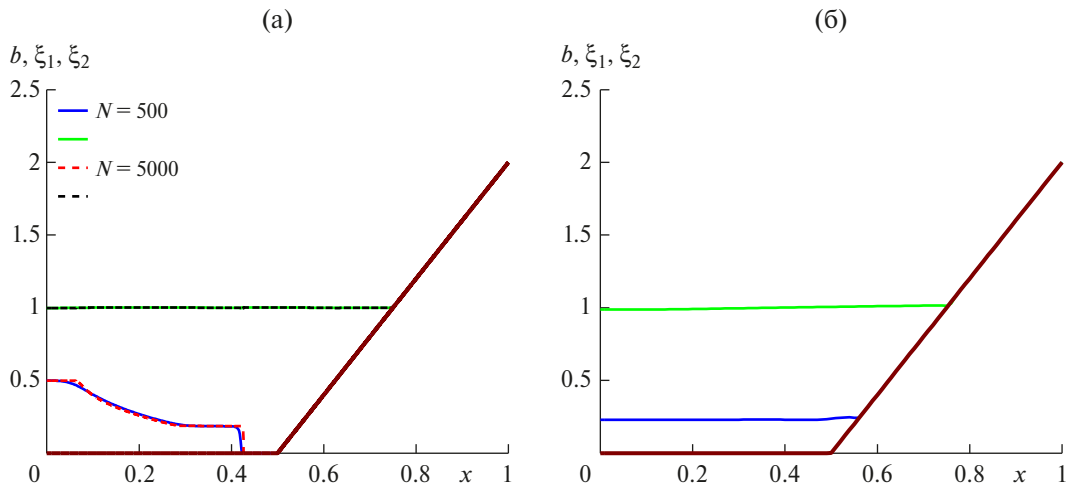
Для этой задачи было выбрано значение параметра отсечения  $\varepsilon = 0.01$ . При уменьшении величины  $\varepsilon$  для устойчивого счета задачи требовалось уменьшить шаг по времени. Для сглаживания решения при распространении фронта вдоль сухого дна вводилась дополнительная диссипация вида

$$(\Pi_{NS})_i = \tau_i \frac{gh_i^2}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x}, \quad i = 1, 2. \quad (57)$$

Эта дополнительная диссипация имеет вид вязкости Навье–Стокса (см. [24]).

Для сравнения результатов с [1] был проделан тест с тем же разбиением по координате  $N = 100$  (фиг. 9). При сгущении сетки для  $t = 0.5$  мы получаем обычный распад разрыва, который можно наблюдать на фиг. 9(а). На момент времени  $t = 50$  положение фронта и высоты слоев хорошо совпадают с эталонными данными из [1].

Таким образом, можно говорить о том, что “большая система” по своей точности соответствует гидростатическому алгоритму из [1] второго порядка точности и в то же время позволяет решать задачи, для которых используется более устойчивый кинетический алгоритм второго порядка точности.



Фиг. 9. Тест 3.  $\beta = 0.1, \alpha = 0.5$ , а) – для  $t = 0.5$  для различных  $N$ , б) – для  $t = 50, N = 100$ .

8. ТЕСТ 4. ЗАДАЧА О ТРАНСКРИТИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ НАД НЕРОВНОСТЯМИ ДНА

Следующая задача была взята из [2]. Она соответствует задаче о транскритическом течении, соединяющем два бесконечных резервуара, где наблюдается изменение числа Фруда от значений меньших единицы, до сверхкритических значений, достигаемых на гребне. В зависимости от начальных и граничных условий в решении может формироваться или не формироваться неподвижный разрыв – гидродинамический скачок.

Задача рассматривалась при следующих условиях:

$$x \in [-3, 3], \quad g = 10, \quad r = 0.98,$$

$$b(x) = \begin{cases} 0.125 \left( \cos \frac{\pi}{2} x + 1 \right), & |x| \leq 2, \\ 0, & 2 < |x| \leq 3. \end{cases}$$

Заметим, что система уравнений мелкой воды (15)–(18) имеет точное решение вида

$$\begin{aligned} Q_1 = h_1 u_1 = \text{const}_1, \quad \frac{Q_1^2}{2gh_1^2} + h_1 + rh_2 + b = \text{const}_2, \\ Q_2 = h_2 u_2 = \text{const}_3, \quad \frac{Q_2^2}{2gh_2^2} + h_1 + h_2 + b = \text{const}_4. \end{aligned} \tag{58}$$

В [2] рассмотрено два теста для случаев параллельных и встречных потоков. Эти случаи описываются системой (58).

Рассмотрим параллельные течения. Слева накладываем граничное условие

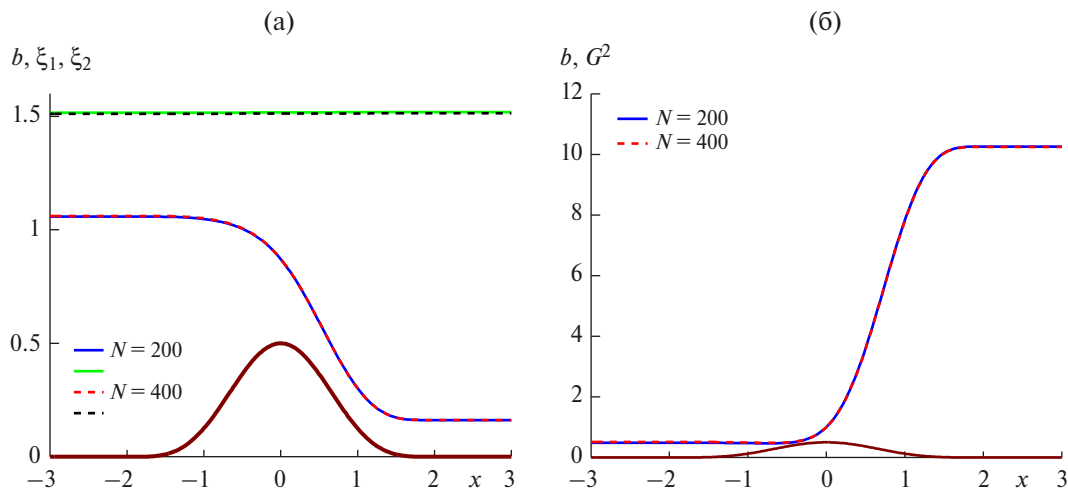
$$h_i u_i |_{x=-3} = (Q_i)_{in} = \text{const}, \quad \frac{\partial h_i}{\partial x} \Big|_{x=-3} = 0, \quad i = 1, 2; \tag{59}$$

справа ставим условие сноса потока

$$\frac{\partial h_i}{\partial x} \Big|_{x=3} = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x} \Big|_{x=3} = 0, \quad i = 1, 2, \tag{60}$$

причем

$$(Q_1)_{in} = (Q_2)_{in} = 0.09282893.$$



Фиг. 10. Тест 4. Большая система, течение без разрыва для различных значений  $N$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $t = 300$ , а) – распределение слоев, б) – число Фруда со схематическим изображением рельефа дна.

**Параллельные потоки. Течение без разрыва**

Для задачи без разрыва начальные условия выбирались в виде

$$h_i(x, 0) = \begin{cases} (h_i)_{in}, & -3 < x < -2, \\ A \cos(0.25\pi(x + 2)) + B, & -2 \leq x \leq 2, \\ (h_i)_{out}, & 2 < x < 3, \end{cases} \tag{61}$$

$$h_i(x, 0)u_i(x, 0) = Q_i(x) = (Q_i)_{in},$$

где

$$A = 0.5((h_i)_{in} - (h_i)_{out}), \quad B = 0.5((h_i)_{in} + (h_i)_{out}), \quad i = 1, 2. \tag{62}$$

Числа  $(h_i)_{in}$ ,  $(h_i)_{out}$  предполагается брать произвольными, но близкими по значению к итоговому результату. Были использованы результаты из [2] и уравнения, описывающие точное решение (58). Таким образом, имеем

$$(h_1)_{in} = 1.0816731, \quad (h_1)_{out} = 0.1616669,$$

$$(h_2)_{in} = 0.4311358, \quad (h_2)_{out} = 1.3338331.$$

Для определения транскритического характера течения, как и в [2], [3] использовалось так называемое “комбинированное” число Фруда  $G$

$$G^2 = Fr_1^2 + Fr_2^2 - (1 - r)Fr_1^2Fr_2^2, \tag{63}$$

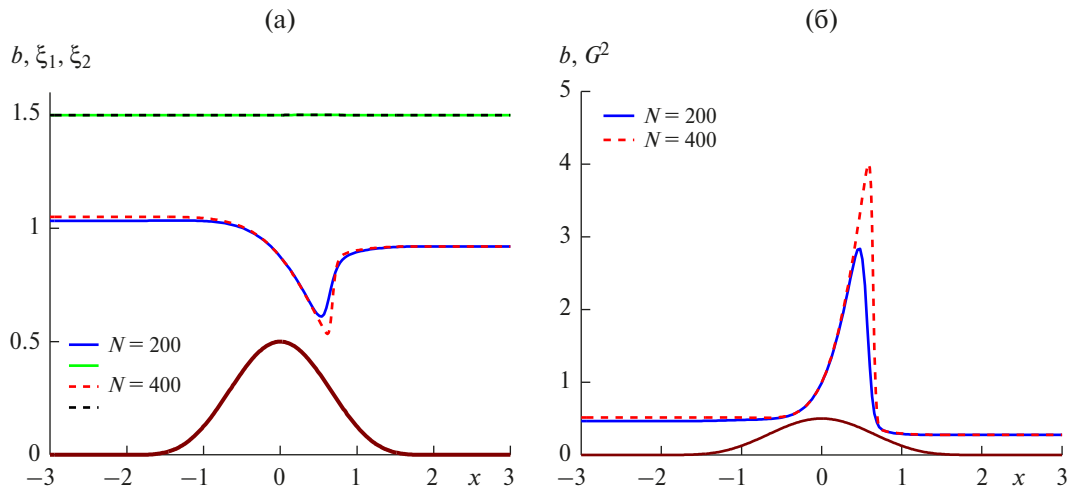
где  $Fr_i$ ,  $i = 1, 2$ , числа Фруда для слоев 1 и 2, которые рассчитываются, как

$$Fr_i^2 = \frac{u_i^2}{g'h_i}, \quad g' = (1 - r)g. \tag{64}$$

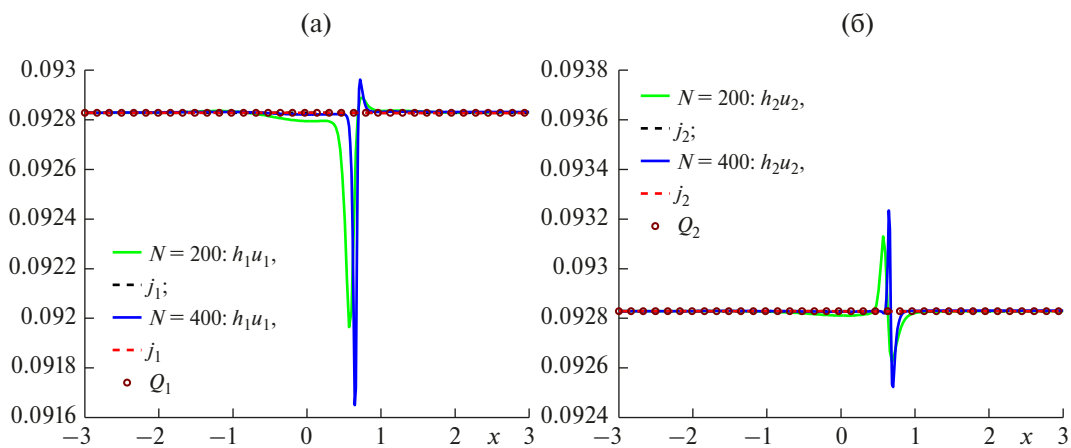
При  $G^2 < 1$  мы получаем субкритическое течение, а при  $G^2 > 1$  – транскритическое.

Распределение слоев жидкости и числа Фруда показано на фиг. 10 для времени счета  $t = 300$ . Видно, что решение незначительно изменяется при сгущении сетки, что говорит о достигнутой точности, а также виден транскритический характер течения: при переходе через холмик, который образует поверхность дна, наблюдается рост скорости, соответствующий переходу комбинированного числа Фруда через единицу.





Фиг. 11. Тест 4. Большая система, течение с разрывом для различных значений  $N$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $t = 500$ , а) – распределение слоев, б) – число Фруда со схематическим изображением рельефа дна.



Фиг. 12. Тест 4. Течение с разрывом, распределение потоков для различных значений  $N$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $t = 500$ , а) – первый слой, б) – второй слой.

Также стоит отметить, что решение повторяет результат источника, где итоговые граничные значения для высот были следующими:

$$h_1|_{x=-3} = 1.0816731, \quad h_1|_{x=3} = 0.1616669;$$

$$h_2|_{x=-3} = 0.4311358, \quad h_2|_{x=3} = 1.3338331.$$

**Параллельные потоки. Течение с разрывом**

Начальные условия: рассматриваются покоящиеся слои. Это необходимо, чтобы образовался гидродинамический скачок

$$h_1(x,0) + b(x) = 0.9205217, \quad h_2(x,0) = 0.5794783,$$

$$u_1(x,0) = u_2(x,0) = 0.$$

Значения были взяты приближенными к итоговому результату, хотя, вообще говоря, они могут быть произвольными, так как главным образом сходимость к решению с разрывом обеспечивают граничные условия

$$h_i u_i|_{x=-3} = (Q_i)_{in} = \text{const}, \quad \left. \frac{\partial h_i}{\partial x} \right|_{x=-3} = 0, \quad i = 1, 2. \tag{65}$$

Справа ставим условие закрепленной границы для высоты и сноса для скорости

$$h_1 + b|_{x=3} = 0.9205217, \quad h_2|_{x=3} = 0.5794783, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x}|_{x=3} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (66)$$

При численном интегрировании этой задачи в зоне разрыва появляются сеточные осцилляции решения. Для сглаживания этих нефизичных колебаний по аналогии с квазигидродинамическим алгоритмом для моделирования сверхзвуковых течений газа, выражения для тензора вязких напряжений (34), (35) следует дополнить необходимыми регуляризаторами (57) типа вязкости Навье–Стокса.

Численные расчеты представлены на фиг. 11 и 12 для  $t = 500$ . Можно заметить, что результаты, полученные на различных сетках для распределения слоев (фиг. 11(а)) и числа Фруда (фиг. 11(б)) практически совпадают, а вектор потока массы  $j_i, i = 1, 2$ , не отличается от точного решения:  $j_i = (Q_i)_{in} = \text{const}, i = 1, 2$  – фиг. 12.

Результаты совпадают и с эталонными из [2], где граничные значения для высот таковы

$$h_1|_{x=-3} = 1.0816731, \quad h_1|_{x=3} = 0.9205217,$$

$$h_2|_{x=-3} = 0.4311358, \quad h_2|_{x=3} = 0.5794783,$$

а разрыв локализован в  $x = 0.48$ , как и в большой системе.

### Встречные потоки

Задача встречных потоков отличается лишь тем, что направление течения одного из слоев противоположно другому

$$(Q_1)_{in} = -(Q_2)_{in} = 0.09282893.$$

Для нее используются те же начальные условия (61), (62), но пересмотрены условия на границах для верхнего слоя:

справа

$$h_2 u_2|_{x=3} = (Q_2)_{in} = \text{const}, \quad \frac{\partial h_2}{\partial x}|_{x=3} = 0, \quad (67)$$

а слева условие сноса потока

$$\frac{\partial h_2}{\partial x}|_{x=-3} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x}|_{x=-3} = 0. \quad (68)$$

Граничные условия для нижнего слоя были взяты те же, т.е. (59) и (60) (только при  $i = 1$ ).

Распределение высот слоев для этого случая в точности соответствует фиг. 10, и здесь не приводится. Этот результат повторяет случай параллельных течений, поскольку точному решению (58) удовлетворяют обе постановки, так как решение не зависит от направления потока.

Стоит отметить, что случай встречных течений является задачей, неустойчивой по начальным данным, поэтому не всегда результат сходится к искомому решению. Возможно, что для решения таких задач необходим учет вязкости, так как она играет важную роль во взаимодействии встречных течений. Помимо этого, при сгущении сеток появляются неустойчивые возмущения, и поэтому для уменьшения осцилляций в схему вводился регуляризатор (57) с коэффициентом  $\gamma = 0.1$ .

## 9. ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА УРАВНЕНИЙ ДВУХСЛОЙНОЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Согласно формулировкам в [12], [15] и [25] система уравнений мелкой воды для двухслойных течений может быть представлена в виде системы законов сохранения, то есть в дивергентном виде. Далее приведен вид этой системы для описания плоских одномерных течений с использованием обозначений, принятых в разд. 1 настоящей статьи

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h_1 u_1) = 0; \quad (69)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h_2 u_2) = 0; \tag{70}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u_1^2}{2} \right) + g \frac{\partial}{\partial x} (h_1 + r h_2 + b) = 0; \tag{71}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u_2^2}{2} \right) + g \frac{\partial}{\partial x} (h_1 + h_2 + b) = 0. \tag{72}$$

Выполняя преобразования, аналогичные изложенным в разд. 2, выпишем регуляризованный вид системы (69)–(72), который при использовании уже введенных обозначений имеет вид

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial j_1}{\partial x} = 0, \tag{73}$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial j_2}{\partial x} = 0, \tag{74}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u_1^2}{2} \right) + g \frac{\partial}{\partial x} (h_1 + r h_2 + b) = \frac{\partial \tilde{\Pi}_1}{\partial x}, \tag{75}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u_2^2}{2} \right) + g \frac{\partial}{\partial x} (h_1 + h_2 + b) = \frac{\partial \tilde{\Pi}_2}{\partial x}, \tag{76}$$

$$\tilde{\Pi}_1 = \frac{1}{h_1} \Pi_1 + r g \tau_2 \frac{\partial (h_2 u_2)}{\partial x}, \tag{77}$$

$$\tilde{\Pi}_2 = \frac{1}{h_2} \Pi_2 + g \tau_1 \frac{\partial (h_1 u_1)}{\partial x}, \tag{78}$$

где  $w_1, j_1, w_2, j_2, \Pi_1, \Pi_2$  определяются формулами (30)–(35) соответственно.

Из полученного вида дивергентной системы после ее регуляризации видно, что первые два уравнения совпадают с уравнениями (26), (27), в то время как уравнения для скорости оказываются проще, чем в “большой системе” т.е. (28), (29). Путем тождественных преобразований можно показать, что уравнения импульса (28), (29) отличаются от уравнений (75), (76) на величину  $h_i A_i$ , где

$$A_1 = 2 \frac{\partial (h_1 u_1)}{\partial x} \frac{\tau_1}{h_1} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u_1^2}{2} \right) + g \frac{\partial}{\partial x} (h_1 + r h_2 + b) \right],$$

$$A_2 = 2 \frac{\partial (h_2 u_2)}{\partial x} \frac{\tau_2}{h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u_2^2}{2} \right) + g \frac{\partial}{\partial x} (h_1 + h_2 + b) \right].$$

Указанное отличие пропорционально  $\tau_i$  и в силу своей структуры на гладких стационарных решениях системы исходных уравнений обращается в ноль.

Для оценки эффективности системы (73)–(78) для численного моделирования, по аналогии со способом, изложенным в разд. 3, была построена разностная схема и проведены численные расчеты описанных ранее задач. Было показано, что для системы (73)–(78) выполняются условия гидростатического равновесия. Результаты расчетов тестов 2 и 3 также хорошо совпадают с эталонными результатами. Однако авторам не удалось провести моделирование задачи о транскритическом течении (тест 4), т.е. получить решение с разрывом.

Стоит отметить, что времена счета для рассмотренной в этом разделе регуляризованной системы оказываются несколько меньше, чем для системы (26)–(35).

Таким образом, численные расчеты тестовых задач, проведенные в рамках дивергентной системы, показывают малые отличия этих двух подходов на примере изученных тестов. Последнее подтверждает известный факт, что в практически интересных случаях предельные разрывные решения, полученные

на основе недивергентных форм записи уравнений мелкой воды, мало отличаются от решений, полученных для уравнений в дивергентной форме. Пример такого сопоставления для уравнений Сен-Венана для реального русла приведен в [27].

### ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Основным результатом этой работы является построение новой явной по времени разностной схемы для моделирования течений двухслойной мелкой воды и практическая апробация ее работоспособности.

Построенный метод оказывается устойчивым в случае, когда плотность верхнего слоя лишь немного меньше плотности нижнего слоя. Такие значения характерны для океанических течений различной солености и температуры. Например, это течения в Гибралтарском проливе и возникающие в нем приливные внутренние волны (см. [3], [5]). Показанная нами возможность численного моделирования течений со значительно различающимися плотностями слоев и течений с внутренними “сухими зонами” может использоваться для моделирования генерации волн цунами при смещениях подводных слоев (см. [5], [28]). Очевидные обобщения построенного алгоритма на двумерный случай могут быть проверены на тестах, представленных в [6], [7], [9].

### ПРИЛОЖЕНИЕ

#### Малая система

При выводе большой системы предполагается, что скорость и высота слоя изменяются, принимая новые значения  $\mathbf{u}^*$  и  $h^*$  соответственно.

Малая система, т.е. упрощенный регуляризатор, рассматривает изменение скорости и пренебрегает изменением высоты:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u} + \tau \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}.$$

После регуляризации уравнений (15)–(18) этим методом получается следующая система, которая описана в [19]:

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_1 = 0,$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_2 = 0,$$

$$\frac{\partial(h_1 \mathbf{u}_1)}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{j}_1 \otimes \mathbf{u}_1) + \nabla \frac{gh_1^2}{2} + gh_1 \nabla(rh_2 + b) = \operatorname{div} \Pi_1,$$

$$\frac{\partial(h_2 \mathbf{u}_2)}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{j}_2 \otimes \mathbf{u}_2) + \nabla \frac{gh_2^2}{2} + gh_2 \nabla(h_1 + b) = \operatorname{div} \Pi_2,$$

где

$$\mathbf{w}_1 = \tau_1 [(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 + g \nabla(h_1 + rh_2 + b)],$$

$$\mathbf{j}_1 = h_1 (\mathbf{u}_1 - \mathbf{w}_1),$$

$$\mathbf{w}_2 = \tau_2 [(\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \mathbf{u}_2 + g \nabla(h_1 + h_2 + b)],$$

$$\mathbf{j}_2 = h_2 (\mathbf{u}_2 - \mathbf{w}_2),$$

$$\Pi_1 = (\Pi_{NS})_1 + h_1 \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{w}_1,$$

$$\Pi_2 = (\Pi_{NS})_2 + h_2 \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{w}_2,$$

где  $(\Pi_{NS})_i$ ,  $i = 1, 2$  – регуляризатор (57) типа вязкости Навье–Стокса.

Подробный вывод уравнений для одномерного случая приведен в [26].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bouchut F., Morales de Luna T.* An entropy satisfying scheme for two-layer shallow water equations with uncoupled treatment // ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis. 2008. Vol. 42. № 4. P. 638–698.
2. *Abgrall Remi, Karni Smadar.* Two-layer shallow water system: a relaxation approach // SIAM Journal on Scientific Computing. 2009. Vol. 31. № 3. P. 1603–1627.
3. *Castro Manuel J., Macias Jorge, Pares Carlos.* A Q-scheme for a class of systems of coupled conservation laws with source term. Application to a two-layer 1-D shallow water system // ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis. 2001. Vol. 35. № 1. P. 107–127.
4. *Castro Manuel J., Pardo Alberto, Pares Carlos, Toro E. F.* On some fast well-balanced first order solvers for nonconservative systems // Mathematics of computation. 2010. Vol. 79. № 271. P. 1427–1472.
5. *Castro Manuel J., Garcia-Rodriguez Jose A., Gonzalez-Vida Jose M., Macias Jorge, Pares Carlos, Vazquez-Cendon M. Elena.* Numerical simulation of two-layer shallow water flows through channels with irregular geometry // J. Comput. Phys. 2004. Vol. 195. № 1. P. 202–235.
6. *Kurganov A., Petrova G.* Central-upwind schemes for two-layer shallow water equations // SIAM Journal on Sci. Comput. 2009. Vol. 31. № 3. P. 1742–1773.
7. *Mandli K.T.* A numerical method for the two layer shallow water equations with dry states // Ocean Modelling. 2013. № 72. P. 80–91.
8. *Chertock Alina, Kurganov Alexander, Zhuolin Qu, Tong Wu.* On a three-layer approximation of two-layer shallow water equations. Math. Modell. and Analys. 2013. Vol. 18. № 5. P. 675–693.
9. *Chen S.C., Peng S.H.* Two dimensional numerical model of two-layer shallow water equations for confluence simulation // ScienceDirect, Advances in Water Resources 29. 2006. № 29. P. 1608–1617.
10. *Остапенко В. В.* Численное моделирование волновых течений, вызванных сходом берегового оползня // Прикл. мех. и техн. физ. 1999. Т. 40. № 4. С. 109–117.
11. *Остапенко В. В.* Метод теоретической оценки дисбалансов неконсервативных разностных схем на ударной волне // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295. № 2. С. 292–297.
12. *Овсянников Л. В.* Модели двухслойной мелкой воды // Прикл. мех. и техн. физ. 1979. № 2. С. 3–13.
13. *Ляпидевский В. Ю., Теушков В. М.* Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Издательство СО РАН. 2000.
14. *Остапенко В. В.* Полные системы законов сохранения для моделей двухслойной мелкой воды // Прикл. мех. и техн. физ. 1999. Т. 40. № 5. С. 23–32.
15. *Остапенко В. В.* Устойчивые ударные волны в двухслойной мелкой воде // Прикл. матем. и механ. 2001. Т. 65. Вып. 1. С. 94–113.
16. *Четверушкин Б. Н.* Кинетически согласованные схемы в газовой динамике. М.: Изд. МГУ, 1999.
17. *Шеретов Ю. В.* Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. Москва-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2009.
18. *Елизарова Т. Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
19. *Булатов О. В., Елизарова Т. Г.* Регуляризованные уравнения мелкой воды и эффективный метод численного моделирования течений в неглубоких водоемах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 1. С. 170–184.
20. *Булатов О. В., Елизарова Т. Г.* Регуляризованные уравнения мелкой воды для численного моделирования течений с подвижной береговой линией // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 4. С. 158–177.
21. *Булатов О. В.* Аналитические и численные решения уравнений Сен-Венана для некоторых задач о распаде разрыва над уступом и ступенькой дна // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 1. С. 170–184.
22. *Шеретов Ю. В.* Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь, Тверской гос. ун-т, 2016.
23. *Злотник А. А.* О консервативных пространственных дискретизациях баротропной квазигазодинамической системы уравнений с потенциальной массовой силой // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 2. С. 301–317.
24. *Самарский А. А., Попов В. М.* Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1986.
25. *Карabut П. Е., Остапенко В. В.* Задача о распаде разрыва малой амплитуды в двухслойной мелкой воде. Первое приближение // Прикл. Механ. и техн. физ. 2011. Т. 52. № 5. С. 27–38.
26. *Елизарова Т. Г., Иванов А. В.* Квазигазодинамический алгоритм численного решения двухслойных уравнений мелкой воды // Препринты ИПМ РАН. № 69. 2016. С. 1–27.
27. *Бунтина М. В., Остапенко В. В.* TVD схема для расчета волновых течений в открытых руслах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 12. С. 2212–2224.
28. *В. Б. Левин, М. А. Носов.* Физика цунами и родственных явлений в океанах. М.: Янус-К, 2005.