

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

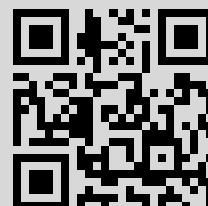
Т. Г. Елизарова, А. Н. Павлов, Б. Н. Четверушкин, Применение кинетического алгоритма для расчета газодинамических течений, *Дифференц. уравнения*, 1985, том 21, номер 7, 1179–1185

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 176.120.240.207

20 января 2021 г., 09:28:31



Т. Г. ЕЛИЗАРОВА, А. Н. ПАВЛОВ, Б. Н. ЧЕТВЕРУШКИН

ПРИМЕНЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ РАСЧЕТА ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

1. Квазигазодинамические уравнения. В работах [1—4] для получения уравнений, описывающих газодинамические течения, использовалась следующая кинетическая модель.

Пусть в момент времени $t=t^j$ в каждой точке пространства функция распределения f может быть записана в локально-максвелловском виде

$$f_0^j(\vec{x}, \vec{\xi}, t^j) = \rho^j(\vec{x}, t^j) [2\pi RT^j(\vec{x}, t^j)]^{-3/2} \times \\ \times \exp[-(\xi_\alpha - u_\alpha^j(\vec{x}, t^j))^2 / 2RT^j(\vec{x}, t^j)], \quad (1.1)$$

где ρ^j , u^j , T^j — локальные макроскопические параметры течения газа, R — газовая постоянная. Затем на отрезке времени $t \in [t^j, t^{j+1}]$ происходит бесстолкновительный разлет газа, после чего функция распределения вновь становится локально-максвелловской, но уже с новыми значениями газодинамических параметров. Эти параметры определяются путем интегрирования функции распределения с соответствующими весами по всем скоростям молекул.

Путем относительно несложных аналитических преобразований на основе этой кинетической модели удается получить дифференциально-разностные уравнения для описания изменения макроскопических параметров газодинамических течений — плотности, импульса и полной энергии [2—4]. Наиболее удобно эти уравнения записать в следующем инвариантном виде:

$$\frac{\hat{\rho} - \rho}{\tau} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = \frac{\tau}{2} \operatorname{div}[\operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \operatorname{grad} p_{\alpha\beta}], \quad (1.2)$$

$$\frac{\widehat{(\rho u_\alpha)} - \rho u_\alpha}{\tau} + \operatorname{div}(\rho u_\alpha \vec{u}) + \frac{\partial p_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} = \frac{\tau}{2} \operatorname{div}[\operatorname{div}(\rho u_\alpha \vec{u} \otimes \vec{u}) + \operatorname{grad}(u_\alpha p_{\alpha\beta}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(2p_{\alpha\beta} \vec{u})], \quad (1.3)$$

$$\frac{\hat{E} - E}{\tau} + \operatorname{div}[\vec{u}(E + p_{\alpha\beta})] + \operatorname{div} q_\alpha = \frac{\tau}{2} \operatorname{div}[\operatorname{div}(E + 2p_{\alpha\beta}) \vec{u} \otimes \vec{u} + \operatorname{grad}(p_{\alpha\beta}/\rho(E + p_{\alpha\beta}))], \quad (1.4)$$

$$E = \rho \vec{u}_\alpha^2 / 2 + \rho \varepsilon, \quad p = p(T, \rho), \quad \varepsilon = \varepsilon(T, \rho),$$

здесь, как обычно, использованы обозначения $\hat{\rho} = \rho^{j+1}$, $\widehat{(\rho u_\alpha)} = (\rho u_\alpha)^{j+1}$, $\hat{E} = E^{j+1}$, $\vec{u} \otimes \vec{u}$ — прямое произведение векторов.

Система уравнений (1.2)–(1.4) для описания газодинамических течений может быть получена не опираясь на предположение о локально-максвелловском характере функции распределения. Аналогично [2–4] разложим функцию распределения на слое $(j+1)$ в ряд Тейлора по параметру $\vec{\xi}\tau$

$$f^{j+1} = f^j - \tau \sum_{\alpha=1}^3 \xi_\alpha \frac{\partial f^j}{\partial x_\alpha} + \frac{\tau^2}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \xi_\alpha \xi_\beta \frac{\partial^2 f^j}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}. \quad (1.5)$$

Для определения величин ρ^{j+1} , u^{j+1} и E^{j+1} будем использовать известные соотношения

$$\rho^{j+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} f^{j+1} d\vec{\xi}, \quad (1.6)$$

$$(\rho \vec{u})^{j+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} f^{j+1} \vec{\xi} d\vec{\xi}, \quad (1.7)$$

$$E^{j+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} f^{j+1} \xi^2 / 2 d\vec{\xi}. \quad (1.8)$$

Кроме того, учтем, что давление, тепловой поток и внутренняя энергия газа с функцией распределения f определяются выражениями

$$\delta_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} = \int_{-\infty}^{+\infty} f c_\alpha c_\beta d\vec{\xi}, \quad (1.9)$$

$$q_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} f \vec{c}^2 c_\alpha d\vec{\xi}, \quad (1.10)$$

$$\rho \varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} f \vec{c}^2 / 2 d\vec{\xi}, \quad (1.11)$$

где $\vec{c} = \vec{\xi} - \vec{u}$. Тогда, подставляя разложение (1.5) в интегралы (1.6)–(1.8) и учитывая соотношения (1.9)–(1.11), получим систему квази-газодинамических уравнений (1.2)–(1.4).

При этом выводе предполагаем, что для получения интегралов от функции распределения можно использовать соотношения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f c_{\alpha}^3 c_{\beta}^2 d\vec{\xi} = 0, \quad (1.12)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f c_{\alpha} c_{\beta} c^2 / 2 d\vec{\xi} = \delta_{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta} \left(\varepsilon + \frac{\rho_{\alpha\beta}}{\rho} \right), \quad (1.13)$$

которые вытекают из естественного представления для функции распределения $f = f_0 + \Delta f$, где Δf — малая добавка к локально-максвелловскому распределению f_0 . При таком представлении в разложении (1.5) отбрасываются члены порядка $\frac{\tau^2}{2} \sum \xi_{\alpha} \xi_{\beta} \frac{\partial^2 \Delta f}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}}$, которые обла- дают более высоким порядком малости.

Отметим, что для вычисления тензора давлений $p_{\alpha\beta}$ и теплового по- тока q_{α} , входящих в систему (1.2) — (1.4), можно использовать тради- ционные подходы. При этом естественным образом правые части будут совпадать либо с уравнениями Эйлера, либо Навье—Стокса в зависи- мости от характера предположений о поведении $p_{\alpha\beta}$ и q_{α} .

2. Методы численного решения. Рассмотрим методы численного ре- шения системы уравнений (1.2) — (1.4), которые назовем кинетическими алгоритмами. Введение термина «кинетический» должно подчеркивать тот факт, что рассматриваемые методы применяются к системе квази- газодинамических уравнений, полученных на основе использования кинетической модели (1.5) — (1.13).

Для численного решения системы уравнений (1.2) — (1.4) рассмот- рим следующие явные разностные схемы, основанные на применении центральных разностей [2—4]. Например, для конвективных членов, входящих в уравнение движения (1.3), аппроксимация примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) \simeq (\rho u^2)_x = \frac{(\rho u^2)_{i+1} - (\rho u^2)_{i-1}}{2h_x}. \quad (2.1)$$

Для дополнительных вязких членов, стоящих в правых частях урав- нений (1.2) — (1.4), разностная аппроксимация будет основана на использовании схем с малым параметром при старшей производной

$$\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho u^3 + 3\rho u) \simeq \frac{h_x}{2\omega} \frac{1}{\text{th}(h_x/\tau\omega)} (\rho u^3 + 3\rho u)_{xx}, \quad (2.2)$$

здесь ω — характерная скорость.

Схемы с центральными разностями типа (2.1) обладают рядом пре- имуществ по сравнению со схемами, основанными на использовании направленных разностей. Преимущества связаны не только с более высоким порядком аппроксимации соответствующих членов, но и с тем, что вид разностного шаблона для схем с центральными разностями не зависит от направления скорости. Тем самым значительно естественней представляется описание газодинамических течений, в которых проис- ходит резкое изменение направления скорости, например, течений, включающих в себя столкновение ударных волн, их отражение от же- стких стенок и т. д.

Однако эти преимущества явных схем с центральными разностями полностью ликвидируются их абсолютной неустойчивостью, как это хо- рошо известно на примере модельного уравнения переноса $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

Поэтому достаточно интересным представляется факт устойчивости при выполнении ограничений по Куранту на временной шаг разностной схемы для системы уравнений (1.2)—(1.4) с аппроксимацией типа (2.1), (2.2). Не вдаваясь в подробный математический анализ схем типа (2.1), (2.2), отметим, что их устойчивость представляется довольно естественной, если учесть способ их получения. Этот способ основан на интегрировании по скоростям $\vec{\xi}$ исходного кинетического уравнения, разностная схема для которого будет устойчива при выполнении ограничений по Куранту на временной шаг.

Обратим внимание на некоторые вопросы, связанные с практической реализацией кинетических алгоритмов. Если для устойчивости счета явной схеме (1.1)—(2.2) необходимо выполнение условия Куранта $\tau < \min(h/w)$, то, как правило, счет ведется при следующем ограничении на временной шаг:

$$\tau < \alpha \min(h/w), \text{ где } \alpha = 0,3 \div 0,5. \quad (2.3)$$

При выполнении условий (2.3) входящие в разностную схему (2.2) гиперболические тангенсы от аргумента $(h/\tau w)$ можно заменить на единицу. Подобная замена позволяет уменьшить машинное время, необходимое для проведения расчетов, так как при этом не требуется многократное вычисление функции

$$\text{th}(h/\tau w) = \frac{\exp(h/\tau w) - \exp(-h/\tau w)}{\exp(h/\tau w) + \exp(-h/\tau w)}.$$

При проведении вычислительного эксперимента было замечено, что члены со смешанными производными, например, $\frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv)$, появляющиеся при рассмотрении задач в пространственно-двумерной постановке, могут быть аппроксимированы простейшим способом

$$\frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv) \simeq \tau (\rho uv)_{xy}^{\circ} \quad (2.4)$$

или при достаточно малых τ вообще быть отброшены. Это также упрощает практическое проведение расчетов с помощью кинетических алгоритмов.

Таким образом разностная схема, используемая для расчета пространственно-двумерных течений в (x, y) геометрии принимает следующий вид:

$$\frac{\hat{\rho} - \rho}{\tau} + (\rho u)_x^{\circ} + (\rho v)_y^{\circ} = \frac{h_x}{2w} (\rho u^2 + p)_{xx} + \frac{h_y}{2w} (\rho v^2 + p)_{yy}, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{(\rho u)} - \rho u}{\tau} + (\rho u^2 + p)_x^{\circ} + (\rho uv)_y^{\circ} &= \frac{h_x}{2w} (\rho u^3 + 3\rho u)_{xx} + \\ &+ \frac{h_y}{2w} (\rho uv^2 + up)_{yy}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{(\rho v)} - \rho v}{\tau} + (\rho uv)_x^{\circ} + (\rho v^2 + p)_y^{\circ} &= \frac{h_x}{2w} (\rho u^2 v + vp)_{xx} + \\ &+ \frac{h_y}{2w} (\rho v^3 + 3\rho v)_{yy}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{E} - E}{\tau} + (u(E + p))_x^{\circ} + (v(E + p))_y^{\circ} &= \frac{h_x}{2w} \left(u^2(E + 2p) + \right. \\ &+ \left. \frac{p}{\rho}(E + p) \right)_{xx} + \frac{h_y}{2w} \left(v^2(E + 2p) + \frac{p}{\rho}(E + p) \right)_{yy}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Приведем также разностную схему, используемую для одномерных расчетов в плоской геометрии

$$\frac{\hat{\rho} - \rho}{\tau} + (\rho u)_x^o = \frac{h}{2w} (\rho u^2 + p)_{xx}^-, \quad (2.9)$$

$$\frac{(\hat{\rho u}) - \rho u}{\tau} + (\rho u^2 + p)_x^o = \frac{h}{2w} (\rho u^3 + 3\rho u)_{xx}^-, \quad (2.10)$$

$$\frac{\hat{E} - E}{\tau} + (u(E + p))_x^o = \frac{h}{2w} \left[u^2(E + 2p) + \frac{p}{\rho}(E + p) \right]_{xx}^-. \quad (2.11)$$

Отметим, что величина h/w в этой модели имеет смысл характерного времени.

3. Результаты численных расчетов. В качестве примеров расчета рассмотрим численное решение двумерной задачи о течении газа в прямоугольном канале, для которой имеются данные экспериментальных исследований [5].

В начальный момент времени газ в канале неподвижен ($\gamma = 1, 4$), и через нижнее отверстие начинает втекать сверхзвуковой поток, при распространении которого в канале образуется ряд типичных газодинамических конфигураций. На рис. 1, 2 представлены изолинии плотности

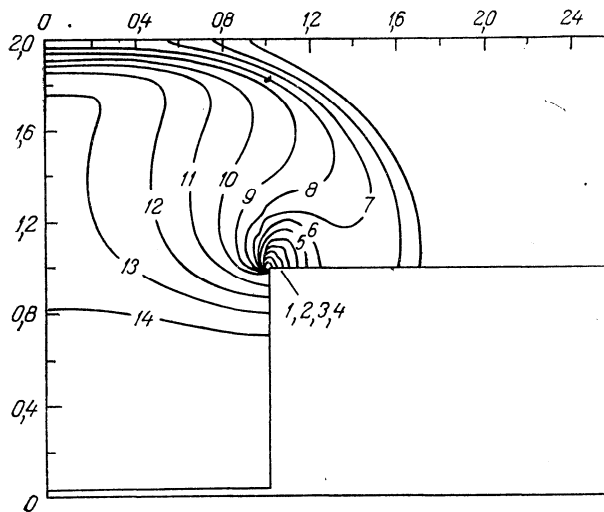


Рис. 1. Распределение плотности в прямоугольном канале, $M=1, 2$, $t=30$. Линии уровня расположены эквидистантно с шагом $\Delta\rho=0,083$, $\rho_1=0,747$, $\rho_{14}=1,826$

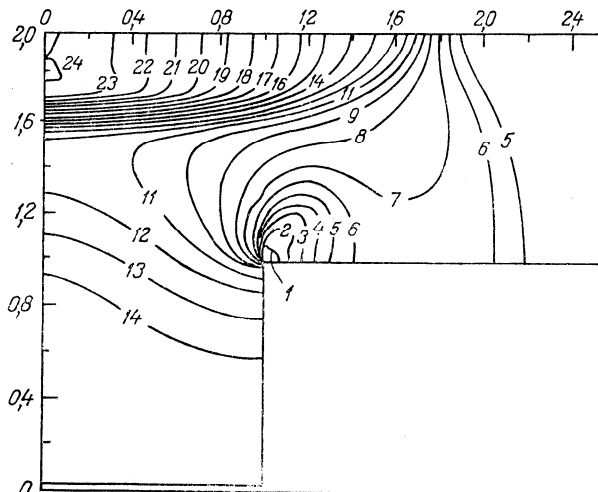


Рис. 2. Распределение плотности в прямоугольном канале, $M=1, 2$, $t=40$. Линии уровня расположены эквидистантно с шагом $\Delta\rho=0,083$, $\rho_1=0,747$, $\rho_{24}=2,656$

сти, рассчитанной на сетке с числом узлов $N_x \cdot N_y = 3000$ ($h_x = h_y = 1/27$, $\tau = 0,2$) для скорости вдува $M = 1,2$ на моменты времени $t = 30$ и $t = 40$ в канале единичного сечения. Расчеты велись с помощью разностной схемы (2.5) — (2.8).

На рис. 1 видно образование ударной волны при огибании прямоугольного выступа. В дальнейшем (рис. 2) образуется система двух ударных волн — прямой и отраженной от верхней стенки канала. При этом в верхней части области формируется зона повышенной плотности,

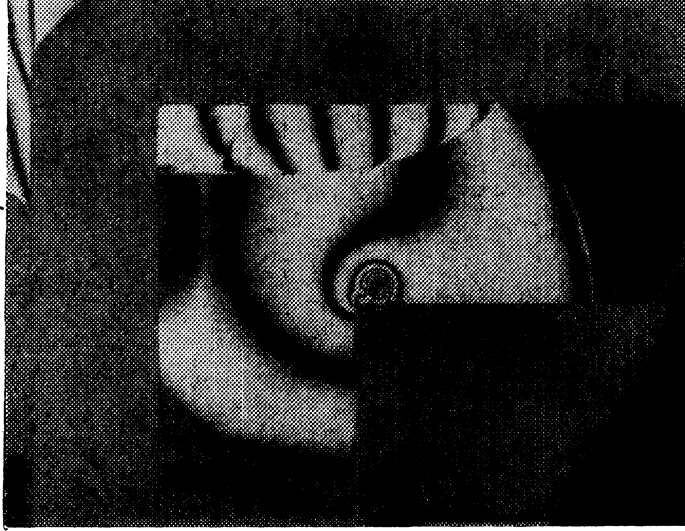


Рис. 3. Интерферограмма распределения плотности в натурном эксперименте

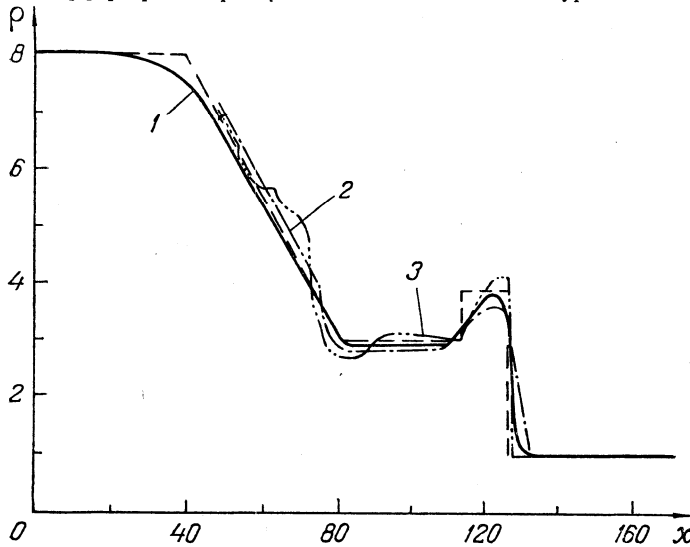


Рис. 4. Решение задачи о распаде газодинамического разрыва: 1 — на основе кинетического алгоритма; 2 — по методу Годунова; 3 — по схеме SHASTX. Пунктиром показано точное решение

величина ρ в которой спадает при удалении от левой границы. В области за выступом формируется зона разрежения. Далее, с течением времени происходит вторичное отражение ударных волн от границ и картина еще более усложняется. На рис. 3 представлена интерферограмма распределения плотности в натурном эксперименте, соответствующая по положению прямой ударной волне рис. 2. Обращает на себя внимание хорошее совпадение результатов численного расчета и экспериментальных данных.

На примере двух одномерных задач проведем сравнение предлагаемого алгоритма с рядом известных методов, применяемых для расчета газодинамических течений.

В качестве первого примера рассмотрим задачу, связанную с распространением в газе малых возмущений. Для одномерной системы уравнений (1.2)—(1.4) слева задаются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= -Ca \sin(2\pi t/\lambda), \\ \rho(t, 0) &= \rho_0(1 - a \sin(2\pi t/\lambda)), \\ p(t, 0) &= p_0(1 - \gamma a \sin(2\pi t/\lambda)), \end{aligned} \quad (3.1)$$

соответствующие гармоническим колебаниям малой амплитуды. При этом $\gamma=5/3$, $C=1$, $\rho_0=1$, $p_0=1$. Решение системы уравнений (1.2)—(1.4) с граничными условиями (3.1) с помощью алгоритма (2.9)—(2.11) отличается от точного решения уравнений акустики, где отсутствует затухание возмущений. Расчеты велись на равномерной сетке $h=1$, число точек $N=300$, $\tau=0,05$, $\lambda=20$, $a=0,01$ и $a=0,1$. Затухание амплитуды происходит примерно за 14—15 периодов, в то время как для схемы FLIC [6] при идентичных условиях расчета такое затухание происходит за 2—3 периода.

В качестве другого примера рассмотрим задачу о распаде газодинамического разрыва [7]. В начальный момент времени в точке $x=80$ задан газодинамический разрыв. Слева от разрыва $\rho=8$, $\rho RT=480$, справа $\rho=1$, $\rho RT=1$. Использовалась равномерная по пространству сетка $h=1$, число точек $N=160$, $\tau=0,02$. На рис. 4 на момент времени $t=4$ приведены данные расчета этой задачи по схеме (2.9) — (2.11), а также по схемам Годунова и SHASTX [7]. Видны определенные преимущества результатов численного решения, полученного с помощью кинетического алгоритма, особенно в области волны разрежения.

В заключение отметим следующее. Результаты проведенных исследований свидетельствуют о том, что использование кинетических моделей открывает новые возможности в создании алгоритмов для расчета газодинамических течений. Используя в качестве физической основы кинетическую модель (1.5)—(1.13), удается получить квазигазодинамическую систему уравнений (1.2)—(1.4). Эта система уравнений позволяет использовать для расчета широкого класса течений по крайней мере невязкого газа исключительно простой и обладающий хорошей точностью вычислительный алгоритм (2.5)—(2.8).

В заключение авторы выражают благодарность Б. П. Герасимову за полезные обсуждения и сотруднику ФТИ им. Иоффе АН СССР Н. П. Менде, предоставившему в распоряжение автора рис. 3.

Литература

1. Волчинская М. И., Павлов А. Н., Четверушкин Б. Н. Об одной схеме интегрирования уравнений газовой динамики.— М., 1983.—12 с. (Препринт /ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, № 113).
2. Елизарова Т. Г., Павлов А. Н., Четверушкин Б. Н. Использование кинетической модели для вывода уравнений, описывающих газодинамические течения.— М., 1983.—12 с. (Препринт /ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, № 144).
3. Елизарова Т. Г., Четверушкин Б. Н.— Докл. АН СССР. Сер. вычисл. мат., 1984, т. 279, № 1, с. 80—83.
4. Елизарова Т. Г., Четверушкин Б. Н. Использование кинетических моделей для расчета газодинамических течений.— М., 1984.—23 с. (Препринт /ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, № 165).
5. Жмакин А. И., Комиссарчук В. А., Менде Н. П. и др. О распространении ударных волн в окрестности сопряжения плоских каналов.— М., 1985.—18 с. (Препринт /МФТИ им. Л. Ф. Иоффе, № 950).
6. Gentry R. A., Martin R. E., Daly B. I.— J. Comput. Phys., 1966, vol. 1, p. 87—118.
7. Жмакин А. И., Фурсенко А. А.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1980, т. 20, № 4, с. 1021—1030.

*Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша
АН СССР*

*Поступила в редакцию
1 февраля 1985 г.*