

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

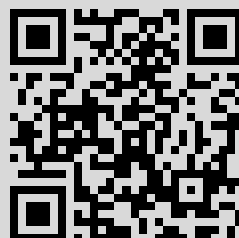
Т. Г. Елизарова, Б. Н. Четверушкин, Кинетически-согласованные разностные схемы для моделирования течений вязкого теплопроводного газа, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1988, том 28, номер 11, 1695–1710

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 176.120.240.207

21 января 2021 г., 15:33:10



УДК 519.6.533.7

КИНЕТИЧЕСКИ-СОГЛАСОВАННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ  
ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОВОДНОГО  
ГАЗА

ЕЛИЗАРОВА Т. Г., ЧЕТВЕРУШКИН Б. Н.

(Москва)

Анализируется связь между решениями, получаемыми с помощью кинетически-согласованных разностных схем (к.с.р.с.), и решением уравнений Навье – Стокса для течений вязкого сжимаемого газа. Показано, что к.с.р.с. моделируют вязкие течения и соответствуют уравнениям Навье – Стокса с числом Рейнольдса, зависящим от шага пространственной сетки в пограничном слое. Построены к.с.р.с. с коррекцией, которые моделируют вязкие течения с истинным числом Рейнольдса. Кратко приведены результаты моделирования ряда задач, в которых существенно взаимодействие вязкой и невязкой части потока.

Введение

В работах [1]–[3] был предложен новый подход к решению задач газовой динамики, основанный на применении кинетически-согласованных разностных схем (к.с.р.с.). Отличие к.с.р.с. от других алгоритмов решения задач газовой динамики заключается в следующем. Как известно, уравнения газовой динамики (Эйлера или Навье – Стокса) получаются с помощью известной процедуры осреднения из уравнения Больцмана для описания одночастичной функции распределения [4]. Обычно при разностной аппроксимации этих уравнений не используется тот факт, что сами уравнения являются следствием более сложного уравнения переноса. Можно указать небольшое число работ [5]–[7], в которых макроскопические газодинамические параметры определяются путем осреднения функции распределения после решения уравнения переноса<sup>1)</sup>. Проведенные расчеты показали перспективность такого подхода и вместе с тем большие вычислительные сложности, стоящие на пути его реализации. Эти сложности в первую очередь связаны с решением уравнения переноса, обладающего большей размерностью, чем уравнения газовой динамики.

В [1], [2] с помощью простых кинетических моделей, используя там, где это необходимо, понятие локально-максвелловской или навье-стоксовской функции распределения, удалось получить замкнутую дифференциально-разностную систему уравнений для нахождения газодинамических параметров. Впоследствии [3] эти схемы удалось представить как результат разностной аппроксимации уравнения Больцмана. Такая трактовка оказалась полезной для дальнейших исследований в этом направлении и привела к построению нового класса разностных схем газовой динамики, названных кинетически-согласованными. Схемы из этого класса строятся следующим образом: выписывается разностная схема для уравнения переноса, которая затем осредняется с сумматорными инварианта-

<sup>1)</sup> Данное замечание касается только газовой среды, для описания которой справедливо использование уравнений Эйлера или Навье – Стокса. Для описания поведения разреженных газов использование различных моделей уравнения переноса является традиционным.

ми. Т. е., в отличие от других алгоритмов решения уравнений газовой динамики, в данном случае вначале идет процедура разностной дискретизации, а потом уже осреднение разностной функции распределения.

Проведенные на основе к. с. р. с. расчеты невязких газодинамических течений показали перспективность их использования, в том числе и для решения задач динамики излучающего газа [8]. Схемы обладают хорошей точностью и вместе с тем относительной простотой реализации. Первые попытки применения к. с. р. с. для расчета вязких течений с учетом эффектов пограничного слоя, возникающего на границе твердое тело — газ, также дали обнадеживающие результаты [9], [10].

В настоящей работе обсуждаются вопросы, относящиеся к выявлению связи между решением, полученным с помощью к. с. р. с., и решением уравнений Навье — Стокса. Кроме того, рассматриваются пути дальнейшего развития к. с. р. с. с целью их применения для моделирования течений вязкого газа.

### § 1. Кинетически-согласованная разностная схема

Все дальнейшее рассмотрение без уменьшения общности будет вестись на примере плоской двумерной задачи. К. с. р. с. для расчета газодинамического течения в этом случае примет вид

$$(1.1a) \quad \rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y = [\tau_x (\rho u^2 + p)]_x + [\tau_y (\rho v^2 + p)]_y,$$

$$(1.1b) \quad (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x + (\rho uv)_y + (p_{xy})_y = \\ = [\tau_x (\rho u^3 + 3pu)]_x + [\tau_y (\rho uv^2 + pu)]_y,$$

$$(1.1в) \quad (\rho v)_t + (\rho uv)_x + (\rho v^2 + p)_y + (p_{xy})_x = \\ = [\tau_x (\rho u^2 v + pv)]_x + [\tau_y (\rho v^3 + 3pv)]_y,$$

$$(1.1г) \quad E_t + [u(E + p)]_x + [v(E + p)]_y = (\lambda T_x)_x + (\lambda T_y)_y + \\ + \mu \Phi + \left\{ \tau_x \left[ u^2(E + 2p) + \frac{p}{\rho}(E + p) \right] \right\}_x + \\ + \left\{ \tau_y \left[ v^2(E + 2p) + \frac{p}{\rho}(E + p) \right] \right\}_y.$$

Здесь использованы следующие обозначения:  $p_{xy}$  — компоненты тензора вязких напряжений;  $\rho$  — плотность;  $\mathbf{u} = (u, v)$  — скорость;  $p$  — давление;  $E = \rho(u^2 + v^2)/2 + \rho \epsilon$  — полная энергия;  $\epsilon$  — внутренняя энергия;  $T = (\gamma - 1)\epsilon/R$  — температура;  $\gamma = c_p/c_v$ ;  $R = c_p - c_v$ ;  $\mu, \lambda$  — коэффициенты вязкости и теплопроводности;  $\Phi$  — диссипативная функция;  $\tau_x = h_x/2V$ ,  $\tau_y = h_y/2V$  — характерное время, которое определяется величиной шага пространственной сетки  $h_x$  и  $h_y$  и характерной скоростью  $V = c$  или  $V = c + |\mathbf{u}|$ , где  $c = (\gamma p/\rho)^{1/2}$  — адиабатическая скорость звука.

Дифференциальное представление для этой схемы запишется в виде

$$(1.2a) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho u + \frac{\partial}{\partial y} \rho v = \frac{\partial}{\partial x} \tau_x \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y} \tau_y \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2 + p),$$

$$(1.2б) \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y} \rho uv = \frac{\partial}{\partial x} \tau_x \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^3 + 3pu) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \tau_y \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv^2 + pu) + \frac{\partial}{\partial x} \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

$$(1.2\text{в}) \quad \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho u v + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2 + p) = \frac{\partial}{\partial x} \tau_x \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 v + p v) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \tau_y \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^3 + 3 p v) + \frac{\partial}{\partial x} \mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{u} \right),$$

$$(1.2\text{г}) \quad \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} u (E + p) + \frac{\partial}{\partial y} v (E + p) = \frac{\partial}{\partial x} \tau_x \frac{\partial}{\partial x} \left[ u^2 (E + 2p) + \right. \\ \left. + \frac{p}{\rho} (E + p) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \tau_y \frac{\partial}{\partial y} \left[ v^2 (E + 2p) + \frac{p}{\rho} (E + p) \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \mu \Phi.$$

Для решения разностных уравнений (1.1) и, соответственно, их дифференциального аналога (1.2) требуются дополнительные по сравнению с уравнениями Навье — Стокса граничные условия. Эти граничные условия можно получить тем же путем, что и уравнения (1.1), вводя понятие локально-максвелловской функции распределения газа на стенке и в ближайшей пристеночной области [11].

Полученные таким образом граничные условия несут ту же физическую информацию, что и граничные условия для уравнений Навье — Стокса, а именно: задается отсутствие потока массы через стенку, скорость газа на стенке, а также тепловой поток или температура стенки. В то время как условия непротекания для уравнений Навье — Стокса реализуется в виде  $u_n = 0$ , для к. с. р. с. его следует дополнить условием для плотности частиц на стенке<sup>2)</sup>:

$$(1.3) \quad \rho_c = \frac{\rho_1 T_1}{T_c} \left( 1 + \frac{u_1^2}{RT_1} - \frac{u_1}{RT_1} \frac{V_1 + V_c}{2} \right),$$

где  $u_n$  — нормальная составляющая вектора скорости;  $\rho_c$ ,  $u_c$ ,  $V_c$ ,  $T_c$  — плотность, скорость и температура газа на стенке;  $\rho_1$ ,  $u_1$ ,  $V_1$ ,  $T_1$  — аналогичные значения в первом пристеночном слое ( $u$ ,  $v$  — соответственно, нормальная и тангенциальная составляющие скорости вблизи границы газ — твердое тело).

Аналогично (1.3) запишутся граничные условия для нормальных к стенке компонент потоков импульса и энергии в схеме (1.1):

$$(1.4\text{а}) \quad W_u = \frac{p_c}{2} + \frac{p_1 + \rho_1 u_1^2}{2} - \frac{1}{V_1 + V_c} (3 p_1 u_1 + \rho_1 u_1^3),$$

$$(1.4\text{б}) \quad W_v = \frac{\rho_1 u_1 v_1}{2} + \frac{1}{V_1 + V_c} (\rho_1 u_1^2 v_1 + v_1 p_1),$$

$$(1.4\text{в}) \quad W_E = u_1 (E_1 + p_1) - \frac{1}{V_1 + V_c} \left[ u_1^2 (E_1 + 2p_1) + \right. \\ \left. + \frac{p_1}{\rho_1} (E_1 + p_1) - \frac{p_0}{\rho_0} (\epsilon_0 \rho_0 + p_0) \right].$$

В случае малости скорости газа  $u_1$  и  $v_1$  вблизи стенки (что представляется естественным в тех ситуациях, когда справедливы уравнения

<sup>2)</sup> Соотношение (1.3) следует из условия равенства нулю потока массы через твердую стенку:  $W_\rho = 0$ .

Навье — Стокса) граничное условие (1.3) примет более простой вид:

$$(1.5) \quad \rho_c T_c = \rho_1 T_1$$

или, если  $p = \rho RT$ ,

$$\partial P / \partial n = 0.$$

Условия (1.4) можно переписать в более простом виде:

$$(1.6a) \quad u = v = 0,$$

$$(1.6b) \quad T = T_c \text{ или } \partial T / \partial n = W_c.$$

З а м е ч а н и е. Граничные условия (1.3), (1.4) получены на основе вывода, допускающего существование разрыва функции распределения вблизи стенки [4].

Заметим, что при постановке для функции распределения граничных условий типа условий зеркального отражения [4] соотношение  $W_p = 0$  выполняется тождественно, а граничные условия для скорости принимают вид

$$(1.7) \quad \partial u / \partial n = 0, \quad v = 0.$$

В случае использования к.с.р.с. для описания невязких газодинамических течений естественно использовать граничные условия отражения для функции распределения (и, соответственно, граничные условия для к.с.р.с. в виде (1.6b), (1.7)).

Ниже будет показано, что к.с.р.с. удастся использовать также для моделирования вязких течений, т. е. аппроксимировать с их помощью уравнения Навье — Стокса. При этом граничные условия для макропараметров следует строить на основе условий диффузного отражения для функции распределения в виде (1.5), (1.6).

Система уравнений (1.1) с граничными условиями (1.3), (1.4) или (1.5), (1.6) является одной из возможных в классе к.с.р.с. Если рассматривать эту систему применительно к моделированию течения невязкого нетеплопроводного газа, то ее можно трактовать как одну из тех схем расчета, которые используют искусственную вязкость. Однако эта вязкость получена не феноменологическим путем, как обычно, а на основе использования микроскопического описания среды с помощью введения одночастичной функции распределения.

Как уже отмечалось, использование к.с.р.с. для расчета невязких течений дало хорошие результаты [1] — [3], [8]. Применяемые при этом схемы, обладая простотой и хорошей устойчивостью, обеспечивают вместе с тем высокую точность расчета газодинамических задач. Тем самым данный подход заслуживает серьезного рассмотрения, как одно из возможных направлений развития численных методов для решения задач невязкой газовой динамики.

## § 2. Соотношения подобия для кинетически-согласованных разностных схем

Наименее изучен в современной вычислительной газодинамике вопрос о моделировании вязких, нестационарных (неустановившихся) течений. Сложность решения соответствующих задач в значительной мере определяется необходимостью эффективного совместного расчета процессов как в вязкой, так и в невязкой части потока. Следует отметить что для описа-

ния установившихся течений существует целый ряд надежных алгоритмов, например использующих параболизированные уравнения Навье — Стокса [12], [13].

Авторы применяли к.с.р.с. для расчета нестационарных вязких течений [10]. Полученные результаты позволили сделать вывод о целесообразности использования к.с.р.с. для моделирования подобного рода задач. Выясним, в какой связи находятся решения, полученные с помощью к.с.р.с., и решения уравнений Навье — Стокса.

В невязкой части потока члены, стоящие в правых частях уравнений (1.1) и (1.2), имеют порядок  $o(h)$  и малы по сравнению с конвективными членами. Их вклад, как обычно для искусственной вязкости, проявляется в области сильного градиента параметров, например в зоне ударной волны. Таким образом, для невязкой части течения к.с.р.с. можно трактовать как схемы сквозного счета с искусственной вязкостью. Эта вязкость обладает рядом особенностей по сравнению с общепризнанными механизмами искусственной диссипации и в значительной мере определяет качество численного решения уравнений газовой динамики.

Менее очевидным представляется использование к.с.р.с. для расчета вязкой части течения. В самом деле, существующие в правых частях уравнений (1.1) и (1.2) диссипативные члены на первый взгляд существенно отличаются от естественной вязкости и теплопроводности. Чтобы найти связь с решением уравнений Навье — Стокса, проведем анализ уравнений (1.2) вблизи плоской твердой стенки.

Приведем систему уравнений (1.1г), (1.2) к безразмерному виду, используя следующие соотношения:

$$(2.1a) \quad \rho = \bar{\rho}\rho_0, \quad u = \bar{u}u_0, \quad v = \bar{v}v_0, \quad x = \bar{x}L_0, \quad y = \bar{y}L_0,$$

$$(2.1b) \quad p = \bar{p}\rho_0 u_0^2 = \bar{p}\rho_0 c_0^2 M_0^2, \quad \text{где } M_0 = u_0/c_0,$$

$$(2.1в) \quad \epsilon = \bar{\epsilon}c_0^2 M_0^2, \quad \tau_x = \bar{\tau}_x\tau_0, \quad \tau_y = \bar{\tau}_y\tau_0, \quad \mu = \bar{\mu}\mu_0, \quad \lambda = \bar{\lambda}\lambda_0, \quad \tau_0 = h_0/c_0$$

( $L_0$  — характерный линейный размер,  $h_0$  — характерный размер пространственного шага разностной сетки). При этом система уравнений запишется в следующем безразмерном виде (тильду над безразмерными переменными опускаем):

$$(2.2a) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \tau_x \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y} \tau_y \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2 + p) \right],$$

$$(2.2b) \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y} \rho uv = \\ = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \tau_x \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^3 + 3pu) + \frac{\partial}{\partial y} \tau_y \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv^2 + pu) \right] + \\ + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \text{div } \mathbf{u} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right],$$

$$(2.2в) \quad \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho uv + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2 + p) = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \tau_x \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 v + pv) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \tau_y \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^3 + 3pv) \right] + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \text{div } \mathbf{u} \right) \right],$$

$$\begin{aligned}
 (2.2\text{г}) \quad & \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} u(E+p) + \frac{\partial}{\partial y} v(E+p) = \\
 & = \frac{1}{\text{Re}^*} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \tau_x \frac{\partial}{\partial x} \left[ u^2(E+2p) + \frac{p}{\rho}(E+p) \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial}{\partial y} \tau_y \frac{\partial}{\partial y} \left[ v^2(E+2p) + \frac{p}{\rho}(E+p) \right] \right\} + \\
 & + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \mu \Phi.
 \end{aligned}$$

Здесь  $\text{Re}^* = L_0 / (u_0 \tau_0)$ ,  $\text{Re} = \rho_0 u_0 L_0 / \mu_0$ ,  $\text{Pr} = c_p \mu_0 / \lambda_0$ .

В случае  $h_0 \ll l$  ( $l$  — характерная длина свободного пробега)  $\text{Re}^* \gg \text{Re}$  и система (2.2) переходит в систему уравнений Навье — Стокса. (При этом  $l \ll L_0$ , где  $L_0$  — характерный размер расчетной области.)

Рассмотрим теперь случай  $h_0 \gg l$ , т. е. когда членами с истинной вязкостью и теплопроводностью (в рассматриваемой системе (2.2) они пропорциональны  $\text{Re}^{-1}$ ) можно пренебречь по сравнению с членами, которые пропорциональны  $1/\text{Re}^*$ .

Предположим, что граница твердое тело — газ расположена вдоль линии  $y=0$ . Как и для обычного пограничного слоя, предположим, что для пограничного слоя, описываемого уравнениями (2.2), справедливы следующие оценки по порядку величины [14]: толщина модельного пограничного слоя  $\delta^* \sim (\text{Re}^*)^{-1/2}$ , нормальная компонента скорости в погранслое  $v \sim (\text{Re}^*)^{-1/2}$ . Учитывая, что  $y \sim \delta^*$ , а  $u \sim 1$ , получаем из уравнения (2.2в)

$$(2.3) \quad \partial p / \partial y \sim (\text{Re}^*)^{-1/2}.$$

Аналогично приведем уравнения (2.2а, б, г) к виду

$$(2.4\text{а}) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = O\left(\frac{1}{\text{Re}^*}\right) + O((\text{Re}^*)^{-1/2}),$$

$$(2.4\text{б}) \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}^*} \frac{\partial}{\partial y} \tau_y \frac{\partial \rho u}{\partial y} + O\left(\frac{1}{\text{Re}^*}\right),$$

$$\begin{aligned}
 (2.4\text{в}) \quad & \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} u(E+p) + \frac{\partial}{\partial y} v(E+p) = \\
 & = \frac{1}{\text{Re}^*} \frac{\partial}{\partial y} \tau_y \frac{\partial}{\partial y} \frac{p}{\rho} (E+p) + O\left(\frac{1}{\text{Re}^*}\right).
 \end{aligned}$$

Рассмотрим первое слагаемое справа в уравнении (2.4б):

$$(2.5) \quad \frac{1}{\text{Re}^*} \frac{\partial}{\partial y} \tau_y \frac{\partial \rho u}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}^*} \frac{\partial}{\partial y} \tau_y \rho \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}^*} \frac{\partial}{\partial y} \tau_y u \frac{\partial \rho}{\partial y}.$$

Последнее слагаемое в правой части (2.5) имеет порядок  $(\text{Re}^*)^{-1/2}$  в силу (2.3). Тогда в погранслоем приближении для (2.5) можно написать

$$(2.6) \quad \frac{1}{\text{Re}^*} \frac{\partial}{\partial y} \tau_y \frac{\partial \rho u}{\partial y} \approx \frac{1}{\text{Re}^*} \frac{\partial}{\partial y} \mu^* \frac{\partial u}{\partial y},$$

где эффективный коэффициент вязкости  $\mu^*$  определяется с помощью выражения

$$(2.7) \quad \mu^* = h_y p / (2V).$$

По своей структуре такая вязкость соответствует вязкости для модели газа «твердые шары» [4] при отождествлении в ней величины  $h_v$  с длиной свободного пробега  $l$ .

Вводя энтальпию  $H = (\rho\varepsilon + p)/\rho = c_p T$ , получаем, учитывая (2.3),

$$(2.8) \quad \frac{1}{\text{Re}^*} \frac{\tau}{\partial y} \tau_y \frac{\partial}{\partial y} \frac{p}{\rho} \left( \rho \frac{u^2 + v^2}{2} + \rho\varepsilon + p \right) = \\ = \frac{1}{\text{Re}^*} \frac{\partial}{\partial y} \tau_y \frac{\partial}{\partial y} \left( p \frac{u^2 + v^2}{2} + p c_p T \right) = \frac{1}{\text{Re}^*} \frac{\partial}{\partial y} \tau_y p \frac{\partial}{\partial y} \frac{u^2 + v^2}{2} + \\ + \frac{1}{\text{Re}^*} \frac{\partial}{\partial y} \lambda^* \frac{\partial T}{\partial y}.$$

Первое слагаемое в правой части (2.8) можно истолковать как работу сил, появляющихся за счет введения дополнительной вязкости  $\mu^*$ . Второе слагаемое — как дополнительную теплопроводность с эффективным коэффициентом теплопроводности в пограничном слое  $\lambda^* = h_v p c_p / (2V)$ .

Отсюда следует, что число Прандтля для рассматриваемой системы уравнений  $\text{Pr} = \mu^* c_p / \lambda^* = 1$ .

Такой результат в данном случае представляется естественным, если вспомнить, что при введении характерного времени релаксации, определяемого по средней скорости молекул, кинетическая теория дает  $\text{Pr} = 1$  (см. [4]).

Учитывая (2.6), (2.7) и переходя к пределу при  $\text{Re}^* \rightarrow \infty$ , переписываем систему уравнений (2.4):

$$(2.9a) \quad \partial p / \partial y = 0, \quad \partial \rho / \partial t + \partial \rho u / \partial x + \partial \rho v / \partial y = 0,$$

$$(2.9б) \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}^*} \frac{\partial}{\partial y} \mu^* \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$(2.9в) \quad \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} u(E+p) + \frac{\partial}{\partial y} v(E+p) = \\ = \frac{1}{\text{Re}^*} \frac{\partial}{\partial y} \mu^* \frac{\partial}{\partial y} \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{1}{\text{Re}^*} \frac{\partial}{\partial y} \lambda^* \frac{\partial T}{\partial y}.$$

Система (2.9) совпадает с системой уравнений Прандтля с соответствующей вязкостью, зависящей от  $h_v$ . Тем самым расчет по к. с. р. с. в вязкой части потока соответствует решению уравнений Навье — Стокса для газа, вязкость которого определяется по закону (2.7) с числом Прандтля  $\text{Pr} = 1$ .

### § 3. Кинетически-согласованные схемы с коррекцией

Навье-стоксовский характер описания течения в пограничном слое с помощью к. с. р. с. определяет их хорошую применимость при моделировании газодинамических процессов, для которых характерно взаимодействие вязкой и невязкой частей потока. Однако ввиду того, что в эффективную вязкость в качестве характерного размера входит шаг пространственной сетки  $h$ , а не длина свободного пробега молекулы  $l$ , толщина пограничного слоя, определяемого с помощью к. с. р. с., как правило, значительно (в  $\sim (h/l)^{1/2}$  раз) превышает его истинную толщину. Это может исказить силу вязкого трения и тепловой поток на границе газ — твердое тело. Ввиду того что используемые в расчетах числа Рейнольдса  $\text{Re}^*$  значительно меньше истинных значений  $\text{Re}$ , могут наблюдаться искажения и других



характеристик течения, например положение точек отрыва и присоединения пограничного слоя и т. д.<sup>3)</sup>

Рассмотрим возможность увеличения расчетного числа Рейнольдса  $Re^*$ , не прибегая при этом к сгущению разностной сетки. Для этого вспомним, что исходной для построения системы (1.1) является разностная аппроксимация первого порядка точности для уравнения Больцмана [2]:

$$(3.1) \quad f_i + \xi_i f_{xi} = J(f, f'), \quad \xi > 0, \quad f_i + \xi_i f_{xi} = J(f, f'), \quad \xi < 0.$$

Здесь  $f$  — одночастичная функция распределения,  $J$  — интеграл столкновений,  $\xi$  — скорость молекулы.

Систему (3.1) заменим на эквивалентное уравнение

$$(3.2) \quad f_i + \xi_i f_{xi} = J(f, f') + \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} |\xi_i| \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

или «близкое» уравнение

$$(3.3) \quad f_i + \xi_i f_{xi} = J(f, f') + \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\xi^2}{V} \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

где  $V$  — характерная скорость в данной пространственной ячейке; обычно  $V = c + |u|$ , где  $c$  — скорость звука.

Интегрирование уравнения (3.3) с весами в виде сумматорных инвариантов  $1, \xi, \xi^2/2$  приводит к разностной схеме (1.1), уравнение (3.2) является исходным для другого, несколько более громоздкого варианта к. с. р. с. [2].

Обратим внимание, что на основе схемы первого порядка точности для к. с. р. с. (1.1) получены все макроскопические величины  $\rho = \int f d\xi$ ,  $u = \int \xi f d\xi$ ,  $\rho e = 0.5 \int c^2 f d\xi$ ,  $p_{ij} = \int c_i c_j f d\xi$ ,  $q_i = 0.5 \int c_i c^2 f d\xi$ , где  $c = \xi - u$ . При этом компоненты тензора напряжений  $p_{ij}$ ,  $i \neq j$ , и вектора теплового потока  $q_i$ , связанные с вязкостью и теплопроводностью, пропорциональны шагу сетки  $h$ , а не длине свободного пробега  $l$ . Построим такие к. с. р. с., в которые вместо этих «модельных» величин потоков входят их истинные значения. Эти вязкие и тепловые потоки, если они необходимы, получаются на основе навье-стоксовской функции распределения и аппроксимируются со вторым порядком точности.

Для этого представим аппроксимацию пространственной производной функции распределения в виде

$$(3.4) \quad \frac{\partial f \xi}{\partial x_i} \approx (uf)_{xi} + (cf)_{xi}, \quad \xi < 0, \quad \frac{\partial f \xi}{\partial x_i} \approx (uf)_{xi} + (cf)_{xi}, \quad \xi > 0.$$

Т. е. члены разностной аппроксимации, которые могут при интегрировании привести к моментам  $p_{ij}$ ,  $q_i$ , будем определять с помощью центральных

<sup>3)</sup> Как известно, во многих случаях эти характеристики потока слабо зависят от изменения числа  $Re$ . Точнее говоря, они меняются с увеличением  $Re$  до определенного предела, а после, несмотря на увеличение  $Re$ , остаются неизменными. Тем самым ряд характеристик течения может быть правильно определен и при достаточно умеренных расчетных числах Рейнольдса.

разностей, имеющих второй порядок аппроксимации. Соотношения (3.4) в дальнейшем будем использовать в единообразной форме:

$$(3.5) \quad \frac{\partial f \xi}{\partial x_i} \approx (fu)_{x_i}^{\circ} - \frac{h}{2} \left[ \frac{\xi^2}{|\xi|} (fu)_{\bar{x}_i} \right]_{x_i} + (fc)_{x_i}^{\circ}.$$

Ограничимся пространственно-двумерным случаем  $\mathbf{u}=(u, v)$ ,  $\mathbf{x}=(x, y)$ ,  $\xi=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  и выпишем три варианта разностной аппроксимации для уравнения переноса, вводя характерные времена  $\tau_x=h_x/|\xi_1| \approx h_x/V$  и  $\tau_y=h_y/|\xi_2| \approx h_y/V$ :

$$(3.6a) \quad f_t + (\xi_1 f)_x^{\circ} - \frac{1}{2} \left( \frac{h_x}{V} \xi_1^2 f_{\bar{x}} \right)_x + (\xi_2 f)_y^{\circ} - \frac{1}{2} \left( \frac{h_y}{V} \xi_2^2 f_{\bar{y}} \right)_y = J(f, f'),$$

$$(3.6б) \quad f_t + (\xi_1 f)_x^{\circ} - \frac{1}{2} \left( \frac{h_x}{V} \xi_1^2 f_{\bar{x}} \right)_x + (\xi_2 f)_y^{\circ} - \frac{1}{2} \left[ \xi_2 \frac{h_y}{V} (fv)_{\bar{y}} \right]_y = J(f, f'),$$

$$(3.6в) \quad f_t + (\xi_1 f)_x^{\circ} - \frac{1}{2} \left[ \xi_1 \frac{h_x}{V} (fu)_{\bar{x}} \right]_x + (\xi_2 f)_y^{\circ} - \frac{1}{2} \left( \frac{h_y}{V} \xi_2^2 f_{\bar{y}} \right)_y = J(f, f').$$

Здесь (3.6a) — частный случай рассмотренной ранее схемы (3.3), а схемы (3.6б, в) используют разностную аппроксимацию (3.5), соответственно, по направлениям  $y$  и  $x$ .

При построении схемы для уравнения неразрывности компоненты тензора напряжений  $p_{ij}$  и вектора теплового потока  $q_i$  не возникают, поэтому, используя схему (3.6a) и интегрируя ее с весом 1, приходим к уравнению (1.1a). При построении разностной схемы для определения импульса  $\rho u = \int f \xi_1 d\xi$  будем использовать в качестве исходной схему (3.6б), а для импульса  $\rho v = \int f \xi_2 d\xi$  — схему (3.6в). При подстановке максвелловской функции распределения слагаемые, соответствующие  $p_{xy}$  компонентам тензора напряжений, в данной схеме будут отсутствовать. При построении разностной схемы для определения полной энергии используется выражение

$$(3.7) \quad E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) d\xi.$$

Представим (3.7) в виде

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f \xi_1^2 d\xi + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f \xi_2^2 d\xi + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f \xi_3^2 d\xi$$

и при интегрировании с весами  $\xi_1^2$  и  $\xi_2^2$  возьмем схемы (3.6б) и (3.6в), а при интегрировании с весом  $\xi_3^2$  — схему

$$(3.8) \quad f_t + (\xi_1 f)_x^{\circ} - \frac{1}{2} \left( \frac{h_x}{V} \xi_1 (fu)_{\bar{x}} \right)_x + (\xi_2 f)_y^{\circ} - \frac{1}{2} \left( \frac{h_y}{V} \xi_2 (fv)_{\bar{y}} \right)_y = J(f, f').$$

Отметим, что разностные аппроксимации (3.6б, в), (3.8), как и исходная

аппроксимация (3.6а), могут быть интерпретированы как схемы первого порядка точности для уравнения переноса.

Таким образом, используя разностные схемы (3.6) и (3.8) для уравнения переноса и интегрируя их с соответствующими сумматорными инвариантами, получаем кинетически-согласованную схему с коррекцией:

$$(3.9a) \quad \rho_t + (\rho u)_x^\circ + (\rho v)_y^\circ = \left[ \frac{h_x}{2V} (\rho u^2 + p)_{\bar{x}} \right]_x + \left[ \frac{h_y}{2V} (\rho v^2 + p)_{\bar{y}} \right]_y,$$

$$(3.9б) \quad (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_{\bar{x}}^\circ + (\rho uv)_y^\circ + (p_{xy})_y^\circ = \\ = \left[ \frac{h_x}{2V} (\rho u^3 + 3pu)_{\bar{x}} \right]_x + \left[ \frac{h_y}{2V} (\rho uv^2)_{\bar{y}} \right]_y,$$

$$(3.9в) \quad (\rho v)_t + (\rho uv)_x^\circ + (\rho v^2 + p)_{\bar{y}}^\circ + (p_{xy})_x^\circ = \\ = \left[ \frac{h_x}{2V} (\rho u^2 v)_{\bar{x}} \right]_x + \left[ \frac{h_y}{2V} (\rho v^3 + 3pv)_{\bar{y}} \right]_y,$$

$$(3.9г) \quad E_t + [u(E + p)]_x^\circ + [v(E + p)]_y^\circ + (q_x)_x^\circ + (q_y)_y^\circ + \\ + (vp_{xy})_x^\circ + (up_{xy})_y^\circ = \left\{ \frac{h_x}{2V} [u^2(E + 2p)]_{\bar{x}} \right\}_x + \\ + \left[ \frac{h_x}{2V} p \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon \right)_{\bar{x}} \right]_x + \left\{ \frac{h_y}{2V} [v^2(E + 2p)]_{\bar{y}} \right\}_y + \\ + \left[ \frac{h_y}{2V} p \left( \frac{v^2}{2} + \varepsilon \right)_{\bar{y}} \right]_y.$$

Когда для получения уравнений (3.9) используется локально-максвелловская функция распределения

$$f_0(x, \xi, t) = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{(\xi_i - u_i)^2}{2RT} \right],$$

то  $p_{ij} = \delta_{ij}p$ ,  $q_i = 0$ . Если для осреднения используется локально навье-стоксовская функция распределения

$$f_{NS}(x, \xi, t) = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{(\xi_i - u_i)^2}{2RT} \right] \left[ 1 + \right. \\ \left. + \frac{p_{ij}}{p} \frac{1}{2RT} c_i c_j - \frac{2}{3} q_i \frac{1}{RT} c_i \left( \frac{5}{2} - \frac{c^2}{2RT} \right) \right],$$

то

$$(3.10) \quad p_{ij} = \delta_{ij}p - \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \operatorname{div} u \delta_{ij} \right), \quad q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

и в системе (3.9) появляются члены с естественной вязкостью  $\mu$  и теплопроводностью  $\lambda$ .

Строго говоря, систему (3.9) нельзя назвать кинетически-согласованной: каждое уравнение получается из своей разностной схемы для уравнения переноса. Однако эти схемы, по аналогии с традиционными к.с.р.с., получены на основе использования разностных аналогов уравнения Больцмана. Это дает основание приписать к классу к.с.р.с. и схему (3.9), которую, в отличие от схемы (1.1), назовем кинетически-согласованной разностной схемой с коррекцией.

Анализ системы уравнений, соответствующих схемам (3.9), проведенный аналогично анализу системы (1.1) в приближении пограничного слоя, приводит к уравнениям Прандтля [15]

$$(3.11a) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0,$$

$$(3.11б) \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y} \rho u v = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$(3.11в) \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$(3.11г) \quad \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} u(E+p) + \frac{\partial}{\partial y} v(E+p) = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

Здесь  $\text{Re}$  — истинное число Рейнольдса. Тем самым к.с.р.с. с коррекцией позволяют правильно моделировать вязкие и теплопроводные эффекты в пограничном слое.

Заметим, однако, что использование (3.9), (3.10) к.с.р.с. с коррекцией целесообразно лишь в случае, если число точек разностной сетки  $N$  поперек пограничного слоя порядка 10 и выше. Другими словами, для шага разностной сетки  $h_y$  выполняется соотношение

$$h_y \approx \delta/N,$$

где  $\delta$  — толщина пограничного слоя,  $\delta \sim (\text{Re})^{-1/2}$ . Отметим также, что и само уравнение (3.11в) выполняется с точностью до  $O(1/N^2)$  (см. [15]).

Таким образом, система уравнений (3.9), по сути дела, аппроксимирует систему уравнений Навье — Стокса с искусственной вязкостью. В «невязкой» части течения наличие такой вязкости делает разностную схему (3.9) схемой первого порядка точности и позволяет рассчитывать течения с наличием ударных волн. В пограничном слое искусственная вязкость мала по сравнению с истинной вязкостью газа и разностная аппроксимация (3.9) переходит в схему второго порядка точности по пространству для уравнений Прандтля (3.11).

В ряде случаев для проведения численных расчетов удобнее использовать «промежуточную» между (1.1) и (3.9), (3.10) систему уравнений, которую запишем в виде

$$(3.12a) \quad \rho_t + (\rho u)_x^\alpha + (\rho v)_y^\beta = \left[ \frac{h_x}{2V} (\rho u^2 + p)_{\bar{x}} \right]_x + \left[ \frac{h_y}{2V} (\rho v^2 + p)_{\bar{y}} \right]_y,$$

$$(3.12б) \quad (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x^\alpha + (\rho u v)_y^\beta + (p_{xy})_y^\beta = \\ = \left[ \frac{h_x}{2V} (\rho u^3 + 3\rho u)_{\bar{x}} \right]_x + \left[ \frac{h_y}{2V} (\rho u v^2)_{\bar{y}} \right]_y + \left[ \alpha \frac{h_y}{2V} (p u)_{\bar{y}} \right]_y,$$

$$(3.12в) \quad (\rho v)_t + (\rho u v)_x^\alpha + (\rho v^2 + p)_y^\beta + (p_{xy})_x^\alpha = \\ = \left[ \frac{h_x}{2V} (\rho u^2 v)_{\bar{x}} \right]_x + \left[ \alpha \frac{h_x}{2V} (p v)_{\bar{x}} \right]_x + \left[ \frac{h_y}{2V} (\rho v^3 + 3p v)_{\bar{y}} \right]_y,$$

$$(3.12г) \quad E_t + [u(E+p)]_x^\alpha + [v(E+p)]_y^\beta = (q_x + v p_{xy})_x^\alpha + (q_y + u p_{xy})_y^\beta = \\ = \left\{ \frac{h_x}{2V} \left[ u^2(E+2p) + p \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon \right) \right]_{\bar{x}} \right\}_x + \\ + \left[ \alpha \frac{h_x}{2V} p \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right)_{\bar{x}} \right]_x + \left\{ \frac{h_y}{2V} \left[ v^2(E+2p) + \right. \right. \\ \left. \left. + p \left( \frac{v^2}{2} + \varepsilon \right) \right]_{\bar{y}} \right\}_y + \left[ \alpha \frac{h_y}{2V} p \left( \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right)_{\bar{y}} \right]_y,$$

где  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Система (3.12) отличается от (1.1) тем, что члены

$$\left[ \frac{h_y}{2V} (up)_{\bar{y}} \right]_y, \quad \left[ \frac{h_x}{2V} (vp)_{\bar{x}} \right]_x,$$

$$\left[ \frac{h_y}{2V} p \left( \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right)_{\bar{y}} \right]_y, \quad \left[ \frac{h_x}{2V} p \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right)_{\bar{x}} \right]_x$$

уменьшены в  $\alpha$  раз.

Остановимся подробнее на аппроксимации вязких и теплопроводностных членов указанной системой уравнений в погранслоном приближении для  $0 < \alpha < 1$ .

Нетрудно видеть, что коэффициент модельной вязкости для к.с.р.с. с коррекцией имеет вид

$$(3.13) \quad \mu^* = \alpha h p / (2V)$$

и при отождествлении величины  $h$  с длиной свободного пробега  $l$  данная схема позволяет описывать диссипативные процессы в пограничном слое со вторым порядком точности. Однако вследствие того, что длина свободного пробега  $l$  в отличие от шага  $h$  зависит от плотности  $\rho$ , в соотношение (3.13) следует ввести зависимость от температуры и плотности такого вида, чтобы она удовлетворяла нужному закону  $\mu(T)$ . В частности, для воздуха таким законом является соотношение Саттерленда [14], которое имеет следующий вид:

$$(3.14) \quad \frac{\mu}{\mu_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{1/2} \frac{T_0 + S_1}{T + S_1},$$

где  $\mu_0 = \mu_0(T_0)$ ,  $S_1 = \text{const}$ .

Удобнее всего зависимость коэффициента вязкости от температуры ввести в коэффициент коррекции, полагая  $\alpha = \alpha(\rho, T)$ . В частности, для выполнения (3.14) достаточно положить

$$(3.15) \quad \alpha(\rho, T) = \alpha_0 \frac{\rho}{\rho_0} \frac{T}{T_0} \frac{T_0 + S_1}{T + S_1}.$$

Полагая  $V = (\gamma RT)^{1/2}$ ,  $p = \rho RT$  для (3.14), получаем  $\alpha_0 = 2\mu_0 / (h\rho_0 c_0)$ .

Заметим, что при проведении расчетов на неравномерных сетках коэффициент  $\alpha_0$  будет изменяться в зависимости от шага пространственной сетки  $\alpha_0 = \alpha_0(h)$  таким образом, чтобы  $\mu^*$  в (3.13) уже не зависела от  $h$ .

Для того чтобы получить аппроксимацию уравнения энергии с истинным числом Прандтля, запишем теплопроводностные члены в правой части (3.12г) в виде

$$(3.16) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{h_i}{2V} \frac{\partial p \epsilon}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \alpha \frac{h_i}{2V} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{p^2}{\rho} \approx$$

$$\approx \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{h_i}{2V \rho (\gamma - 1)} \frac{\partial p^2}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \beta \frac{h_i}{2V} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{p^2}{\rho},$$

где коэффициент коррекции  $\beta$  в уравнении энергии будем вычислять по заданному числу Прандтля  $\text{Pr}$  и параметру коррекции  $\alpha(\rho, T)$  в уравнении движения следующим образом:

$$(3.17) \quad \beta(\rho, T) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\alpha(\rho, T)}{\text{Pr}}.$$

В этом случае

$$\lambda^* = \beta(\rho, T) h p R / (2V),$$

где  $R = c_p - c_v$ , и  $\text{Pr}^* = \mu^* c_p / \lambda^* \equiv \text{Pr}$ .

Согласно (3.16) выпишем один из возможных видов аппроксимации уравнения энергии, удобный для расчета течений с истинной вязкостью и теплопроводностью:

$$(3.18) \quad E_t + [u(E+p)]_{\bar{x}} + [v(E+p)]_{\bar{y}} = \\ = \left\{ \frac{h_x}{2V} \left[ u^2 \left( E + \frac{5}{2} p \right) \right]_{\bar{x}} \right\}_x + \left[ \frac{h_x}{2V} \frac{1}{\rho(\gamma-1)} p_{\bar{x}}^2 \right]_x + \\ + \left\{ \frac{h_y}{2V} \left[ v^2 \left( E + \frac{5}{2} p \right) \right]_{\bar{y}} \right\}_y + \left[ \frac{h_y}{2V} \frac{1}{\rho(\gamma-1)} p_{\bar{y}}^2 \right]_y + \\ + \left[ \frac{h_x}{2V} \beta(\rho, T) \left( \frac{p^2}{\rho} \right)_{\bar{x}} \right]_x + \left[ \frac{h_y}{2V} \beta(\rho, T) \left( \frac{p^2}{\rho} \right)_{\bar{y}} \right]_y + \\ + \left[ \frac{h_x}{2V} \alpha(\rho, T) \left( p \frac{v^2}{2} \right)_{\bar{x}} \right]_x + \left[ \frac{h_y}{2V} \alpha(\rho, T) \left( p \frac{u^2}{2} \right)_{\bar{y}} \right]_y.$$

Последние два слагаемых в (3.18) представляют собой работу сил вязкого давления.

Таким образом, к.с.р.с с коррекцией вида (3.12) или (3.18) при коэффициентах коррекции (3.15), (3.17) позволяют рассчитывать газодинамические течения с истинной вязкостью и теплопроводностью. При этом разностная схема обладает первым порядком точности в области невязкого течения и вторым порядком — в области пограничного слоя.

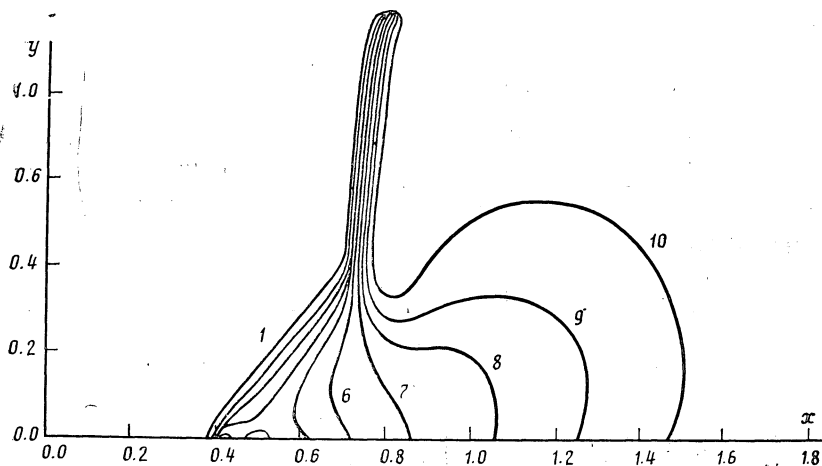
#### § 4. Некоторые примеры численных расчетов

Кратко рассмотрим ряд примеров моделирования вязких течений на основе использования к.с.р.с.

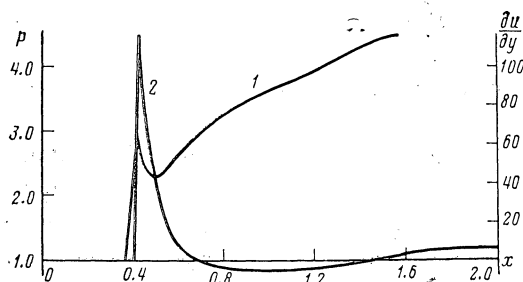
В качестве первого примера возьмем задачу о сверхзвуковом обтекании пластины под нулевым углом атаки [16]. В случае ламинарного течения несжимаемой жидкости данная задача носит название задачи Блазиуса, описывается системой уравнений Прандтля (3.11) и имеет автомодельное решение, согласно которому коэффициент сопротивления  $c_f$  пластины длины  $L$  имеет вид (закон сопротивления Блазиуса)  $c_f = 1.328 (\text{Re}_L)^{-1/2}$ . В случае сжимаемого течения условие адиабатичности также делает задачу автомодельной. В этом случае для коэффициента сопротивления пластины  $c_f^{\text{Ю}}$  справедлива полуэмпирическая формула Юнга [14]. При численном моделировании задачи Блазиуса рассматривалось набежание на адиабатическую пластину  $L=100$  потока с параметрами  $M_0=3$ ,  $\rho_0=1.4$ ,  $p_0=1$ ,  $\gamma=1.4$ , при этом число Рейнольдса  $\text{Re}_L$  варьировалось от  $3.36 \cdot 10^3$  до  $3.36 \cdot 10^5$ ,  $\mu$  вычислялось согласно (3.13). Расчетное значение коэффициента сопротивления, полученное на основе соотношения

$$c_f^* = 2 \int_0^L \mu \frac{\partial u}{\partial y} dx (\rho_0 u_0^2 L)^{-1},$$

сравнивалось с теоретическими значениями  $c_f$  и  $c_f^{\text{Ю}}$ . Например, при этом для  $\text{Re}_L = 3.36 \cdot 10^5$  было  $c_f^* = 2.20 \cdot 10^{-3}$ ,  $c_f = 2.29 \cdot 10^{-3}$ ,  $c_f^{\text{Ю}} = 2.27 \cdot 10^{-3}$ . Имеющееся отличие вызвано вкладом носовой части пластинки, где приближение Прандтля неприменимо. Полученные в расчетах профили газодина-



Фиг. 1



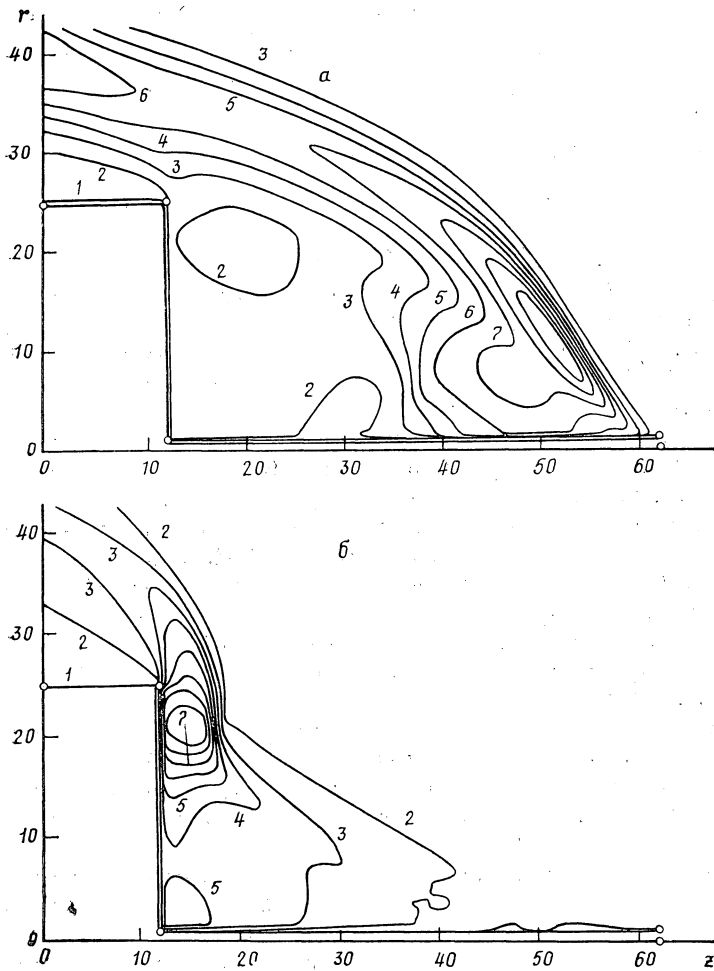
Фиг. 2

мических параметров при удалении от носика пластины аффинноподобны и практически совпадают с автомодельными.

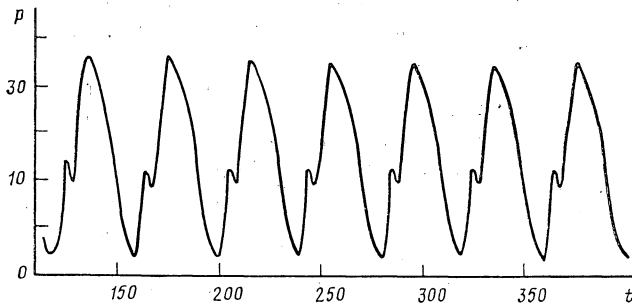
В качестве следующего примера приведем результаты расчета взаимодействия прямого скачка уплотнения с пограничным слоем на пластине (фиг. 1; линии уровня эквидистантны,  $M_0=2$ ,  $p_{\min}=1.3$ ,  $p_{\max}=4.4$ ). Видно образование отрывного течения характерной для него конфигурации [17]. На фиг. 2 приведено распределение давления (кривая 1) и коэффициента сопротивления  $c_f=du/dy$  вдоль пластины (кривая 2). Области возвратного течения соответствуют  $c_f^* < 0$ .

Приведем вкратце результаты численного моделирования нестационарных периодических режимов течения с передними срывными зонами [10]. Хорошо известны сложности расчета таких течений в приближении Навье — Стокса, которые связаны в первую очередь с эффектами взаимодействия «вязкой» и «невязкой» частей потока при больших числах  $Re$ . В численных экспериментах для чисел  $M=6$  были получены известные из натуральных экспериментов области стационарного течения и колебательные режимы I и II рода. При  $Re=1.6 \cdot 10^3$  ( $\alpha_0=1$ ) колебательные режимы носили затухающий характер [10], при  $Re=8.4 \cdot 10^3$  ( $\alpha_0=0.2$ , к.с.р.с с коррекцией) — незатухающий. Совпадение расчетной частоты колебаний (число Струхали  $Sh=0.41$ ) и экспериментально наблюдаемой ( $Sh=0.42$ ) находилось в пределах погрешности эксперимента.

На фиг. 3 приведены изолинии плотности для двух характерных фаз пульсаций (колебательный режим II рода). График *a* соответствует мак-



Фиг. 3



Фиг. 4

симальному, а график б — минимальному размеру отрывной зоны. На фиг. 4 представлена зависимость от времени давления на цилиндрической поверхности для  $Re=8.4 \cdot 10^3$  (см. [18]).

На основе к.с.р.с. были исследованы задачи сверхзвукового обтекания плоской прямоугольной каверны [19] и проведены расчеты пульсационных течений, возникающих при взаимодействии сверхзвукового потока с цилиндрической резонансной трубой, расположенной под нулевым углом атаки [20].

В целом, как показывает практика использования, к.с.р.с. представляется хорошим инструментом для моделирования вязких течений. По всей



видимости, положительный опыт применения к.с.р.с. связан с тем, что они органически осуществляют переход от моделирования невязкой части течения к моделированию тех областей, где существен учет вязкости и теплопроводности.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность С. В. Цынкову, проводившему ряд расчетов.

#### Литература

1. *Елизарова Т. Г., Четверушкин Б. Н.* Об одном вычислительном алгоритме для расчета газодинамических течений // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279. № 1. С. 80–83.
2. *Елизарова Т. Г., Четверушкин Б. Н.* Использование кинетических моделей для расчета газодинамических течений // Матем. моделирование. М.: Наука, 1986. С. 261–278.
3. *Елизарова Т. Г.* О классе кинетически согласованных разностных схем газовой динамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27. № 11. С. 1748–1752.
4. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967.
5. *Поткин В. А.* Кинетический анализ разностных схем для газовой динамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1975. Т. 15. № 6. С. 1492–1498.
6. *Reits R. D.* One-dimensional compressible gas dynamics calculations using the Boltzman equation // J. Comput. Phys. 1981. V. 42. № 1. P. 108–123.
7. *Аристов В. В., Черемисин Ф. Г.* Решение уравнений Эйлера и Навье – Стокса на основе операторного расщепления кинетического уравнения // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 3. С. 555–559.
8. *Четверушкин Б. Н., Чурбанова Н. Г.* Консервативные кинетические схемы для решения задач газовой динамики: Препринт № 78. М.: ИПМатем. АН СССР, 1986.
9. *Граур И. А., Елизарова Т. Г., Четверушкин Б. Н.* Моделирование сложных газодинамических течений на основе кинетических алгоритмов // Дифференц. ур-ния. 1986. Т. 22. № 7. С. 1117–1180.
10. *Елизарова Т. Г., Павлов А. Н., Четверушкин Б. Н.* Использование квазигидродинамической системы уравнений для расчета обтекания тела с иглой // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297. № 2. С. 327–331.
11. *Елизарова Т. Г.* Граничные условия для кинетически согласованных разностных схем газовой динамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т. 28. № 6. С. 926–932.
12. *Ковеня В. М., Черный С. Г.* Маршевый метод решения стационарных упрощенных уравнений Навье – Стокса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1983. Т. 23. № 5. С. 1186–1198.
13. *Головачев Ю. П., Кузьмин А. М., Попов Ф. Д.* О расчете сверхзвукового обтекания затупленных тел с использованием полных и упрощенных уравнений Навье – Стокса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1973. Т. 13. № 4. С. 1021–1028.
14. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973.
15. *Елизарова Т. Г., Четверушкин Б. Н.* О моделировании течений вязкого теплопроводного газа на основе кинетически-согласованных разностных схем: Препринт № 120. М.: ИПМатем. АН СССР, 1987. 23 с.
16. *Абалакин И. В., Дородницын Л. В., Елизарова Т. Г.* Прямое численное моделирование задачи Блазиуса // Дифференц. ур-ния. 1988. Т. 24. № 7. С. 1107–1113.
17. *Гогин Л. В., Степанов Г. Ю.* Турбулентные отрывные течения. М.: Наука, 1979.
18. *Антонов А. Н., Елизарова Т. Г., Павлов А. Н., Четверушкин Б. Н.* Прямое численное моделирование колебательных режимов при обтекании тела с иглой: Препринт № 56. М.: ИПМатем. АН СССР, 1988. 24 с.
19. *Граур И. А., Елизарова Т. Г., Четверушкин Б. Н.* О применении кинетически-согласованных разностных схем для расчета теплообмена в сверхзвуковых газодинамических потоках: Препринт № 90. М.: ИПМатем. АН СССР, 1988. 23 с.
20. *Елизарова Т. Г., Четверушкин Б. Н., Шеретов Ю. В.* О некоторых результатах расчета сверхзвукового обтекания полого цилиндра, проведенного в рамках кинетически-согласованных разностных схем: Препринт № 97. М.: ИПМатем. АН СССР, 1988. 25 с.

Поступила в редакцию 24.IX.1987  
Переработанный вариант 6.V.1988