

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

том 8 номер 7 год 1996

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

УДК 519.86

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ В КАВЕРНЕ НА ОСНОВЕ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

© Д.Б. Гуров, Т.Г. Елизарова, Ю.В. Шеретов

Институт Математического Моделирования РАН, г. Москва, 125047,
Тверской Государственный Университет, г.Тверь, 170002

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований
(код проекта 94-01-01526)

На основе численного интегрирования системы квазигидродинамических уравнений демонстрируется возможность моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости. Решается задача о течении жидкости в прямоугольной каверне с подвижной крышкой при умеренных числах Рейнольдса.

NUMERICAL SIMULATION OF INCOMPRESSIBLE VISCOUS FLOWS IN CAVITY USING QUASI-HYDRODYNAMIC EQUATIONS

D. B. Gurov, T. G. Elizarova, Yu. V. Sheretov

Institute for Mathematical Modeling RAS, Moscow, 125047,
State University of Tver, Tver, 170002

Basing on numerical solution of quasi-hydrodynamic equations the possibility of incompressible viscous flow simulation is demonstrated. Numerical simulation of the flows for moderate Reynolds numbers in a plane rectangular cavity with moving wall is shown as an example.

1. Введение

В подавляющем большинстве работ в качестве основной математической модели для описания течений вязкой несжимаемой жидкости использовалась классическая система уравнений Навье-Стокса [1]. Эта система является диссипативной, обладает серией точных физически-адекватных решений, хорошо описывает реальные ламинарные течения. В настоящее время разработано достаточно большое количество численных методов решения уравнений Навье-Стокса, записанных как в естественных переменных "скорость - давление", так и в переменных "функция тока - вихрь" [1] - [7]. Однако при построении дискретных моделей в этом случае могут возникнуть проблемы, связанные с постановкой граничных условий

как на свободных границах, так и на твердых поверхностях. В последнем случае появляется необходимость построения дополнительного условия для давления в естественных переменных и условий для вихря в переменных "функция тока - вихрь" [2], [5]. Вопрос о постановке дополнительных граничных условий в каждой конкретной задаче является предметом дискуссий.

Основные трудности при численном моделировании течений возникают в случае, когда числа Рейнольдса велики. С одной стороны, это чисто вычислительные трудности, связанные с необходимостью использования подробных сеток для разрешения пограничных слоев, введением дополнительных сеточных регуляризаторов для обеспечения устойчивости счета и т.д. С другой стороны - трудности, связанные с адекватным описанием самой математической моделью течений жидкости, которые в этом случае носят турбулентный характер.

В настоящей работе течения вязкой несжимаемой жидкости моделируются на основе системы квазигидродинамических (КГД) уравнений [8]. Система КГД уравнений, как и система Навье-Стокса, является диссипативной и обладает серией точных физически адекватных решений. Демонстрируется возможность использования этой системы для моделирования ламинарных течений вязкой жидкости в прямоугольной каверне с подвижной верхней стенкой. При переходе от дифференциальной задачи к задаче дискретной необходимости в постановке дополнительных граничных условий не возникает.

2. Квазигидродинамическая система уравнений

В качестве основной математической модели будем рассматривать КГД систему, предложенную в [8]:

$$\operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{div} \tau((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla} p), \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_t + \operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} p = \operatorname{div} \hat{\sigma} + \\ + \operatorname{div} \tau(((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla} p) \otimes \vec{u} + \vec{u} \otimes ((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla} p)). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Система (2.1) - (2.2) замкнута относительно неизвестных функций: скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ и давления, деленного на плотность $p = p(\vec{x}, t)$. Плотность жидкости ρ считается постоянной. Здесь $\hat{\sigma} = \nu[(\vec{\nabla} \otimes \vec{u}) + (\vec{\nabla} \otimes \vec{u})^T]$ - тензор вязких напряжений для случая несжимаемой жидкости [1], $\vec{u} \otimes \vec{u}$ - диадное произведение векторов \vec{u} и \vec{u} , $\nu = \mu/\rho = \operatorname{const} > 0$ - коэффициент кинематической вязкости. При вычислении дивергенции от диады оператор div действует на первый из выписанных векторов. Параметр $\tau = \operatorname{const} > 0$ интерпретируется как некоторое характерное время.

Система КГД уравнений [8] является формальным обобщением на случай вязкой несжимаемой жидкости системы квазигазодинамических уравнений, успешно применявшейся при численном моделировании течений разреженного газа [9] - [11]. В пределе при $\tau \rightarrow 0$ она переходит в классическую систему уравнений Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости [1]

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad (2.3)$$

$$\vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla} p = \nu \Delta \vec{u}. \quad (2.4)$$

Целесообразно выбирать τ в виде $\tau = \nu/U_0^2$, где U_0 - характерная скорость течения жидкости, присутствующая в формуле для вычисления числа Рейнольдса Re . В стационарном случае при указанном выборе параметра τ система (2.1) - (2.2) отличается от системы (2.3) - (2.4) членами, имеющими формально более высокие порядки малости по величине $1/Re$, а именно, имеющими порядки $O(1/Re^2)$. Аналогичное свойство справедливо и для квазигазодинамических уравнений по отношению к системе уравнений Навье-Стокса для газа, где в качестве малого параметра использовалась величина числа Кнудсена [9].

Заметим, что используемый в данной работе способ формального обобщения квазигазодинамических уравнений на случай вязкой несжимаемой жидкости не является единственно возможным. Другой вариант предложен в работе [12]. Сеточные регуляризаторы квазигидродинамического типа для расчета течений вязкой жидкости использовались также ранее в [13], [14].

3. Граничные условия

Система (2.1) - (2.2) имеет более высокий порядок по сравнению с системой уравнений Навье-Стокса (2.3) - (2.4) из-за присутствия в ней членов, содержащих вторые производные по пространственным переменным от давления. Это влечет необходимость постановки дополнительных граничных условий для давления.

На неподвижной гладкой твердой поверхности S для скорости \vec{u} естественно использовать условие прилипания

$$\vec{u} |_S = 0. \tag{3.5}$$

Граничное условие для давления на такой поверхности предлагается использовать в виде

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} |_S = 0, \tag{3.6}$$

где \vec{n} - вектор единичной внешней нормали к поверхности S .

Если для системы Навье-Стокса на твердой поверхности условие (3.6) в общем случае не выполняется, то для системы (2.1) - (2.2) оно ничему не противоречит. Рассмотрим в качестве примера гладкое решение (\vec{u}, p) системы (2.1) - (2.2), описывающее течение жидкости в объеме V , ограниченном неподвижной гладкой твердой стенкой S . Подставим функции \vec{u} и p в (2.1) и проинтегрируем полученное тождество по указанному объему. Принимая во внимание граничное условие (3.5) и считая пространственные производные от скорости ограниченными, получим

$$\int \int_S \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} dS = 0. \tag{3.7}$$

Таким образом, граничное условие для давления необходимо должно удовлетворять тождеству (3.7). Очевидно, условие (3.6) удовлетворяет (3.7). Заметим, что выполнение тождества (3.7) обеспечивает для уравнения (2.1) условие сохранения массы жидкости в замкнутом объеме V .

Аналогично, подставим функции \vec{u} и p в (2.2) и с учетом граничных условий (3.5) - (3.6) проинтегрируем полученное тождество по объему V :

$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{u} d\vec{x} = - \int \int_S p \vec{n} dS + \int \int_S (\delta \vec{n}) dS. \tag{3.8}$$

Из (3.8) следует, что скорость изменения полного импульса жидкости в объеме V равна суммарной действующей поверхностной силе. Аналогичное интегральное тождество справедливо и для системы уравнений Навье-Стокса.

В заключение заметим, что для получения из системы (2.1) - (2.2) тождеств (3.7) и (3.8) в качестве граничного условия для скорости кроме условия прилипания (3.5) в случае плоских границ можно использовать и другие условия для скорости, в частности, условие непротекания $u_n = 0$ (u_n - нормальная к границе составляющая скорости) совместно с каким-либо условием для касательной к границе компоненты скорости u_t - например, условием скольжения в виде $\partial u_t / \partial n = 0$ или $u_t = \text{const}$. Это, в частности, позволяет рассматривать для КГД системы задачу о течении в каверне с подвижной верхней крышкой.

При указанной постановке граничных условий для КГД системы трение c_f на плоской границе, вычисленное с учетом пропорциональной τ добавки к тензору вязких напряжений, формально оказывается независимым от τ и совпадает с c_f для системы уравнений Навье-Стокса $c_f = \nu \partial u_t / \partial n$, где u_t - тангенциальная составляющая скорости вблизи границы.

4. Система уравнений в двумерном случае и постановка задачи

Выпишем систему (2.1) - (2.2) для случая плоского нестационарного течения:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\tau \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\tau \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right], \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (uv) + \frac{\partial p}{\partial x} &= 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ &+ 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\tau u \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\tau v \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\tau u \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (v^2) + \frac{\partial}{\partial x} (uv) + \frac{\partial p}{\partial y} &= 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ &+ 2 \frac{\partial}{\partial y} \left[\tau v \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\tau u \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\tau v \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Здесь $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$ - неизвестные горизонтальная и вертикальная компоненты поля скорости соответственно; $p = p(x, y, t)$ - неизвестное поле давления, деленного на плотность.

Рассматривается задача о течении изотермической вязкой несжимаемой жидкости в квадратной каверне размером L с подвижной верхней крышкой. Течение описывается системой уравнений (3.5) - (3.7), к которой добавим следующие граничные условия на регулярной части границы:

- нижняя стенка - $y = 0, 0 < x < L : u = 0, v = 0, \partial p / \partial y = 0,$
- верхняя движущаяся стенка - $y = L, 0 < x < L : u = U_0, v = 0, \partial p / \partial y = 0,$
- левая боковая стенка - $x = 0, 0 < y < L : u = 0, v = 0, \partial p / \partial x = 0,$
- правая боковая стенка - $x = L, 0 < y < L : u = 0, v = 0, \partial p / \partial x = 0.$

В угловых точках (на нерегулярной части границы) - $(0, 0), (L, 0), (L, L), (0, L)$ граничные условия не задаются. В качестве начального условия используется невозмущенное поле скорости.

Параметр τ вычисляется следующим образом:

$$\tau = \frac{\nu}{U_0^2},$$

где U_0 - скорость движения верхней крышки каверны.

Система уравнений (4.9) - (4.11) приводится к безразмерному виду

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x}L, \quad y = \tilde{y}L, \quad u = \tilde{u}U_0, \\ v &= \tilde{v}U_0, \quad t = \tilde{t}\frac{L}{U_0}, \quad p = \tilde{p}U_0^2. \end{aligned}$$

После обезразмеривания система уравнений (3.5) - (3.7) сохраняет свой вид, причем для безразмерных \tilde{v} и $\tilde{\tau}$ получаем:

$$\tilde{v} = \tilde{\tau} = \frac{1}{\text{Re}},$$

где число Рейнольдса $\text{Re} = U_0L/\nu$.

Отметим, что при такой постановке задачи мы не используем никаких дополнительных свободных параметров по сравнению с системой Навье-Стокса. Так как безразмерная величина τ определяется только числом Рейнольдса, закон подобия Рейнольдса также автоматически выполняется.

5. Вычислительный алгоритм

Расчетная область покрывается равномерной по обоим направлениям сеткой ω_h с шагом h . Пространственные производные в системе уравнений (4.9) - (4.11) аппроксимируются с порядком $O(h^2)$ при $h \rightarrow 0$. При этом все величины вычисляются в узлах разностной сетки. Значения величин в полужелтых узлах определяются как полусуммы значений этих величин в ближайших узлах с целыми индексами. Смешанные производные аппроксимируются с использованием значений величин в центрах ячеек, которые вычисляются как 1/4 часть суммы значений этих величин в прилегающих узлах. Производные по времени аппроксимируются разностями вперед с первым порядком.

В приграничных узлах сетки разностные уравнения видоизменяются с учетом граничных условий. Аппроксимация граничных условий осуществляется путем вычисления соответствующих производных от скоростей на границах области со вторым порядком точности. Она может быть эффективно обеспечена введением дополнительных слоев фиктивных узлов по внешним границам расчетной области

или путем вычисления соответствующих производных от скоростей на границе с использованием разложения по Тейлору.

На каждом временном шаге поле давления находится по известному полю скорости путем решения уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{\bar{\tau}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right], \quad (5.12)$$

которое следует из (4.9) и аппроксимируется так же, как и уравнения движения. Для решения (5.12) применяются два метода: метод простой итерации и предобусловленный метод сопряженных градиентов [15]. Предобуславливатель строится на основе блочной модифицированной схемы неполного LU разложения матрицы для системы линейных уравнений $A\vec{x} = \vec{B}$. Итерации прекращаются при выполнении условия $\epsilon^2 < \delta$, где $\bar{\epsilon} = \vec{B} - A\vec{x}$, $\delta = 10^{-8}$. В правой нижней расчетной точке во все моменты времени давление поддерживается постоянным и равным нулю. Скорость сходимости итераций при решении уравнения Пуассона (5.12) определяет эффективность всего алгоритма в целом.

Поле скорости на следующем временном шаге определяется по явной по времени разностной схеме из разностных аналогов уравнений (4.10) - (4.11). Шаг по времени определяется условием $\Delta t = \alpha h^2$, где $\alpha \sim 0.1 - 0.4$. Течение считается установившимся при выполнении условия

$$\epsilon_u = \frac{1}{N} \sum_{\omega_n} \left| \frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n}{\Delta t} \right| \leq 0.001,$$

где n - номер шага по времени, N - число расчетных точек.

6. Результаты численного счета и выводы

Задача решается для умеренных чисел Рейнольдса $Re = 50, 100, 400$ и 1000 на равномерных пространственных сетках $21 \times 21, 31 \times 31$ и 41×41 . Результаты расчетов сопоставляются с данными работы [16], где течение в каверне рассчитано на основе системы уравнений Навье-Стокса в переменных "функция тока - вихрь" на весьма подробных сетках (129×129 и 257×257). Результаты работы [16] для умеренных чисел Re можно считать эталонными.

На рис. 1 - 4 представлены распределения вертикальной и горизонтальной составляющих поля скоростей в центральных сечениях каверны. Значком X обозначены данные из [16].

Для $Re = 100$ даже на сетке 21×21 решение хорошо совпадает с эталонным. Для $Re = 400$ и 1000 совпадение с точным решением происходит при измельчении шага пространственной сетки, что определяется возможностью разрешения пограничных слоев (рис. 3 - 4).

На рис. 5 - 6 представлены распределения давления и поля скорости для $Re = 100$ (сетка 21×21) и 1000 (сетка 41×41). Для $Re = 100$ видно зарождение вторичных вихрей в нижних углах каверны, для $Re = 1000$ наблюдаются вторичные вихри в нижних углах полости и зарождение вихря в левом верхнем углу. Распределение поля давления в целом соответствует данным, полученным при численном моделировании рассматриваемых течений на основе системы Навье-Стокса. Дополнительное граничное условие для давления оказывает влияние на решение лишь в ближайших к границе области расчетных точках.

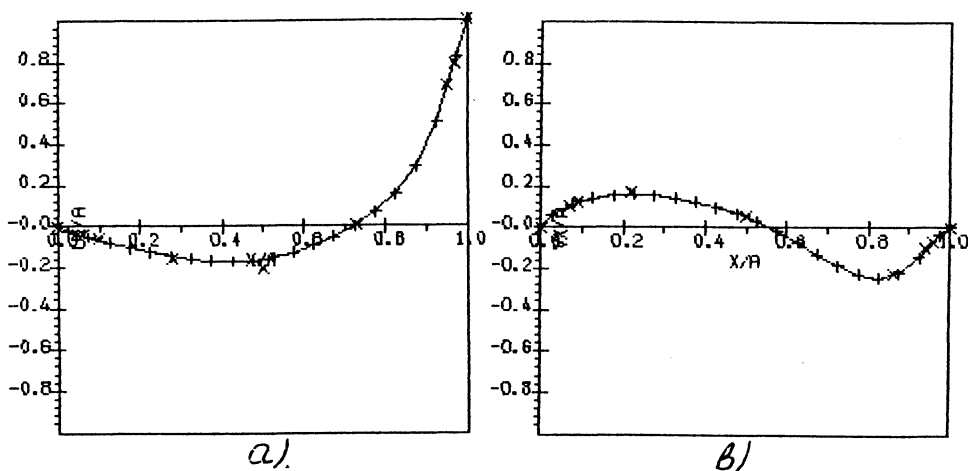


Рис. 1. Распределение составляющих поля скорости $u(0.5, y)$ (а) и $v(x, 0.5)$ (б) для $Re = 100$, сетка 21×21 . X - решение из [16].

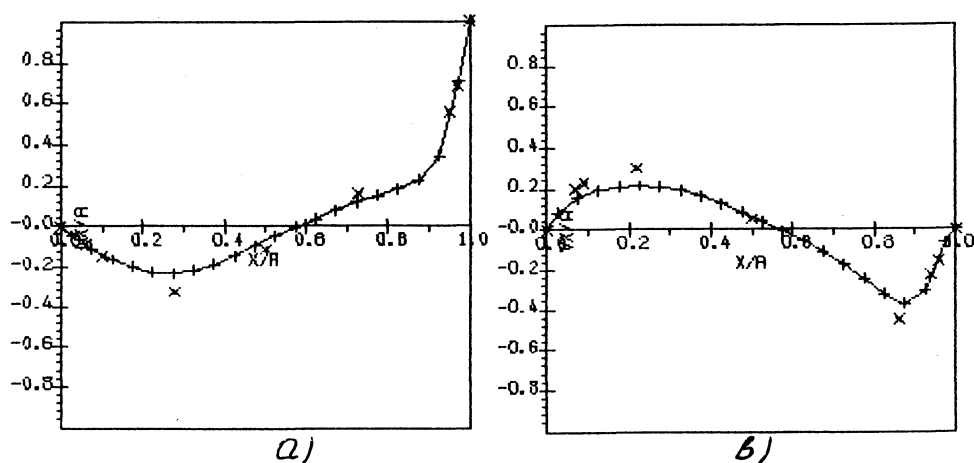


Рис. 2. Распределение составляющих поля скорости $u(0.5, y)$ (а) и $v(x, 0.5)$ (б) для $Re = 400$, сетка 21×21 . X - решение из [16].

На рис. 7 (а,б,с) представлены траектории движения жидких частиц (линии тока) для трех рассмотренных вариантов. Траектории частиц построены как касательные к векторам скорости с помощью графического комплекса Tecplot [17], предназначенного для визуализации результатов решения гидро- и газодинамических задач. Для сравнения на рис. 7 (А, В, С) представлены линии уровня, соответствующие функции тока из работы [16]. Для системы уравнений (4.9) - (4.11) нельзя ввести функцию тока (не выполнено условие $\text{div} \vec{u} = 0$), и траектории движения жидких частиц для этой системы могут быть более сложными, чем

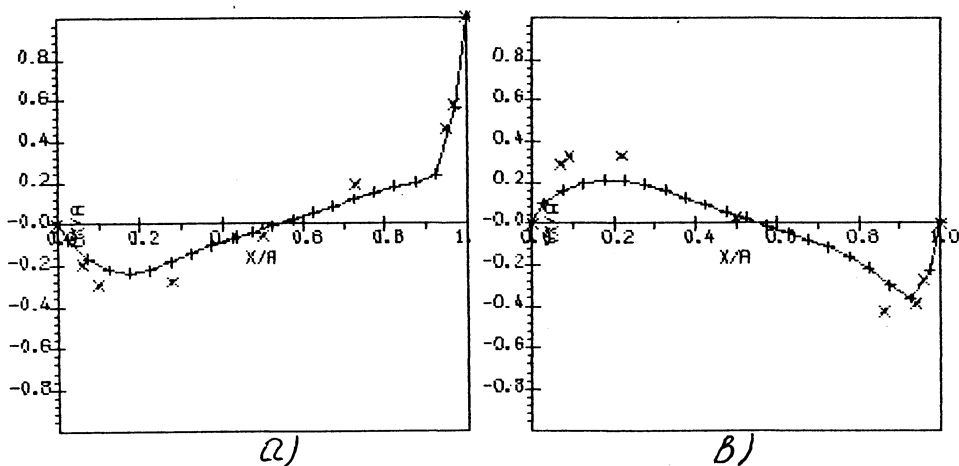


Рис. 3. Распределение составляющих поля скорости $u(0.5, y)$ (а) и $v(x, 0.5)$ (б) для $Re = 1000$, сетка 21×21 . X - решение из [16].

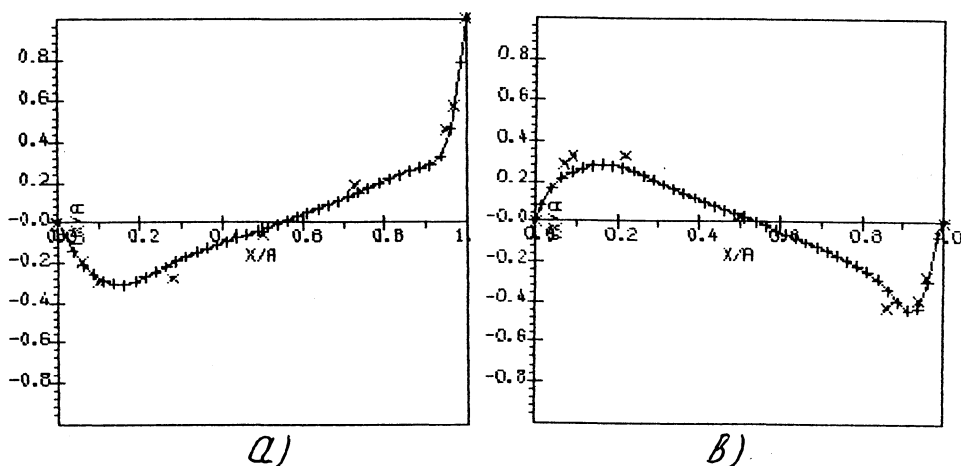


Рис. 4. Распределение составляющих поля скорости $u(0.5, y)$ (а) и $v(x, 0.5)$ (б) для $Re = 1000$, сетка 41×41 . X - решение из [16].

для системы уравнений Навье-Стокса (например, могут иметь аттракторы в виде предельных циклов).

Из представленных рисунков наглядно видно очень хорошее соответствие линий тока для всех рассмотренных чисел Рейнольдса, включая форму линий тока в угловых зонах и вид вторичных вихревых структур при $Re = 1000$. Полученные траектории движения частиц не замкнуты и напоминают спирали, накручивающиеся на предельную замкнутую кривую. По мнению авторов, такое поведение прежде всего связано со спецификой рассматриваемой системы уравнений. В то же время здесь может сказываться как недостаток точности использованного численного

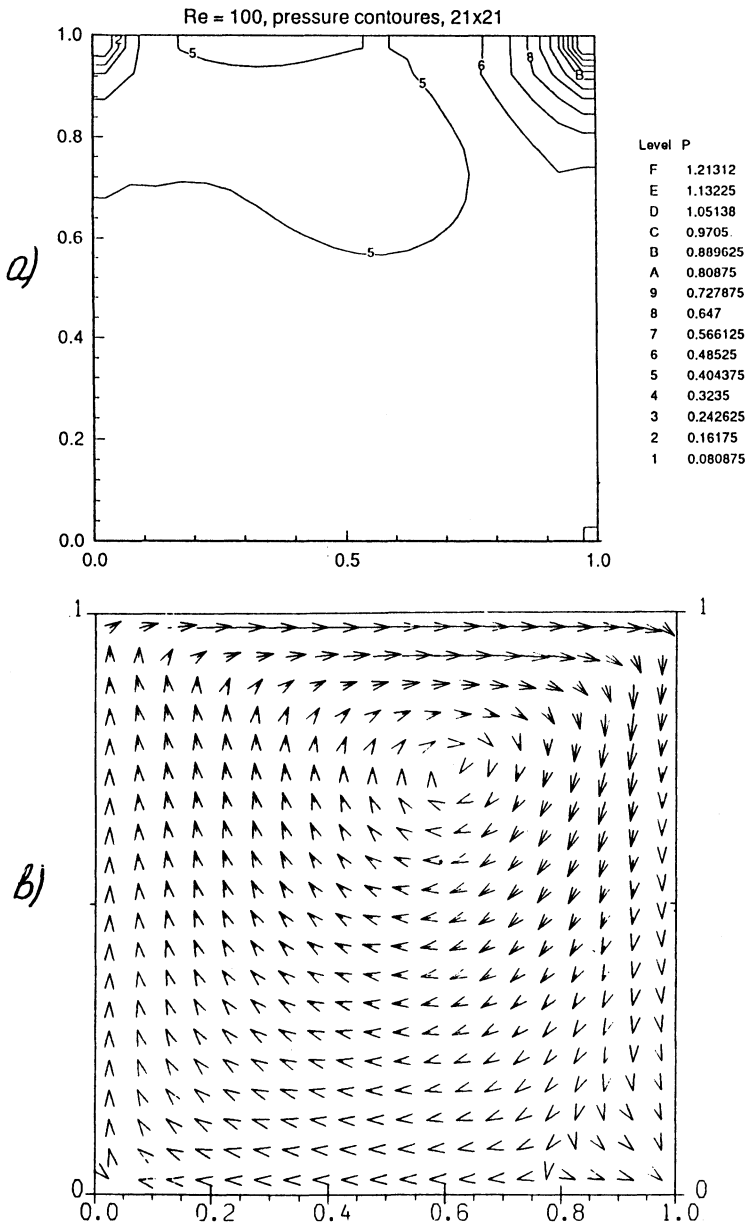


Рис. 5. Изолинии давления (а) и поле скорости (б) при Re = 100.

алгоритма, так и особенности работы программы Tecplot. В целом, наблюдается хорошее совпадение линий тока для всех рассмотренных вариантов.

Из представленных результатов следует, что численные решения системы

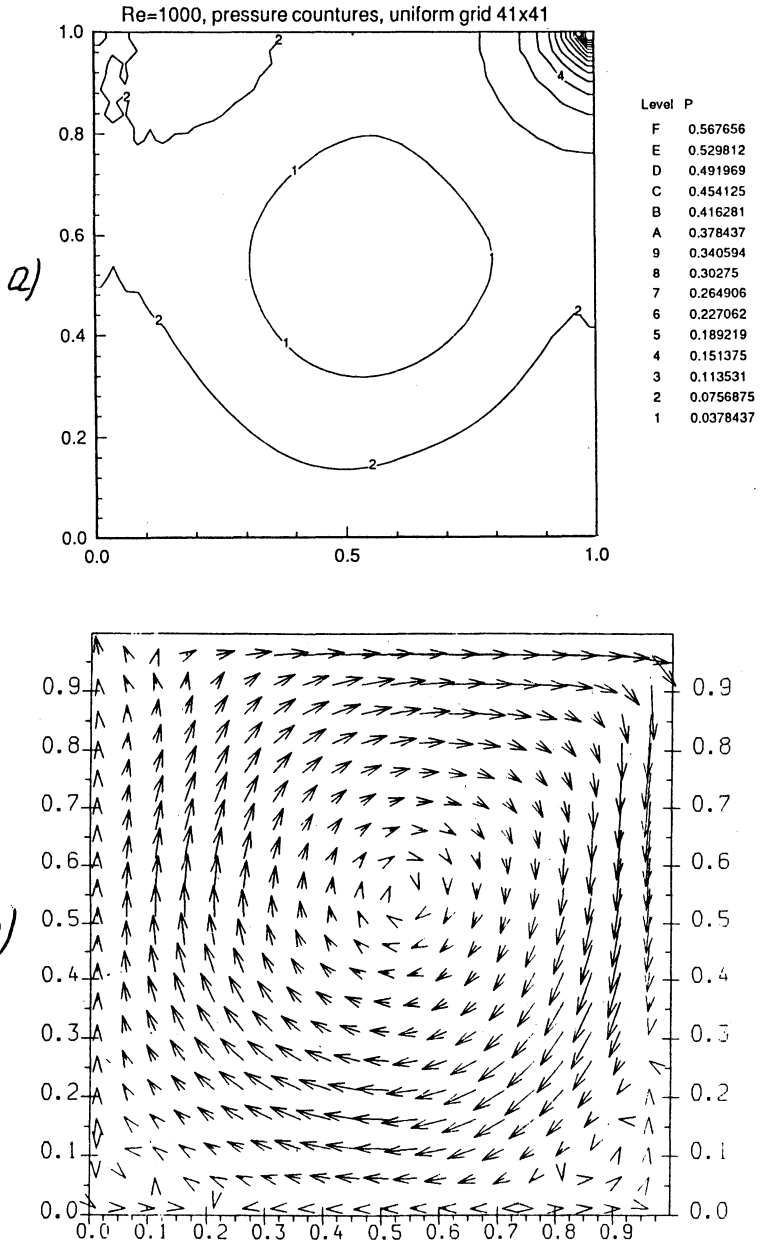


Рис. 6. Изолинии давления (а) и поле скорости (б) при $Re = 1000$.

КГД уравнений достаточно хорошо совпадают с эталонными решениями системы Навье-Стокса для умеренных чисел Re . Совпадение улучшается при сгущении пространственной сетки. Таким образом, предложенная квазигидродинамическая

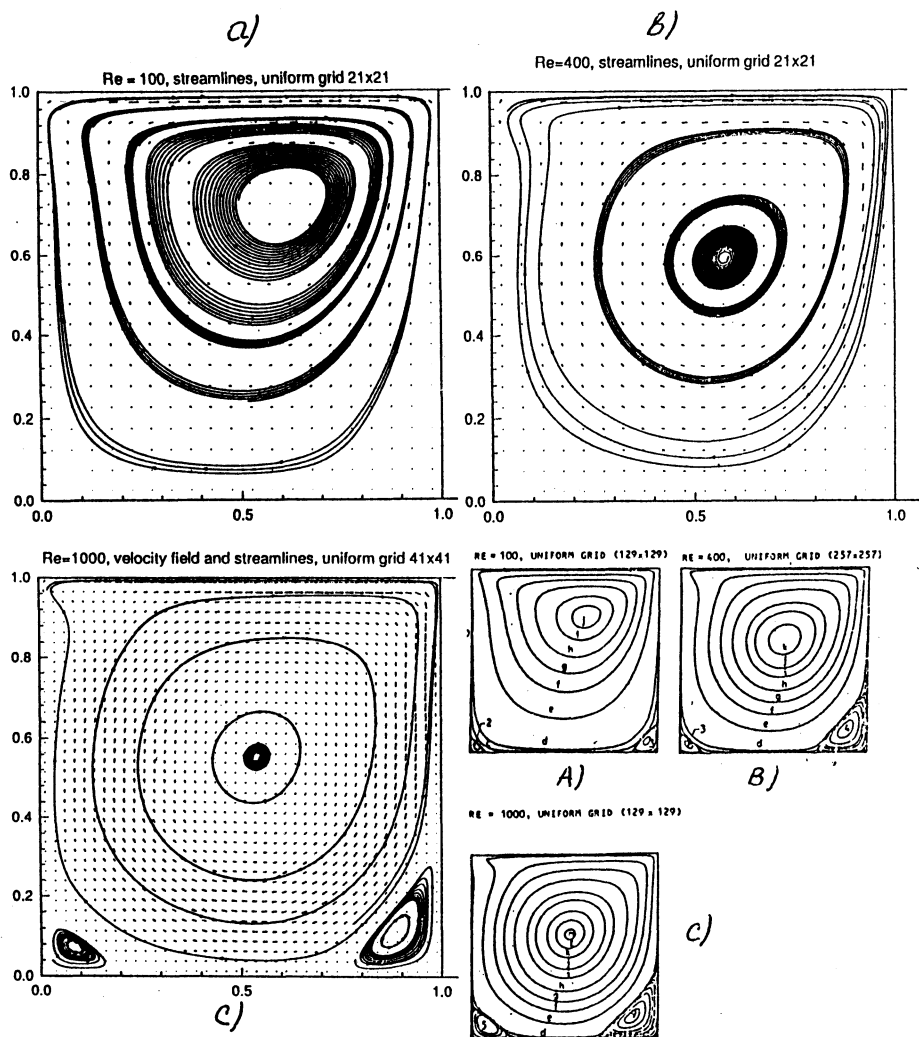


Рис. 7. Траектории движения жидких частиц для вариантов $Re = 100, 400$ и 1000 (a),(b) и (c) соответственно, и линии уровня функции тока для тех же чисел Re из [16] – (A),(B) и (C).

система уравнений может использоваться для численного моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости при умеренных числах Рейнольдса и является перспективной для дальнейшего исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л.Г. Лойцянский. Механика жидкости и газа. М., Наука, 1987, 840 с.
2. П. Роч. Вычислительная гидродинамика. Москва, Мир, 1980.
3. Д. Андерсон, Дж. Таннегил, Р. Плетчер. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М., Мир, 1990, т.1 - 2, 726 с.
4. О. М. Белоцерковский. Вычислительная механика. Современные проблемы и результаты. М., Наука, 1991, 183 с.
5. А.И. Толстых. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М., Наука, 1990, 229 с.
6. В.И. Полежаев, А.В. Бунз, Н. А. Везуб, Г.С. Глушко, В.Л. Грязнов, К.Г. Дубовик, С.А. Никитин, А.И. Простомолотов, А.И. Федосеев, С.Г. Черкасов. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье-Стокса. М., Наука, 1987, 270 с.
7. В.М. Иевлев. Численное моделирование турбулентных течений. М., Наука, 1990, 214 с.
8. Ю.В. Шеретов. О единственности решений одной диссипативной системы гидродинамического типа. Журнал Математическое Моделирование, 1994, т.6, N 10, с. 35 - 45.
9. T. G. Elizarova, B. N. Chetverushkin, Yu. V. Sheretov. Quasigasdynamic equations and computer simulation of viscous gas flows. Lecture Notes in Phys., N 414. Proc. 13th Intern. Conf. on Numer. Meth. in Fluid Dynamics. - Roma, Springer - Verlag, 1992, p. 421 - 425.
10. T. G. Elizarova, I. A. Graur, Yu. V. Sheretov. Quasi-gas dynamic equations and computer simulation of rarefied gas flows. Proceedings of the 19th International Symposium on Shock Waves, Marseille, France, 1993, 26 - 30 July, Springer, v.4, p.45 - 50.
11. T. G. Elizarova, I. A. Graur, J. C. Lengrand, A. Chpoun. Comparison of Continuum and Molecular Approaches for Rarefied Gas Flows. Proceedings of the 19th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics, Oxford (GB), 1994, 25 - 29 July, Oxford University Press, 1995, v 2, p. 780 - 786.
12. Ю.В. Шеретов. Теорема о диссипации энергии и точные решения системы квазигидродинамических уравнений. Ж. вычисл. математ. и матем. физ. 1994, т.34, N 3, с. 483 - 491.
13. Т.Г. Елизарова, В.И. Турчанинов, Б.Н. Четверушкин. Использование квазигидродинамической модели для расчета течения вязкой несжимаемой жидкости. Препринт N 166, ИПМатем. АН СССР, 1985, 13 с.
14. Д.Б. Гуров, Т.Г. Елизарова. Об одном способе построения алгоритма расчета течений вязкой несжимаемой жидкости. Ж. вычисл. математ. и матем. физ. 1990, т.30, N 11, с. 1719 - 1727.
15. А.Б. Ядыкин, И.В. Тверской. Методы LU декомпозиции разреженных матриц в системах оптимизации большой размерности: направления и перспективы развития. Вопросы кибернетики. Математические методы анализа больших систем, М., Изд-во Научного совета АН СССР по комплексной проблеме "Кибернетика", 1991, с. 111 - 152.
16. U. Ghia, K. N. Ghia, C. T. Shin. High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method. Journal of Computational Physics, 1982, v.48, p.387 - 411.
17. Tecplot, Version 6, User's Manual, Amtec Engineering, Inc. P.O. Box 3633, Bellevue, WA 98009 - 3633.

Поступила в редакцию
19.06.95.