

УДК 517.958:531.742

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ И КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ¹⁾

© 2001 г. Т. Г. Елизарова*, Ю. В. Шеретов**

(*125047 Москва, Миусская пл., 4а, ИММ РАН;

**170013 Тверь, ул. Желябова, 33, Тверской гос. ун-т)

e-mail: *telizar@yahoo.com; **yurii.sheretov@tver.su.ru

Поступила в редакцию 30.12.98 г.

Переработанный вариант 04.07.2000 г.

Дано систематизированное изложение результатов, полученных авторами при разработке новых эффективных в численной реализации математических моделей – систем квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений. Обсуждается феноменологическая интерпретация этих систем, прослеживается их связь с уравнениями Навье–Стокса. Результаты численного моделирования некоторых сжимаемых и несжимаемых течений приведены в сравнении с данными, полученными в рамках других математических моделей.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1]–[4] были предложены эффективные алгоритмы для математического моделирования газодинамических течений, в рамках которых были построены кинетически-согласованные разностные схемы (КСРС) и тесно связанные с ними квазигазодинамические уравнения. Квазигазодинамические уравнения отличаются от уравнений Навье–Стокса добавочными членами дивергентного вида с малым параметром в качестве коэффициента. При численном моделировании вязких течений эти дополнительные слагаемые проявляют себя как эффективные регуляризаторы.

В настоящей статье представлено систематическое изложение теоретических и численных результатов, полученных авторами на пути исследования и применения в численных экспериментах систем квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений (КГД-систем). Излагается феноменологическая интерпретация этих систем, демонстрирующая выполнение для них основных законов сохранения, прослеживается их связь с уравнениями Навье–Стокса, строится КГД-модель для вязкой несжимаемой жидкости. Результаты численного моделирования течений газа и жидкости на основе КГД-уравнений приведены в сравнении с аналогичными результатами, полученными в рамках других подходов.

Первая из КГД-систем – квазигазодинамическая – была получена в [2]–[4] исходя из известной модели бесстолкновительного разлета молекул газа с последующей мгновенной максвеллизацией. Этот подход использовался также в [5]–[7] для построения численных методов расчета задач газовой динамики. Вторая, квазигидродинамическая система была введена в [8]. Феноменологическая интерпретация этих КГД-систем и их представление в виде интегральных законов сохранения предложены в [9]. В [8]–[11] для обеих систем получены уравнения баланса энтропии, изучены свойства решений типа неподвижной ударной волны, построены приближения ламинарного пограничного слоя, совпадающие с уравнениями Прандтля. Показано, что в стационарном случае КГД-системы отличаются от уравнений Навье–Стокса дополнительными дивергентными членами второго порядка малости по числу Кнудсена. В [8], [9], [12] для квазигидродинамических уравнений построено приближение Буссинеска, обоснована процедура перехода к массовым лагранжевым координатам, найдены некоторые точные решения. Вариант второй КГД-системы, предназначенный для численного моделирования течений вязкой несжимаемой изотермической жидкости, впервые предложен в [13]. Для него также доказана теорема о диссипации полной кинетической энергии в ограниченных объемах, построены точные решения, совпадающие с соответствующими решениями уравнений Навье–Стокса и описывающие ламинарные течения Пуазейля в трубе и в плоском канале, течения Куэтта между двумя

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 98-01-00155).

вращающимися с постоянными угловыми скоростями соосными цилиндрами. Алгоритмы, построенные на основе КГД-уравнений, успешно применялись для численного моделирования течения газа [14], [15] и жидкости [16]–[18].

Квазигазодинамическая система появилась впервые в связи с анализом дифференциальных приближений КСРС. Результаты численных исследований газодинамических течений на основе этих схем изложены в монографии [19]. Отметим также, что КГД-системы отличаются от других, близких по структуре систем, которые в разное время предлагались в работах [20]–[23].

2. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В данном разделе обсуждается феноменологическая интерпретация квазигидродинамической системы уравнений, впервые опубликованной в [8], и прослеживается выполнение для нее основных законов сохранения. Для этого будем следовать изложенному в монографиях [24], [25] феноменологическому выводу классической системы Навье–Стокса, описывающей течения сжимаемой вязкой теплопроводной среды. В основе вывода лежат постулаты, выражающие интегральные законы сохранения массы, импульса, момента импульса, полной энергии и энтропии для подвижного материального объема.

В евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 выберем инерциальную декартову систему координат $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Пусть $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ – соответствующий ей ортонормированный базис единичных векторов, t – время. Будем использовать следующие обозначения для макроскопических величин, характеризующих течения среды: $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ – плотность, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – скорость, $p = p(\mathbf{x}, t)$ – давление, $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{x}, t)$ – удельная внутренняя энергия, $T = T(\mathbf{x}, t)$ – температура, $s = s(\mathbf{x}, t)$ – удельная энтропия. Предполагается, что среда является двухпараметрической и среди пяти термодинамических параметров $\rho, p, \varepsilon, T, s$ независимы лишь два. При этом заданы три уравнения состояния:

$$p = \Psi_1(\rho, T), \quad \varepsilon = \Psi_2(\rho, T), \quad s = \Psi_3(\rho, T). \quad (2.1)$$

Символом \mathbf{F} обозначим массовую плотность внешних сил. Например, для жидкости, находящейся в гравитационном поле Земли, $\mathbf{F} = \mathbf{g}$, где \mathbf{g} – ускорение свободного падения.

В качестве первого постулата примем закон сохранения массы в виде

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{j}_m = 0. \quad (2.2)$$

Считаем, что в каждой точке \mathbf{x} области течения в момент времени t определен вектор $\mathbf{j}_m = \mathbf{j}_m(\mathbf{x}, t)$, называемый плотностью потока массы, вид которого мы пока не будем конкретизировать.

Выделим в области течения движущийся материальный объем $V = V(t)$, ограниченный гладкой поверхностью $\Sigma = \Sigma(t)$, ориентированной полем внешних единичных нормалей \mathbf{n} . Будем считать, что объем $V(t)$ возникает из объема $V_0 = V(t_0)$, где t_0 – начальный момент времени, путем непрерывной деформации, обусловленной перемещением частиц V_0 вдоль траекторий, определяемых векторным полем \mathbf{j}_m/ρ . Воспользовавшись известной [24] теоремой Лиувилля о дифференцировании интеграла, взятого по движущемуся материальному объему, представим закон сохранения массы (2.2) в виде

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0. \quad (2.3)$$

Вторым постулатом служит закон сохранения импульса

$$\frac{d}{dt} \int_V (\rho \mathbf{u}) dV = \int_V \rho \mathbf{F} dV + \int_{\Sigma} (\mathbf{n} \cdot P) d\Sigma. \quad (2.4)$$

Скорость изменения импульса в объеме V равна сумме приложенных к нему сил. Первый интеграл в правой части (2.4) есть объемная сила, действующая со стороны внешнего поля, второй определяет силы давления и внутреннего вязкого трения, приложенные к поверхности Σ . Величина $P = P(\mathbf{x}, t)$ является тензором внутренних напряжений. Символ $(\mathbf{n} \cdot P)$ обозначает свертку (скалярное произведение) вектора \mathbf{n} и тензора второго ранга P , осуществляемую по первому индексу тензора P . Соответственно, запись $(P \cdot \mathbf{n})$ означает, что свертка P и \mathbf{n} идет с участием вто-

рого индекса P . В случае симметричного тензора P имеем $(\mathbf{n} \cdot P) = (P \cdot \mathbf{n})$. Третьим постулатом является закон сохранения полной энергии

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \varepsilon \right) dV = \int_V (\mathbf{j}_m \cdot \mathbf{F}) dV + \iint_{\Sigma} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) d\Sigma - \iint_{\Sigma} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) d\Sigma. \quad (2.5)$$

Здесь и далее скалярный квадрат произвольного вектора определяется как $\mathbf{a}^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2$.

Первый интеграл в правой части (2.5) равен мощности внешних массовых сил, приложенных к объему V ; второй интерпретируется как мощность поверхностных сил давления и внутреннего вязкого трения. Последний член в (2.5) описывает приток энергии в единицу времени через поверхность Σ за счет процессов теплопроводности. Выражения для векторных полей $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ будут выписаны ниже.

Следующий постулат выражает закон сохранения момента импульса:

$$\frac{d}{dt} \int_V [\mathbf{x} \times (\rho \mathbf{u})] dV = \int_V [\mathbf{x} \times \rho \mathbf{F}] dV + \iint_{\Sigma} [\mathbf{x} \times (\mathbf{n} \cdot P)] d\Sigma. \quad (2.6)$$

Он представлен в классической форме [24]. Внутренние моменты, а также распределенные массовые и поверхностные пары не учитываются.

Второй закон термодинамики, являющийся пятым постулатом, имеет вид

$$\frac{d}{dt} \int_V (\rho s) dV = - \iint_{\Sigma} \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})}{T} d\Sigma + \int_V X dV. \quad (2.7)$$

Поверхностный интеграл в правой части (2.7) определяет скорость изменения энтропии в объеме V за счет теплового потока. Он может быть как положительным, так и отрицательным. Последний интеграл в (2.7) всегда неотрицателен и дает производство энтропии за счет внутренних необратимых процессов.

Удельная энтропия s определяется из известного дифференциального тождества Гиббса

$$T ds = d\varepsilon + p d(1/\rho). \quad (2.8)$$

Чтобы перейти от интегральных соотношений (2.3)–(2.7) к соответствующим дифференциальным уравнениям, вновь воспользуемся формулой Лиувилля о дифференцировании интеграла, взятого по движущемуся материальному объему. При этом будем считать, что все основные макроскопические параметры среды являются достаточно гладкими функциями пространственных координат и времени. Поскольку, как было указано выше, движение объема V определяется векторным полем \mathbf{j}_m/ρ , тождество Лиувилля принимает вид

$$\frac{d}{dt} \int_V \varphi dV = \int_V [D\varphi + \varphi \operatorname{div}(\mathbf{j}_m/\rho)] dV. \quad (2.9)$$

Здесь $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ – некоторое непрерывно дифференцируемое скалярное или векторное поле, $D = \partial/\partial t + (\mathbf{j}_m/\rho) \cdot \nabla$ – дифференциальный оператор.

Применяя формулу (2.9) к (2.3)–(2.7) и учитывая произвольность V , получаем дифференциальные уравнения баланса массы

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{j}_m = 0, \quad (2.10)$$

импульса

$$\partial(\rho \mathbf{u}) / \partial t + \operatorname{div}(\mathbf{j}_m \otimes \mathbf{u}) = \rho \mathbf{F} + \operatorname{div} P, \quad (2.11)$$

полной энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \operatorname{div} \left[\mathbf{j}_m \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] = (\mathbf{j}_m \cdot \mathbf{F}) + \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{div} \mathbf{q}, \quad (2.12)$$

момента импульса

$$\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{x} \times \rho \mathbf{u}] + \operatorname{div}(\mathbf{j}_m \otimes [\mathbf{x} \times \mathbf{u}]) = [\mathbf{x} \times \rho \mathbf{F}] + \frac{\partial}{\partial x_i}[\mathbf{x} \times P_{ij} \mathbf{e}_j] \quad (2.13)$$

и энтропии

$$\partial(\rho s)/\partial t + \operatorname{div}(\mathbf{j}_m s) = -\operatorname{div}(\mathbf{q}/T) + X. \quad (2.14)$$

Здесь $(\mathbf{j}_m \otimes \mathbf{u})$ – тензор второго ранга, полученный как результат прямого произведения векторов \mathbf{j}_m и \mathbf{u} . При вычислении дивергенции от тензора второго ранга свертка осуществляется по его первому индексу. В уравнении (2.13) символом P_{ij} обозначен портрет тензора P в базисе $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. По дважды повторяющимся индексам i и j идет суммирование.

Система (2.10)–(2.14) не является замкнутой. Проблема замыкания может быть решена различными способами. Для этого необходимо представить величины $\mathbf{j}_m, P, \mathbf{A}, \mathbf{q}, X$ как функции макроскопических параметров среды и их производных.

Уравнениям Навье–Стокса соответствует следующий выбор указанных величин:

$$\mathbf{j}_m = \rho \mathbf{u}, \quad (2.15)$$

$$P = \Pi - pI, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{A} = (\Pi \cdot \mathbf{u}) - p\mathbf{u}, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T, \quad (2.18)$$

$$X = \kappa \left(\frac{\nabla T}{T} \right)^2 + \frac{(\Pi : \Pi)}{2\eta T}. \quad (2.19)$$

В формулах (2.15)–(2.19) символом I обозначен единичный тензор,

$$\Pi = \eta[(\nabla \otimes \mathbf{u}) + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T - (2/3)I \operatorname{div} \mathbf{u}] \quad (2.20)$$

есть навье-стоксовский тензор вязких напряжений, $(\Pi : \Pi) = \sum_{i,j=1}^3 \Pi_{ij} \Pi_{ij}$ – двойное скалярное произведение. Положительные коэффициенты динамической вязкости η и теплопроводности κ считаются заданными функциями плотности и температуры. В выражении (2.20) член, соответствующий объемной вязкости, опущен.

Принимая во внимание формулы (2.15)–(2.19), можно показать, что уравнение баланса энтропии (2.14) является следствием уравнений (2.10)–(2.12). Отметим, что для одноатомного умеренно-разреженного газа выражения (2.18), (2.20) могут быть получены из кинетического уравнения Больцмана методами Чепмена–Энскога и Грэда в первом приближении при разложениях по малому числу Кнудсена [26], [27].

В теории Навье–Стокса для определения гидродинамических величин – плотности, скорости и температуры – используется процедура осреднения по некоторому множеству физически бесконечно малых объемов из пространства \mathbb{R}^3 в фиксированный момент времени t . Мгновенные пространственные средние при переходе от одной инерциальной системы координат к другой преобразуются по определенному закону. Для мгновенных пространственных средних удастся доказать справедливость равенства (2.15) (см. [27]).

Предположим другое, отличное от классического определение макропараметров газа, с использованием не пространственного, а пространственно-временного осреднения. Такая процедура сглаживания по множеству физически бесконечно малых четырехмерных параллелепипедов в фазовом пространстве $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, подробно описана в [12]. При этом возможный выбор величин $\mathbf{j}_m, P, \mathbf{A}, \mathbf{q}, X$ в предположении, что \mathbf{j}_m не равен $\rho \mathbf{u}$, уже не ограничивается классическим вариантом (2.15)–(2.19).

Если отказаться от требований (2.15)–(2.19), то совокупная система уравнений и переменных, вообще говоря, теряет исходный физический смысл. Однако она допускает формальное замыкание по крайней мере двух типов. Поскольку при этом исходные постулаты (2.10)–(2.14), отвечающие основным законам сохранения, остаются в силе, то по аналогии мы сохраняем старые обозначения для всех входящих в уравнения переменных. Из общих соображений можно заключить, что для слабонервновесных течений пространственно-временные и пространственные

средние близки и отличаются на величины, содержащие малый параметр, который будет играть роль регуляризатора при численном решении.

Первый вариант замыкания системы (2.10)–(2.14), соответствующий квазигазодинамической системе уравнений, приведен в следующем разделе. Второй способ замыкания приводит к квазигидродинамической системе и подробно обсужден в [9]. При этом выражения, аналогичные (2.15)–(2.19), для квазигидродинамических уравнений имеют вид

$$\mathbf{j}_m = \rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}), \quad (2.21)$$

$$P = \Pi - pI + \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{w} = \Pi_Q - pI, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{A} = (\Pi \cdot \mathbf{u}) - p(\mathbf{u} - \mathbf{w}) + \rho \mathbf{u}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}), \quad (2.23)$$

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T, \quad (2.24)$$

$$X = \kappa \left(\frac{\nabla T}{T} \right)^2 + \frac{(\Pi : \Pi)}{2\eta T} + \frac{\rho \mathbf{w}^2}{\tau T}. \quad (2.25)$$

В (2.21)–(2.25) символом \mathbf{w} обозначен некоторый вектор, определяемый по формуле

$$\mathbf{w} = \frac{\tau}{\rho} [\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \rho \mathbf{F}], \quad (2.26)$$

Π – аналог навье-стоксовского тензора вязких напряжений. Как и в классическом случае, при выборе тензора P в виде (2.22) уравнение баланса момента импульса (2.13) является следствием закона сохранения импульса (2.11). Уравнение баланса энтропии также выводится с помощью тождества Гиббса (2.8) из законов сохранения массы, импульса и энергии.

В (2.26) положительный параметр τ , имеющий размерность времени, считается заданной функцией плотности и температуры. Для вычисления τ в [9] была предложена формула

$$\tau = \frac{\gamma v}{Sc c_s^2},$$

в которой $v = \eta/\rho$ – коэффициент кинематической вязкости, γ – показатель адиабаты, c_s – скорость звука, $Sc = \eta/(\rho D)$ – число Шмидта. Коэффициент самодиффузии жидкости D может быть измерен экспериментально. Для газов число Шмидта близко к единице. Принимая во внимание формулу Лапласа $c_s^2 = \gamma p/\rho$, выражение для τ можно преобразовать к виду $\tau = \eta/(\rho Sc)$. Таким образом, τ совпадает по порядку величины со средним временем свободного пробега атомов в газе.

Подставляя (2.21)–(2.25) в систему (2.10)–(2.14), приходим к системе квазигидродинамических уравнений

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = \operatorname{div}(\rho \mathbf{w}), \quad (2.27)$$

$$\partial(\rho \mathbf{u} / \partial t) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \rho \mathbf{F} + \operatorname{div} \Pi + \operatorname{div}[(\rho \mathbf{w} \otimes \mathbf{u}) + (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{w})], \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \operatorname{div} \left[\rho \mathbf{u} \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \varepsilon \right) + p \mathbf{u} \right] + \operatorname{div} \mathbf{q} = \\ & = \rho \mathbf{F} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{w}) + \operatorname{div}(\Pi \cdot \mathbf{u}) + \operatorname{div} \left[\rho \mathbf{w} \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \varepsilon \right) + p \mathbf{w} + \rho \mathbf{u}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}) \right]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Система (2.27)–(2.29) становится замкнутой, если ее дополнить формальными аналогами уравнений состояния (2.1), а также выражениями для коэффициентов

$$\eta = \Psi_4(\rho, T), \quad \kappa = \Psi_5(\rho, T), \quad \tau = \Psi_6(\rho, T). \quad (2.30)$$

Уравнение баланса энтропии (2.14) представим в виде

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} s) = \operatorname{div}(\rho \mathbf{w} s) + \operatorname{div} \left(\kappa \frac{\nabla T}{T} \right) + \kappa \left(\frac{\nabla T}{T} \right)^2 + \frac{\Phi}{T}, \quad (2.31)$$

где

$$\Phi = \frac{(\Pi : \Pi)}{2\eta} + \frac{\rho \mathbf{w}^2}{\tau} \quad (2.32)$$

есть неотрицательная диссипативная функция. Оно может быть включено в систему вместо уравнения энергии.

При $\tau \rightarrow 0$ дополнительные слагаемые в (2.21)–(2.23), (2.25), содержащие вектор \mathbf{w} , стремятся к нулю. При этом соотношения (2.21)–(2.25) редуцируются к выражениям (2.15)–(2.19), а система КГД-уравнений (2.27)–(2.29), включая уравнения состояния, переходит в классическую систему уравнений Навье–Стокса. Из общих соображений естественно предположить, что в этом случае пространственно-временные средние $\rho \rightarrow \rho_{NS}$, $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_{NS}$, $T \rightarrow T_{NS}$, где через ρ_{NS} , \mathbf{u}_{NS} , T_{NS} обозначены классические мгновенные пространственные средние – плотность, скорость и температура.

Вопрос о постановке граничных условий для предложенных уравнений является сложным, поскольку он связан с проблемами существования, единственности, устойчивости и физической адекватности решений. Поэтому его следует рассматривать отдельно в каждой конкретной задаче. Система дифференциальных уравнений (2.27)–(2.29) имеет более высокий порядок по сравнению с системой Навье–Стокса из-за присутствия в ней членов, содержащих частные производные второго порядка от давления по пространственным переменным. Поэтому число граничных условий для КГД-уравнений должно быть больше, чем в классическом случае. Пусть движение жидкости происходит в замкнутом адиабатически изолированном объеме V_0 , ограниченном неподвижной, гладкой и ориентированной полем внешних единичных нормалей \mathbf{n} поверхностью Σ_0 . Тогда на границе Σ_0 могут быть поставлены следующие условия:

$$\mathbf{u}|_{\Sigma_0} = 0, \quad (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})|_{\Sigma_0} = 0, \quad \partial T / \partial \mathbf{n}|_{\Sigma_0} = 0. \quad (2.33)$$

Первое из условий (2.33) означает, что жидкость прилипает к стенкам сосуда; второе в совокупности с первым обеспечивает отсутствие потока массы через границу; третье условие влечет равенство нулю на Σ_0 нормальной составляющей теплового потока \mathbf{q} . Интегрируя уравнение (2.31) по V_0 и принимая во внимание граничные условия (2.33), а также неотрицательность диссипативной функции (2.32), заключаем, что полная термодинамическая энтропия жидкости $S = \int_{V_0} (\rho s) d\mathbf{x}$ в рассматриваемом объеме не может убывать. Аналогичным свойством обладает и система Навье–Стокса [28].

Принцип Джоуля эквивалентности механической работы и теплоты для адиабатически изолированного объема с подвижными жесткими стенками может быть получен как прямое следствие квазигидродинамических уравнений. Известная барометрическая формула также является следствием системы (2.27)–(2.29).

В [8] показано, что приближением ламинарного пограничного слоя для квазигидродинамических уравнений является классическая система уравнений Прандтля [25]. В случае установившихся течений дивергентные члены в КГД-уравнениях имеют формальные порядки малости $O(\tau^2)$ при $\tau \rightarrow 0$. Однако для нестационарных движений жидкости указанные члены уже имеют порядок $O(\tau)$ и их влияние может оказаться существенным.

В заключение отметим, что малые дивергентные добавки, отличающие КГД-уравнения от уравнений Навье–Стокса, играют роль регуляризаторов, обеспечивающих эффективность разностных алгоритмов, что подтверждено многочисленными расчетами сложных задач о течениях газа и жидкости.

3. СИСТЕМА КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Указанная в названии раздела система была получена в работах [1], [2] и имеет вид

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = \operatorname{div} \tau [\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p], \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & \partial(\rho \mathbf{u}) / \partial t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \\ & = \operatorname{div} \tau [\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + (\nabla \otimes p \mathbf{u}) + (\nabla \otimes p \mathbf{u})^T] + \nabla \tau [\operatorname{div}(\rho \mathbf{u})], \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \operatorname{div} \left[\rho \mathbf{u} \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \varepsilon \right) + p \mathbf{u} \right] = \\ & = \operatorname{div} \tau \left\{ \operatorname{div} \left[\rho \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \varepsilon + 2 \frac{p}{\rho} \right) \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \right] + \nabla \left[p \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Система замыкается уравнениями состояния идеального политропного газа

$$p = \rho RT, \quad \varepsilon = c_v T, \quad (3.4)$$

где R – газовая постоянная, c_v – удельная теплоемкость при постоянном объеме.

При выводе (3.1)–(3.3) авторы исходили из известной феноменологической модели бесстолкновительного разлета молекул в газе с последующей мгновенной максвеллизацией, которая использовалась в ряде работ для построения численных методов гидродинамики [1]–[7].

Квазигазодинамические уравнения могут быть получены [29] моментным осреднением с сумматорными инвариантами 1 , \mathbf{v} и $\mathbf{v}^2/2$ модельного кинетического уравнения вида

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) f^{(0)} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau (\mathbf{v} \cdot \nabla) f^{(0)} + \frac{f^{(0)} - f}{\tau}, \quad (3.5)$$

где $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ – одночастичная функция распределения, $f^{(0)}$ – локально-равновесная максвелловская функция с макропараметрами, определяемыми функцией f . Параметр τ в правой части (3.5) интерпретируется как характерное время релаксации молекул к локально-равновесному распределению и совпадает по порядку величины со средним временем свободного пробега молекул в газе. Макропараметры, входящие в формулу для вычисления τ , также являются квадратурами от f .

В [9] показано, что если газ является одноатомным ($\gamma = 5/3$), идеальным и политропным, а внешняя сила \mathbf{F} пренебрежимо мала, то уравнения (3.1)–(3.3) могут быть получены из интегральных законов сохранения (2.3)–(2.7) и представлены в виде (2.10)–(2.12) при следующем выборе величин \mathbf{j}_m , P , \mathbf{A} , \mathbf{q} , X :

$$\mathbf{j}_m = \rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}), \quad (3.6)$$

$$P = \Pi - pI + \tau \mathbf{u} \otimes [\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p] + \tau I[(\mathbf{u} \cdot \nabla) p + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{u}], \quad (3.7)$$

$$\mathbf{A} = (\Pi \cdot \mathbf{u}) - p(\mathbf{u} - \mathbf{w}) + \tau \mathbf{u} \left[\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) p \right] + \tau \mathbf{u} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) p + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{u}], \quad (3.8)$$

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T - \tau \rho T \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \nabla) s, \quad (3.9)$$

$$X = \kappa \left(\frac{\nabla T}{T} \right)^2 + \frac{(\Pi : \Pi)}{(2\eta T)} + \frac{p\tau}{\rho^2 T} [\operatorname{div}(\rho \mathbf{u})]^2 + \frac{\tau}{\rho T} [\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p]^2 + \frac{\tau}{\rho \varepsilon T} [\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \varepsilon + p \operatorname{div} \mathbf{u}]^2, \quad (3.10)$$

где

$$\mathbf{w} = \frac{\tau}{\rho} [\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p]. \quad (3.11)$$

При этом коэффициент динамической вязкости η и коэффициент теплопроводности κ вычисляются по формулам $\eta = p\tau$, $\kappa = c_p p\tau$. Заметим, что именно такие значения величин η и κ получаются при выводе системы Навье–Стокса из известного кинетического уравнения Бхатнагара–Гросса–Крука [26].

Возможно формальное обобщение системы (3.1)–(3.3) на многоатомный газ, а также на случай произвольных чисел Прандтля. Для этого в выражениях (3.6)–(3.11) необходимо использовать истинное значение показателя адиабаты γ и определить коэффициенты η и κ как $\eta = p\tau$, $\kappa = c_p p\tau/\operatorname{Pr}$. В (2.20) следует также учесть влияние членов, соответствующих объемной вязкости.

Используя (3.6)–(3.11), можно показать, что закон сохранения момента импульса является следствием уравнения баланса импульса. Уравнение баланса энтропии также выводится из системы (3.1)–(3.3) (см. [9]). Отметим, что предположение об идеальности и политропности газа при данном выводе является существенным.

В стационарном случае квазигазодинамические уравнения отличаются от уравнений Навье–Стокса дополнительными дивергентными членами, имеющими формальные порядки $O(\tau^2)$ при $\tau \rightarrow 0$, или, в безразмерном виде, $O(Kn^2)$ при $Kn \rightarrow 0$ (см. [10]). Приближением ламинарного пограничного слоя для данной КГД-системы служит классическая система уравнений Прандтля. В [11] для уравнений (3.1)–(3.3) изучены свойства решений типа неподвижной ударной волны. В предельном случае $\kappa = 0$, $\eta \neq 0$ доказано утверждение о строгом возрастании энтропии на ударной волне с положительной производной.

4. КГД-МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

При моделировании конвективных течений жидкости, находящейся в однородном поле тяжести, широко используется упрощенная форма системы Навье–Стокса, предложенная Буссинеском [28], [30]. Соответствующее приближение для квазигидродинамических уравнений было получено в [9] и имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div} \mathbf{w}, \quad (4.1)$$

$$\partial \mathbf{u} / \partial t + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \Pi + \operatorname{div}[(\mathbf{w} \otimes \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \otimes \mathbf{w})] - \beta \mathbf{g} T, \quad (4.2)$$

$$\partial T / \partial t + \operatorname{div}(\mathbf{u} T) = \operatorname{div}(\mathbf{w} T) + \chi \operatorname{div}(\nabla T). \quad (4.3)$$

При этом вектор \mathbf{w} определяется с помощью выражения

$$\mathbf{w} = \tau \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \beta \mathbf{g} T \right].$$

В записи системы (4.1)–(4.3) использованы стандартные обозначения: $\rho = \operatorname{const} > 0$ – среднее значение плотности, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – вектор гидродинамической скорости, $p = p(\mathbf{x}, t)$ – давление, отсчитываемое от гидростатического, $T = T(\mathbf{x}, t)$ – отклонение температуры от ее среднего значения $T_0 = \operatorname{const} > 0$. Величина $\rho \mathbf{u}$ интерпретируется как пространственно-временной средний импульс единицы объема жидкости. Здесь вектор \mathbf{g} – ускорение свободного падения, $\Pi = \eta[(\nabla \otimes \mathbf{u}) + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T]$ – навье-стоксовский тензор вязких напряжений для случая несжимаемой жидкости. В уравнениях (4.1)–(4.3) температурный коэффициент расширения жидкости β , коэффициент теплопроводности χ , коэффициент динамической вязкости η и характерное время τ считаются положительными постоянными. Член с диссипативной функцией в (4.3) опущен.

При $\tau \rightarrow 0$ система (4.1)–(4.3) переходит в классическую систему Буссинеска для моделирования задач тепловой конвекции. В работах [9], [12] для уравнений (4.1)–(4.3) построены точные решения, описывающие конвекцию жидкости в плоском вертикальном и плоском горизонтальном слоях.

Вариант системы (4.1)–(4.3) для изотермического течения вязкой жидкости был впервые постулирован в [13]. Там же для этого случая получено уравнение баланса кинетической энергии вида

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + \operatorname{div} \left[(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \left(\rho \frac{\mathbf{u}^2}{2} + p \right) - (\Pi_Q \cdot \mathbf{u}) \right] = -\Phi. \quad (4.4)$$

Неотрицательная диссипативная функция Φ вычисляется так:

$$\Phi = \frac{(\Pi : \Pi)}{2\eta} + \frac{\rho \mathbf{w}^2}{\tau}.$$

Интегрируя (4.4) по ограниченной области V_0 с учетом граничных условий

$$\mathbf{u}|_{\Sigma_0} = 0, \quad (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})|_{\Sigma_0} = 0,$$

закключаем, что полная кинетическая энергия жидкости $E = \int_{V_0} (\rho \mathbf{u}^2 / 2) d\mathbf{x}$ убывает с течением времени. Аналогичная теорема о диссипации кинетической энергии справедлива и для системы Навье–Стокса [28].

Для указанной системы в [13] построены точные решения, описывающие известные ламинарные течения Пуазейля в трубе и в плоском канале, течения Куэтта между двумя плоскими

пластинами и двумя вращающимися с постоянными угловыми скоростями соосными цилиндрами.

В [31], [12] показана возможность построения квазимагнитогидродинамических (КМГД) моделей течений вязких электропроводных сред (как сжимаемых, так и несжимаемых) путем объединения квазигидродинамических уравнений с уравнениями электродинамики Максвелла. Построены точные решения КМГД-систем для аналогов задач Гартмана и Гершуни–Жуховицкого.

5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА НА ОСНОВЕ КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Численное исследование сверхзвуковых течений газа на основе системы Навье–Стокса сопряжено с известными трудностями. Одна из них связана с проблемой построения специальных сеточных регуляризаторов, обеспечивающих адекватность разностного решения и устойчивость вычислений. Для квазигазодинамических уравнений эта проблема может быть решена простым и эффективным способом. Регуляризаторы строятся на основе дополнительных дивергентных членов и позволяют использовать аппроксимации второго порядка точности для всех производных по пространственным переменным.

Для плоских или пространственных осесимметричных течений квазигазодинамическая система (3.1)–(3.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} (r^k \rho u_k) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z) &= \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} \left[\tau \frac{\partial}{\partial r} (r^k \rho u_r^2) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\tau \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z^2) \right] + \\ &+ \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^k \tau \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\tau \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^k \tau \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_r u_z) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\tau \frac{\partial}{\partial r} (r^k \rho u_r u_z) \right], \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho u_r)}{\partial t} + \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} (r^k \rho u_r^2) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_r u_z) + \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} \left[\tau \frac{\partial}{\partial r} (r^k \rho u_r^3) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\tau \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_r u_z^2) \right] + \\ + 2 \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^k \tau \frac{\partial p u_r}{\partial r} \right) - 2k \tau \frac{p u_r}{r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\tau \frac{\partial}{\partial r} (r^k p u_r) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\tau \frac{\partial p u_r}{\partial z} \right) + \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^k \tau \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_r^2 u_z) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left[\tau \frac{\partial}{\partial r} (r^k \rho u_r^2 u_z) \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left(\tau \frac{\partial p u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\tau \frac{\partial p u_z}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho u_z)}{\partial t} + \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} (r^k \rho u_r u_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z^2) + \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} \left[\tau \frac{\partial}{\partial r} (r^k \rho u_r^2 u_z) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\tau \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z^3) \right] + \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^k \tau \frac{\partial p u_z}{\partial r} \right) + \\ + 3 \frac{\partial}{\partial z} \left(\tau \frac{\partial p u_z}{\partial z} \right) + \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^k \tau \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_r u_z^2) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\tau \frac{\partial}{\partial r} (r^k \rho u_r u_z^2) \right] + \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^k \tau \frac{\partial p u_r}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[\tau \frac{\partial}{\partial r} (r^k p u_r) \right], \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} [r^k u_r (E + p)] + \frac{\partial}{\partial z} [u_z (E + p)] &= \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} \left[\tau \frac{\partial}{\partial r} (r^k u_r^2 (E + 2p)) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\tau \frac{\partial}{\partial z} (u_z^2 (E + 2p)) \right] + \\ + \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^k \tau \frac{\partial}{\partial r} \left(p \frac{u_r^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\tau \frac{\partial}{\partial z} \left(p \frac{u_z^2}{2} \right) \right] + \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^k \tau \frac{\partial}{\partial r} \left(p \frac{u_z^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\tau \frac{\partial}{\partial z} \left(p \frac{u_r^2}{2} \right) \right] + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^k \frac{p \tau \partial p}{\rho \partial r} \right) + \\ &+ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p \tau \partial p}{\rho \partial z} \right) + \frac{\gamma \text{Pr}^{-1}}{\gamma - 1} \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^k p \tau \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho} \right) \right] + \frac{\gamma \text{Pr}^{-1}}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial z} \left[p \tau \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} \left[\tau r^k \frac{\partial}{\partial z} (u_r u_z (E + 2p)) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\tau \frac{\partial}{\partial r} (r^k u_r u_z (E + 2p)) \right]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Параметр k равен нулю в плоском случае и единице в осесимметрическом. Система замыкается

уравнениями

$$E = \rho \frac{u_r^2 + u_z^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1}, \quad p = \rho RT, \quad \tau = \frac{\eta}{p}. \quad (5.5)$$

В формуле для τ число Шмидта Sc положено равным единице. К системе (5.1)–(5.5) также следует добавить начальные и граничные условия.

Для нормальной и тангенциальной компонент скорости u_n и u_t на твердой поверхности Σ задавались условия непротекания и скольжения в виде

$$u_n|_{\Sigma} = 0, \quad u_t|_{\Sigma} = \left(\frac{\sqrt{\pi}\eta}{\rho\sqrt{2RT}} \frac{\partial u_t}{\partial \mathbf{n}} \right) \Big|_{\Sigma}.$$

Ставилось также условие температурного скачка

$$T|_{\Sigma} - T_w = \frac{\sqrt{\pi}}{2R} \left(\frac{1}{\sqrt{2RT}} \frac{\kappa \partial T}{\rho \partial \mathbf{n}} \right) \Big|_{\Sigma},$$

где T_w – температура поверхности тела. Дополнительное граничное условие для давления в случае плоской поверхности имело вид

$$\partial p / \partial \mathbf{n}|_{\Sigma} = 0$$

и обеспечивало отсутствие потока массы через границу. Коэффициент вязкости η вычислялся по формуле

$$\eta = \eta_1 (T/T_1)^{\omega}, \quad (5.6)$$

где η_1 – табличное значение этого коэффициента при температуре T_1 , $\omega = 0.5$. Связь η со средней длиной свободного пробега молекул λ определялась с помощью выражения

$$\eta = \lambda \rho \sqrt{2\pi RT} \frac{15}{2(7 - 2\omega)(5 - 2\omega)}. \quad (5.7)$$

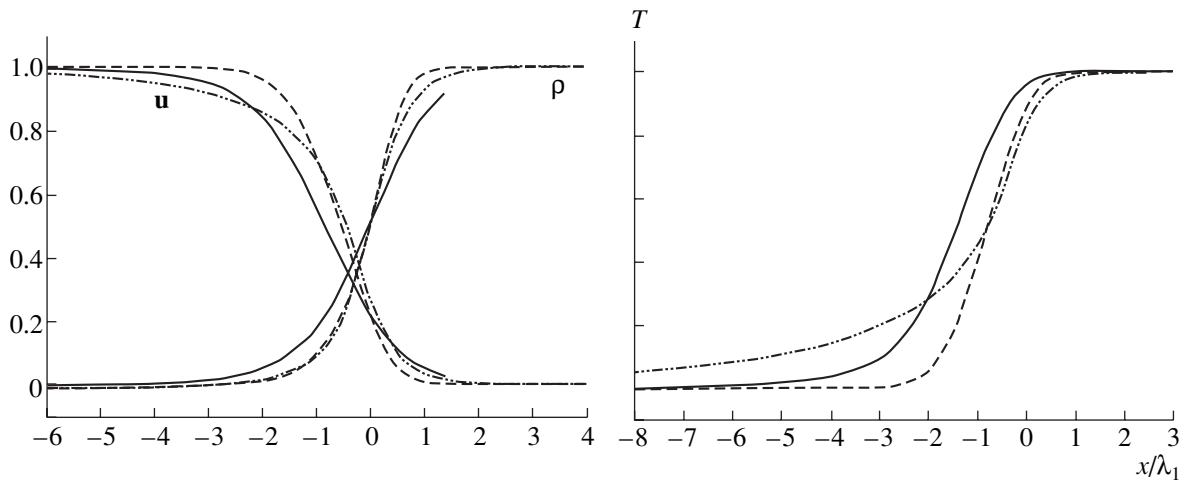
Для численного решения выписанной системы уравнений использовался метод конечных разностей, явный по времени. Пространственные производные аппроксимировались центральными разностями, а производные по времени – разностями вперед с первым порядком. Все необходимые величины вычислялись в узлах разностной сетки. При больших скоростях течения для улучшения вычислительной устойчивости в ряде слагаемых, не содержащих смешанные производные по пространственным переменным, параметр τ заменялся величиной $\tau + \alpha h/c_s$, где h – шаг пространственной сетки, $0 < \alpha < 1$. Во всех расчетах проводилось исследование сходимости и точности результатов при уменьшении шага пространственной сетки.

В [15] на основе системы (5.1)–(5.5) было рассчитано плоское течение в окрестности полубесконечной тонкой пластины, расположенной параллельно набегающему сверхзвуковому потоку. Числа Маха M изменялись в пределах от 1.5 до 20. Рассматривался одноатомный газ твердых шаров с числом $Pr = 2/3$ и показателем адиабаты $\gamma = 5/3$.

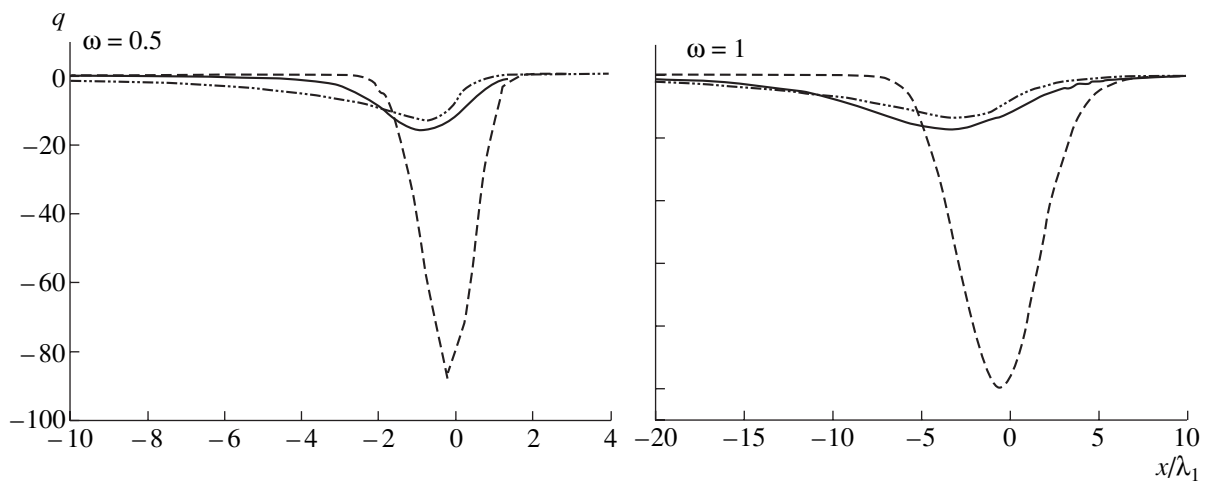
В [32] приведены результаты моделирования сверхзвуковых течений газа в окрестности тонкого диска, расположенного перпендикулярно набегающему сверхзвуковому потоку. Сравнение с данными, полученными на основе решений уравнений Навье–Стокса, а также с результатами прямого численного моделирования методом Монте-Карло в рамках кинетической модели (результатами ПММК) показало определенные преимущества КГД-уравнений.

Изложим более подробно результаты расчетов задачи о структуре неподвижной ударной волны в одноатомном идеальном политропном газе на основе квазигазодинамических уравнений. Известно, что при числах Маха M набегающего сверхзвукового потока из промежутка (1, 2) профили газодинамических параметров, рассчитанные с помощью модели Навье–Стокса, хорошо соответствуют наблюдаемым экспериментально. Однако при $M \gg 2$ имеется заметное расхождение [26]. В рамках дорогостоящего кинетического подхода структура ударной волны описывается вполне удовлетворительно в широком диапазоне чисел Маха.

Свойства ударно-волновых решений квазигазодинамических уравнений были исследованы теоретически в [11]. В [14], [32] для расчета этих решений был применен явный условно-устойчивый алгоритм. При этом в системе (5.1)–(5.5), записанной для одномерного случая, все произ-



Фиг. 1.



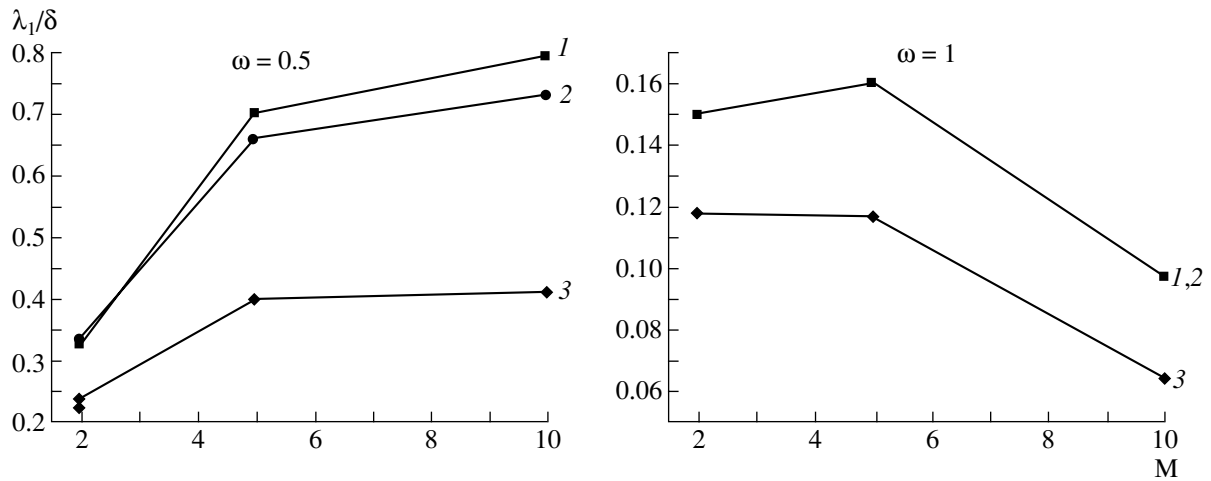
Фиг. 2.

водные по пространственным переменным аппроксимировались со вторым порядком точности без введения дополнительных регуляризаторов. Числа Маха M полагались равными 2, 5 и 10. В формулах (5.6), (5.7) параметр ω принимал значения 0.5 (газ твердых шаров) и 1 (газ максвелловских молекул).

Для $M = 2$ модели КГД (штрихпунктирные кривые на графиках) и Навье–Стокса (штриховая), а также метод ПММК (сплошные кривые) давали близкие результаты, отвечающие экспериментальным данным. На фиг. 1 профили плотности ρ , скорости u и температуры T , рассчитанные с помощью КГД-системы при $M = 5$, $\omega = 0.5$, приведены в сравнении с аналогичными профилями, полученными на основе уравнений Навье–Стокса и методом ПММК. Можно сделать вывод о том, что для модели КГД зависимость $u(x)$ во всей расчетной области и зависимость $\rho(x)$ при $x > 0$ лучше соответствуют данным ПММК, чем такие же зависимости, найденные путем решения системы Навье–Стокса.

На фиг. 2 представлены распределения безразмерного теплового потока вдоль ударной волны при $M = 5$ для $\omega = 0.5$ и $\omega = 1$. В качестве единицы его измерения была выбрана величина $\rho_1 c_{s1}^2$, где ρ_1 и c_{s1} – плотность и скорость звука перед фронтом волны. Для систем КГД и Навье–Стокса тепловой поток вычислялся по формулам (3.9) и (2.18) соответственно. В кинетической модели использовалось выражение

$$q = 0.5\rho\langle c^2 c \rangle,$$



Фиг. 3.

в котором $\mathbf{c} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ – тепловая скорость молекулы. Символ $\langle \rangle$ означает осреднение по ансамблю частиц. Видно, что данные расчетов этого параметра в рамках КГД- и ПММК-подходов очень близки, а модель Навье–Стокса не дает вполне удовлетворительного результата. Заметим, что последнее слагаемое в формуле (3.9) имеет порядок $O(Kn^2)$ и существенно влияет на величину теплового потока, поскольку в рассматриваемой задаче число Кнудсена не мало.

На фиг. 3 для $\omega = 0.5$ и $\omega = 1$ показаны зависимости обратной толщины волны λ_1/δ от числа M . Здесь λ_1 – средняя длина свободного пробега молекул в набегающем сверхзвуковом потоке, $\delta = (\rho_2 - \rho_1)/\max(dp/dx)$, ρ_1 и ρ_2 – плотности газа перед фронтом и за фронтом ударной волны соответственно. При $\omega = 1$ на основе обеих макроскопических моделей (линии 1 и 2) в указанном диапазоне чисел M получаются приблизительно одинаковые результаты, а при $\omega = 0.5$ определенным преимуществом обладает система КГД (линии 2). Все указанные преимущества КГД-уравнений отчетливее проявляются с ростом числа Маха. Линии 3 – для ПММК.

Задача о структуре ударной волны решалась также на основе квазигидродинамической системы (2.27)–(2.29). При этом установлено, что результаты расчетов на основе квазигазодинамической системы оказываются более точными, чем аналогичные результаты, полученные с помощью квазигидродинамической системы.

6. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Конвективные течения в замкнутых полостях широко исследовались на основе уравнений Навье–Стокса, записанных в приближении Обербека–Буссинеска [30], [33], [34]. Для получения устойчивых вычислительных процедур использовались различные виды искусственных сеточных регуляризаторов либо специальных разностных аппроксимаций.

Рассмотрим задачу о гравитационной конвекции жидкости в прямоугольной каверне высоты H и длины $L = AH$. Относительные температуры T_1 и T_2 левой (горячей) и правой (холодной) стенок каверны поддерживаются постоянными, $\Delta T = T_1 - T_2 > 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $T_2 = 0$. Пусть u и v – горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости \mathbf{u} в декартовой системе координат (x, y) . Выбрав в качестве единиц измерения $x, y, t, u, v, p, T, \tau$, соответственно, величины $H, H, H^2/\nu, \nu/H, \nu/H, \rho(\nu/H)^2, \Delta T/A, H^2/\nu$, систему (4.1)–(4.3), выписанную для случая плоских неустановившихся течений, представим в безразмерной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\tau \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\tau \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - GrT \right) \right], \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) + \frac{\partial p}{\partial x} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} +$$

$$+ 2\frac{\partial}{\partial x}\left[\tau u\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\tau v\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\tau u\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - GrT\right)\right],$$
(6.2)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(v^2) + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial p}{\partial y} = 2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial}{\partial y}\left[\tau v\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - GrT\right)\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left[\tau u\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - GrT\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\tau v\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x}\right)\right] + GrT,$$
(6.3)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uT) + \frac{\partial}{\partial y}(vT) = \frac{1}{Pr}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left[\tau T\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\tau T\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - GrT\right)\right].$$
(6.4)

Здесь числа Грасгофа Gr и Прандтля Pr вычисляются по формулам

$$Gr = \frac{\beta g \Delta T H^4}{\nu^2 L}, \quad Pr = \frac{\nu}{\chi}.$$

Пусть $G = \{(x, y) : 0 < x < A, 0 < y < 1\}$ – область течения. Если жидкость прилипает к границам полости, а верхняя и нижняя стенки нетеплопроводны, то к системе (6.1)–(6.4) необходимо добавить следующие граничные условия на левой, правой, нижней и верхней стенках соответственно:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \partial p / \partial x = 0, \quad T = A, \tag{6.5}$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \partial p / \partial x = 0, \quad T = 0, \tag{6.6}$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \partial p / \partial y = GrT, \quad \partial T / \partial y = 0, \tag{6.7}$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \partial p / \partial y = GrT, \quad \partial T / \partial y = 0. \tag{6.8}$$

Условия (6.5)–(6.8) являются консервативными и обеспечивают выполнение интегральных законов сохранения массы и импульса. В качестве начальных условий используются невозмущенные поля скорости и температуры:

$$u|_{t=0} = v|_{t=0} = 0, \quad T|_{t=0} = 0, \quad (x, y) \in G. \tag{6.9}$$

Неоднозначность в определении давления исключается с помощью нормировки

$$p(A, 1) = 1. \tag{6.10}$$

Для решения поставленной начально-краевой задачи (6.1)–(6.10) был применен явный условно-устойчивый консервативный и однородный вычислительный алгоритм, описанный в [16]–[18]. Расчетная область G покрывалась равномерной по обоим направлениям разностной сеткой размера $N_x \times N_y$. Использовалась простая явная аппроксимация уравнений движения (6.2), (6.3) и уравнения переноса тепла (6.4) со вторым порядком точности по пространственным переменным и первым порядком точности по времени. Аппроксимация граничных условий автоматически обеспечивалась введением по границам расчетной области дополнительных слоев фиктивных ячеек. На каждом временном слое поле давления находилось по уже известным полям скорости и температуры путем решения уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} - GrT\right),$$

являющегося эквивалентным представлением (6.1). Применялся модифицированный метод сопряженных градиентов, обладающий высокой скоростью сходимости. При этом в правой верхней расчетной точке давление поддерживалось постоянным и равным единице. Далее по явной

схеме вычислялись значения скоростей и температуры на следующем слое по времени. Все члены, зависящие от τ , рассматривались как искусственные регуляризаторы, необходимые для обеспечения устойчивости алгоритма.

Рассмотрим сначала известную тестовую задачу о тепловой конвекции в квадратной камере ($A = 1$), подогреваемой слева. Задача решалась при умеренных числах Грасгофа, которые изменялись в диапазоне 10^3 – 10^5 , а также при различных значениях параметра τ из промежутка 10^{-5} – 10^{-2} . Число Прандтля полагалось равным единице. Использовались равномерные пространственные сетки размера $N \times N$ при $N = 21, 41, 81$.

Функция тока ψ строилась на основе соленоидального векторного поля $\mathbf{u} - \mathbf{w}$:

$$u - w_x = \partial\psi/\partial y, \quad v - w_y = -\partial\psi/\partial x.$$

Здесь w_x и w_y – горизонтальная и вертикальная компоненты вектора \mathbf{w} соответственно. При малых значениях τ векторы \mathbf{u} и $\mathbf{u} - \mathbf{w}$ различаются незначительно.

Для вычисления безразмерного теплового потока через левую боковую границу (числа Нуссельта $Nu = Nu(y)$) использовалось выражение

$$Nu(y) = -\frac{1}{Pr} \frac{\partial T(0, y)}{\partial x}.$$

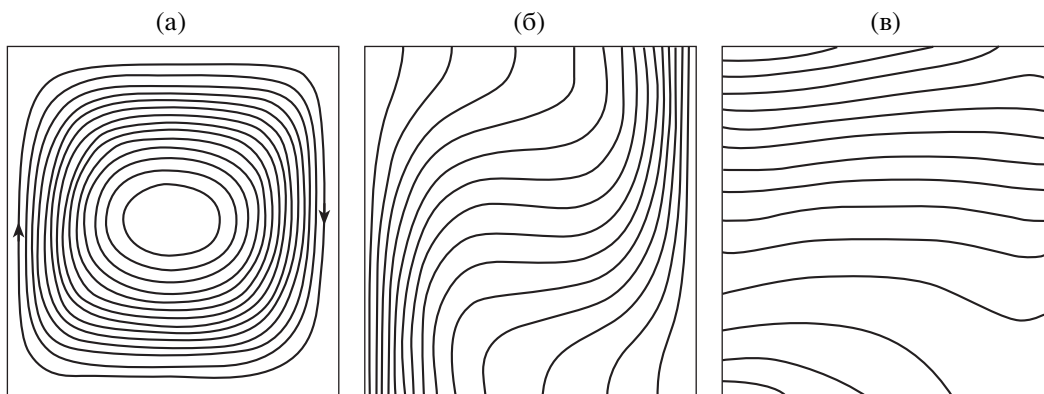
Среднее число Нуссельта определялось по формуле

$$Nu_0 = \int_0^1 Nu(y) dy.$$

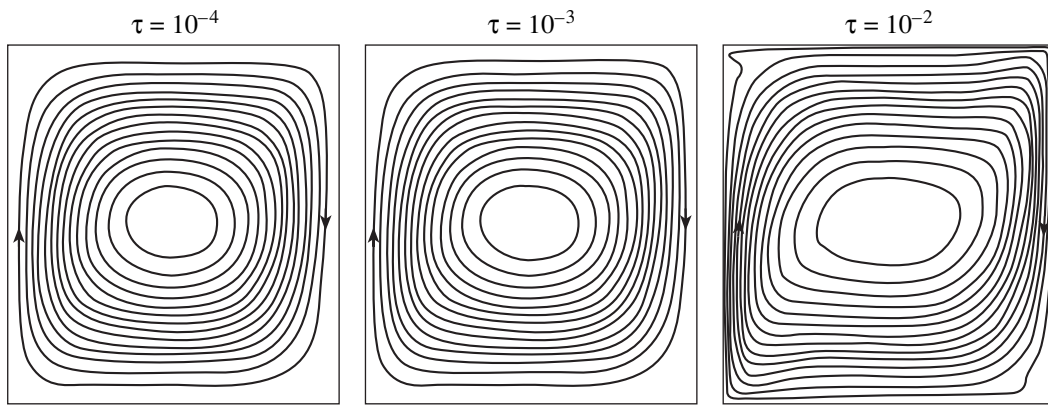
Были приняты также следующие обозначения: $|\psi|_{\text{mid}}$ – абсолютная величина функции тока в центре области, $|\psi|_{\text{max}}$ – максимум модуля функции тока в расчетной области, u_{max} – максимум горизонтальной компоненты скорости \mathbf{u} в среднем вертикальном сечении, v_{max} – максимум вертикальной компоненты скорости \mathbf{u} в среднем горизонтальном сечении, Nu_{max} – максимальное значение числа Нуссельта на левой границе, Nu_{min} – минимальное значение числа Нуссельта на левой границе.

На фиг. 4 представлены расположенные эквидистантно линии уровня функции тока (а), изотермы (б) и изобары (в) установившегося течения при $Gr = 10^4$, $\tau = 10^{-4}$, $N = 41$. Им соответствуют значения $\psi_i = \psi_{\text{max}} - i(\psi_{\text{max}} - \psi_{\text{min}})/15$, $T_i = T_{\text{max}} - i(T_{\text{max}} - T_{\text{min}})/15$, $p_i = p_{\text{max}} - i(p_{\text{max}} - p_{\text{min}})/15$. В данном расчете $\psi_{\text{min}} = -5.099$, $\psi_{\text{max}} = 0$, $T_{\text{min}} = 0$, $T_{\text{max}} = 1$, $p_{\text{min}} = -5065.8$, $p_{\text{max}} = 1660.7$. Минимум давления достигается в левом нижнем углу камеры, а максимум – в ее левом верхнем углу. Аналогичная картина течения наблюдалась как в экспериментах [33], так и в расчетах на основе модели Навье–Стокса [34].

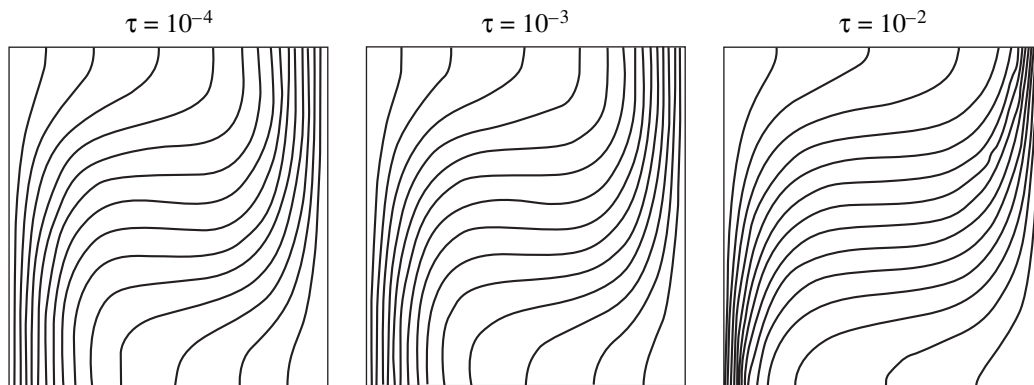
В табл. 1, 2 результаты расчетов приведены в сравнении с аналогичными результатами, полученными с помощью модели Навье–Стокса в переменных “функция тока–вихрь–температура” [34], а также с экспериментальными данными [33]. В указанном диапазоне чисел Gr все рассчитанные параметры течения хорошо согласуются между собой. На более подробных пространственных сетках точность расчетов повышается. Она также возрастает с уменьшением τ ,



Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

что, в свою очередь, приводит к сокращению шага по времени. Влияние величины τ на структуру течения показано на фиг. 5 (линии тока) и фиг. 6 (изотермы).

Результаты численного моделирования тестовой задачи о гравитационной конвекции в прямоугольных кавернах жидкости, обладающей низкими числами P_r , приведены в [18].

Таким образом, на основе проделанных расчетов КГД-систем можно моделировать реальные течения жидкостей и газов в широком диапазоне параметров.

Таблица 1

τ	Сетка	Статья	$ \psi _{\max}$	u_{\max}	v_{\max}	Nu_0	Nu_{\max}	Nu_{\min}
10^{-4}	21×21	Наст. статья	5.044	15.938	19.513	2.306	3.939	0.579
		[34]	5.277	16.144	19.363	2.253	3.615	0.591
10^{-4}	41×41	Наст. статья	5.099	16.005	19.663	2.281	3.708	0.591
		[34]	5.125	16.262	19.602	2.249	3.563	0.586
10^{-4}	81×81	Наст. статья	5.113	16.070	19.663	2.275	3.649	0.581
		[34]	5.086	16.219	19.648	2.247	3.541	0.585
		[33]	5.071	16.178	19.617	2.238	3.528	0.586
10^{-3}	21×21	Наст. статья	5.195	15.587	18.565	2.431	4.318	0.529
10^{-2}	21×21	Наст. статья	6.723	13.182	11.542	3.850	9.268	0.352

Таблица 2

τ	Сетка	Статья	$ \psi _{\text{mid}}$	$ \psi _{\text{max}}$	u_{max}	v_{max}	Nu_0	Nu_{max}	Nu_{min}
10^{-5}	21×21	Наст. статья	9.264	9.666	32.33	67.70	4.865	9.777	0.204
		[34]	10.259	10.860	40.30	65.07	4.532	8.123	0.762
10^{-5}	41×41	Наст. статья	9.502	9.909	33.24	70.91	4.682	8.733	0.729
		[34]	9.388	9.918	36.63	68.11	4.554	7.968	0.730
		[33]	9.111	9.612	34.73	68.59	4.509	7.717	0.729
10^{-4}	21×21	Наст. статья	9.358	9.754	32.20	66.71	4.906	9.931	-0.033
10^{-3}	21×21	Наст. статья	10.400	10.740	33.12	57.86	5.732	12.091	-0.611

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлено исследование двух взаимосвязанных математических моделей – квазигазодинамической и квазигидродинамической. Обе модели отличаются от уравнений Навье–Стокса малыми дивергентными добавками и могут интерпретироваться как системы, описывающие эволюцию пространственно-временных средних величин – плотности, скорости и температуры. Каждой из них соответствует свой способ решения проблемы замыкания соотношений (2.10)–(2.14), вытекающих из интегральных законов сохранения для подвижного материального объема. В стационарном случае обе КГД-системы отличаются от уравнений Навье–Стокса (и друг от друга) дивергентными членами, имеющими формальные асимптотические порядки малости $O(Kn^2)$ при $Kn \rightarrow 0$. Влияние добавочных членов незначительно для стационарных и квазистационарных газодинамических течений при малых числах Кнудсена. Однако для сильно нестационарных течений, а также при числах Kn , близких к единице, их вклад становится существенным. Именно в этом классе задач следует искать преимущества новых моделей.

В [35] дан другой, отличный от изложенного в разд. 2 вывод двух исследуемых систем, в основе которого лежат конечно-разностные соображения. В [35] обсуждены также условия применимости новых моделей и сделан вывод о том, что квазигазодинамические уравнения следует использовать только при моделировании течений идеального политропного газа, а квазигидродинамические – при исследовании движений движений неидеальных газов и жидкостей. Вопрос о границах применимости КГД-моделей является одним из наиболее сложных. Чтобы ответить на него, необходимы дополнительные теоретические, численные и экспериментальные исследования.

Авторы благодарят Б.Н. Четверушкина за полезные обсуждения результатов данной работы и А.А. Самарского за поддержку представленного в работе цикла исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волчинская М.И., Павлов А.Н., Четверушкин Б.Н. Об одной схеме интегрирования уравнений газовой динамики: Препринт № 113. М.: ИПМатем. АН СССР, 1983. 12 с.
2. Елизарова Т.Г., Павлов А.Н., Четверушкин Б.Н. Использование кинетической модели для вывода уравнений, описывающих газодинамические течения: Препринт № 144. М.: ИПМатем. АН СССР, 1983. 12 с.
3. Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н. Использование кинетических моделей для расчета газодинамических течений // Матем. моделирование: процессы в нелинейных средах. М.: Наука, 1986. С. 261–278.
4. Елизарова Т.Г., Павлов А.Н., Четверушкин Б.Н. Использование квазигазодинамической системы уравнений для расчета обтекания тела с иглой // Докл. АН СССР. 1987. Т. 292. № 2. С. 327–331.
5. Reitz R.D. One-dimensional compressible gas dynamic calculations using the Boltzmann equation // J. Comput. Phys. 1981. V. 42. № 1. P. 108–123.
6. Аристов В.В., Черемисин Ф.Г. Решение уравнений Эйлера и Навье–Стокса на основе операторного расщепления кинетического уравнения // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 3. С. 555–559.
7. Deshpande S.M., Mandal J.C. Kinetic theory based new upwind methods for inviscid compressible flow // Theor. and Appl. Mech. Sofia, 1988. V. 19. № 3. P. 32–38.
8. Шеретов Ю.В. Об одной новой математической модели в гидродинамике // Применение функц. анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун-т, 1996. С. 124–134.

9. *Шеретов Ю.В.* Квазигидродинамические уравнения как модель течений сжимаемой вязкой теплопроводной среды // Применение функц. анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун-т, 1997. С. 127–155.
10. *Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В.* Инвариантный вид и асимптотические свойства обобщенной квазигазодинамической системы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т. 31. № 7. С. 1042–1050.
11. *Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В.* О свойствах решений типа ударной волны для квазигазодинамических уравнений; Препринт № 156. М.: ИПМатем. АН СССР, 1990. 15 с.
12. *Шеретов Ю.В.* О точных решениях квазигидродинамических уравнений // Применение функц. анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун-т, 1998. С. 213–241.
13. *Шеретов Ю.В.* О единственности решений одной диссипативной системы уравнений гидродинамического типа // Матем. моделирование. 1994. Т. 6. № 10. С. 35–45.
14. *Граур И.А., Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В.* Расчет структуры неподвижной ударной волны на основе квазигазодинамических уравнений; Препринт № 42. М.: Всес. центр матем. моделирования РАН, 1992. 20 с.
15. *Elizarova T.G., Graur I.A., Lengrand J.-C., Chpoun A.* Rarefied gas flow simulation based on quasigasdynamic equations // AIAA Journal. 1995. V. 33. № 12. P. 2316–2324.
16. *Гуров Д.Б., Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В.* Численное моделирование течений жидкости в каверне на основе квазигидродинамической системы уравнений // Матем. моделирование. 1996. Т. 8. № 7. С. 33–44.
17. *Елизарова Т.Г., Калачинская И.С., Ключникова А.В., Шеретов Ю.В.* Использование квазигидродинамической системы уравнений для моделирования течений теплопроводной жидкости // Тр. IV междунар. конф. “Математика, компьютер, образование”. Пушкино, 1997. С. 108–115.
18. *Елизарова Т.Г., Калачинская И.С., Ключникова А.В., Шеретов Ю.В.* Использование квазигидродинамических уравнений для моделирования тепловой конвекции при малых числах Прандтля // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 10. С. 1732–1742.
19. *Четверушкин Б.Н.* Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике. М.: Изд-во МГУ, 1999.
20. *Слезкин Н.А.* О дифференциальных уравнениях движения газа // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77. № 2. С. 205–208.
21. *Валландер С.В.* Уравнения движения вязкого газа // Докл. АН СССР. 1951. Т. 58. № 1. С. 25–27.
22. *Климонтович Ю.Л.* Статистическая теория открытых систем. М.: ЯНУС, 1995.
23. *Алексеев Б.В.* Обобщенная бoльцмановская физическая кинетика // Теплофиз. высоких т-р. 1997. Т. 35. № 1. С. 129–146.
24. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1976.
25. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.
26. *Берд Г.* Молекулярная газовая динамика. М.: Наука, 1981.
27. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
28. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
29. *Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В.* Инвариантный вид системы квазигазодинамических уравнений и ее связь с уравнениями Навье–Стокса; Препринт № 230. М.: ИПМатем. АН СССР, 198. 18 с.
30. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
31. *Шеретов Ю.В.* Квазигидродинамическая модель течений электропроводной вязкой жидкости в электромагнитном поле // Применение функц. анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун-т, 1997. С. 155–169.
32. *Elizarova T.G., Graur I.A., Chpoun A., Lengrand J.-C.* Comparison of continuum and molecular approaches for the flow around a perpendicular disk // Proc. 20-th Internat. Symp. Shock Waves. Pasadena, USA, 1995. World Scientific, 1997. P. 795–800.
33. *De Vahl Davis G., Jones I.P.* Natural convection in a square cavity – a comparison exercise // Int. J. Numer. Meth. in Fluids. 1983. № 3. P. 227–248.
34. *Вабищевич П.Н., Макаров М.М., Чуданов В.В., Чурбанов А.Г.* Численное моделирование конвективных течений в переменных “функция тока, вихрь скорости, температура”: Препринт № 28. М.: ИММ РАН, 1993. 20 с.
35. *Шеретов Ю.В.* Разностные схемы гидродинамики в эйлеровых и лагранжевых координатах на основе квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений // Применение функц. анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун-т, 1999. С. 184–208.