

УДК 517.958:533.7

## ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ДОЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА

Т. Г. Елизарова<sup>\*)</sup>, М. Е. Соколова

(кафедра математики)

E-mail: sokolova@afrodita.phys.msu.ru

Предложен и протестирован новый численный алгоритм расчета дозвуковых течений, основанный на системе квазигазодинамических уравнений. Особенности алгоритма являются способ введения регуляризации и простота постановки граничных условий. Алгоритм протестирован на задачах течения в каналах с внезапным расширением и сужением.

### Введение и система уравнений

В работах [1, 2] был предложен и протестирован новый численный алгоритм расчета газодинамических течений со сверхзвуковыми скоростями. Алгоритм основан на системе квазигазодинамических (КГД) уравнений, которые отличаются от уравнений Навье–Стокса (НС) дополнительными диссипативными слагаемыми. Наличие этих слагаемых позволяет строить эффективные численные алгоритмы расчета течений вязкого сжимаемого газа.

В настоящей работе алгоритм [1, 2] адаптирован для расчетов дозвуковых течений газа. Предложен способ построения неотражающих условий на свободных границах.

Запишем систему КГД уравнений [1] для плоского случая:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx}}{\partial x} + \frac{\partial j_{my}}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t} + \frac{\partial(j_{mx} u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(j_{my} u_x)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \\ = \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yx}}{\partial y}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial t} + \frac{\partial(j_{mx} u_y)}{\partial x} + \frac{\partial(j_{my} u_y)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \\ = \frac{\partial \Pi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yy}}{\partial y}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(j_{mx} H)}{\partial x} + \frac{\partial(j_{my} H)}{\partial y} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} (\Pi_{xx} u_x + \Pi_{xy} u_y) + \frac{\partial}{\partial y} (\Pi_{yx} u_x + \Pi_{yy} u_y). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\rho$  — плотность газа,  $u_x$  и  $u_y$  — проекции вектора скорости  $\mathbf{u}$  на оси  $O_x$  и  $O_y$  соответственно,  $p$  — давление,  $T$  — температура,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $R$  — газовая постоянная,  $E$  и  $H$  — полная энергия единицы объема и полная удельная энтальпия, которые определяются по формулам

$$E = \rho \frac{u_x^2 + u_y^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1}, \quad H = \frac{(E + p)}{\rho}.$$

Компоненты вектора плотности потока массы  $\mathbf{j}$  вычисляются по формулам

$$j_{mx} = \rho(u_x - w_x), \quad j_{my} = \rho(u_y - w_y),$$

$$w_x = \frac{\tau}{\rho} \left[ \frac{\partial(\rho u_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_x u_y)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right],$$

$$w_y = \frac{\tau}{\rho} \left[ \frac{\partial(\rho u_x u_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y^2)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} \right].$$

Компоненты тензора вязких напряжений  $\mathbf{\Pi}$  определяются как

$$\begin{aligned} \Pi_{xx} &= \Pi_{xx}^{NS} + u_x w_x^* + R^*, \\ \Pi_{xx}^{NS} &= 2\eta \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\eta \operatorname{div} \mathbf{u}, \\ \Pi_{xy} &= \Pi_{xy}^{NS} + u_x w_y^*, \\ \Pi_{xy}^{NS} &= \Pi_{yx}^{NS} = \eta \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \\ \Pi_{yx} &= \Pi_{yx}^{NS} + u_y w_x^*, \\ \Pi_{yy} &= \Pi_{yy}^{NS} + u_y w_y^* + R^*, \\ \Pi_{yy}^{NS} &= 2\eta \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\eta \operatorname{div} \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\Pi_{xx}^{NS}$ ,  $\Pi_{xy}^{NS}$ ,  $\Pi_{yx}^{NS}$ ,  $\Pi_{yy}^{NS}$  — компоненты тензора вязких напряжений НС, а выражения для  $w_x^*$ ,  $w_y^*$ ,  $R^*$  и дивергенция вектора скорости  $\operatorname{div} \mathbf{u}$  задаются формулами

$$w_x^* = \tau \left[ \rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right],$$

$$w_y^* = \tau \left[ \rho u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} \right],$$

$$R^* = \tau \left[ u_x \frac{\partial p}{\partial x} + u_y \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{u} \right], \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}.$$

<sup>\*)</sup> Институт математического моделирования РАН.

Компоненты вектора теплового потока  $\mathbf{q}$  вычисляются как

$$q_x = q_x^{NS} - u_x R^q, \quad q_y = q_y^{NS} - u_y R^q, \\ R^q = \tau \rho \left[ \frac{u_x}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} \right) + \frac{u_y}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p}{\rho} \right) + \right. \\ \left. + p u_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \right) + p u_y \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right], \quad (6)$$

где НС-слагаемые  $q_x^{NS}$  и  $q_y^{NS}$  определяются по формулам

$$q_x^{NS} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y^{NS} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial y}.$$

Коэффициенты динамической вязкости  $\eta$ , теплопроводности  $\kappa$  и релаксационный параметр  $\tau$  связаны соотношениями

$$\eta = \eta_\infty \left( \frac{T}{T_\infty} \right)^\omega, \quad \kappa = \frac{\gamma R}{(\gamma - 1) \text{Pr}} \eta, \quad \tau = \frac{1}{p \text{Sc}} \eta.$$

Здесь  $\eta_\infty$  — известное значение  $\eta$  при температуре  $T_\infty$ , Pr и Sc — числа Прандтля и Шмидта соответственно,  $\omega$  — заданный показатель степенной зависимости из промежутка [0.5; 1]. Система уравнений (1)–(4) дополняется начальными и краевыми условиями.

Уравнения приводятся к безразмерному виду с помощью замены:

$$x \rightarrow x/h, \quad y \rightarrow y/h, \quad t \rightarrow t u_\infty / h, \quad \rho \rightarrow \rho / \rho_\infty,$$

$$T \rightarrow T(\gamma R) / u_\infty^2, \quad u_x \rightarrow u_x / u_\infty, \quad u_y \rightarrow u_y / u_\infty,$$

$$p \rightarrow p / (\rho_\infty u_\infty^2), \quad E \rightarrow E / (\rho_\infty u_\infty^2), \quad H \rightarrow H / u_\infty^2,$$

где  $h$  — линейный размер (высота уступа канала),  $\rho_\infty$ ,  $u_\infty$ , и  $T_\infty$  — плотность, скорость и температура в невозмущенном потоке.

Для численного решения начально-краевой задачи используется явная по времени разностная схема. Разностный алгоритм и способ задания граничных условий (введение системы фиктивных ячеек) аналогичны описанным в [1, 2].

### Введение регуляризации

Для стабилизации численного алгоритма при расчете дозвуковых течений в релаксационный параметр  $\tau$  вводится искусственная диссипация (добавка), пропорциональная шагу пространственной сетки:

$$\tau = \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{p \text{Sc}} (\text{Ma}^2 T)^\omega + \alpha h_{xy} \text{Ma},$$

где  $\text{Ma} = u_\infty / c_\infty$  и  $\text{Re} = (u_\infty \rho_\infty h) / \eta_\infty$  — числа Маха и Рейнольдса соответственно,  $h_{xy} = \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$ ,  $h_x$ ,  $h_y$  — шаги разностной сетки по пространству,  $\alpha$  — численный коэффициент порядка единицы, который мы определяем подбором.

Оценочную формулу для релаксационного параметра  $\tau$  можно получить, предварительно оценив безразмерные значения давления и температуры как

$$p_\infty = \frac{\rho_\infty T_\infty}{\gamma} = \frac{\rho_\infty}{\gamma} c_\infty^2 \sim \\ \sim \frac{\rho_\infty}{\gamma} \left( \frac{u_\infty}{\text{Ma}} \right)^2 \sim \frac{\rho_\infty}{\gamma \text{Ma}^2} \sim \frac{1}{\gamma \text{Ma}^2}, \\ T = \frac{\gamma p_\infty}{\rho_\infty} \sim \frac{\gamma}{\gamma \text{Ma}^2} \sim \frac{1}{\text{Ma}^2},$$

где безразмерные плотность и скорость равны единице ( $\rho_\infty = 1$ ,  $u_\infty = 1$ ).

В результате оценочная формула для  $\tau$  имеет вид

$$\tau = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\gamma \text{Ma}^2}{\text{Sc}} + \alpha h_{xy} \text{Ma}.$$

Формально искусственную вязкость можно считать малой, если

$$\alpha h_{xy} < \frac{\text{Ma}}{\text{Re}}.$$

В данном алгоритме в отличие от алгоритма расчета сверхзвуковых течений [2] искусственная диссипация вводится только в КГД слагаемые. Благодаря этому искусственная диссипация отлична от нуля только в поле течения, а на границах расчетной области, включая твердые стенки, эти дополнительные слагаемые исчезают. Это можно показать, записав выражение для компоненты тензора вязких напряжений  $\Pi_{xy}$  (5) и тепловой поток  $q_x$  (6) на вертикальной стенке. Действительно, учитывая «условие непротекания» для скорости  $u_x = 0$ , выражения для теплового потока и коэффициента трения на стенке (5)–(6) принимают вид

$$q_x = q_x^{NS} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \Pi_{xy} = \Pi_{xy}^{NS} = \eta \frac{\partial u_y}{\partial x}.$$

### Постановка неотражающих граничных условий и расчет течения в канале

В расчетах дозвуковых течений возникает проблема построения неотражающих граничных условий на свободных границах. Традиционно применяемые условия, основанные на римановых инвариантах для уравнений Эйлера, представляются нефизичными для расчета вязких течений и трудоемкими в численной реализации. Обзор условий на свободных границах приведен, например, в [3] и [4].

В рамках КГД алгоритма для постановки условий на свободных границах удастся использовать простые и естественные граничные условия, аналогичные условиям для течений вязкой несжимаемой жидкости [5, 6]. Опишем постановку таких граничных условий на примере задачи о течении дозвукового потока вязкого сжимаемого газа в канале с внезапным расширением. Пусть газ втекает со стороны уступа (рис. 1).

Предположим, что на входе в канал течение представляет собой параболу Пуазейля [7]. Для течения

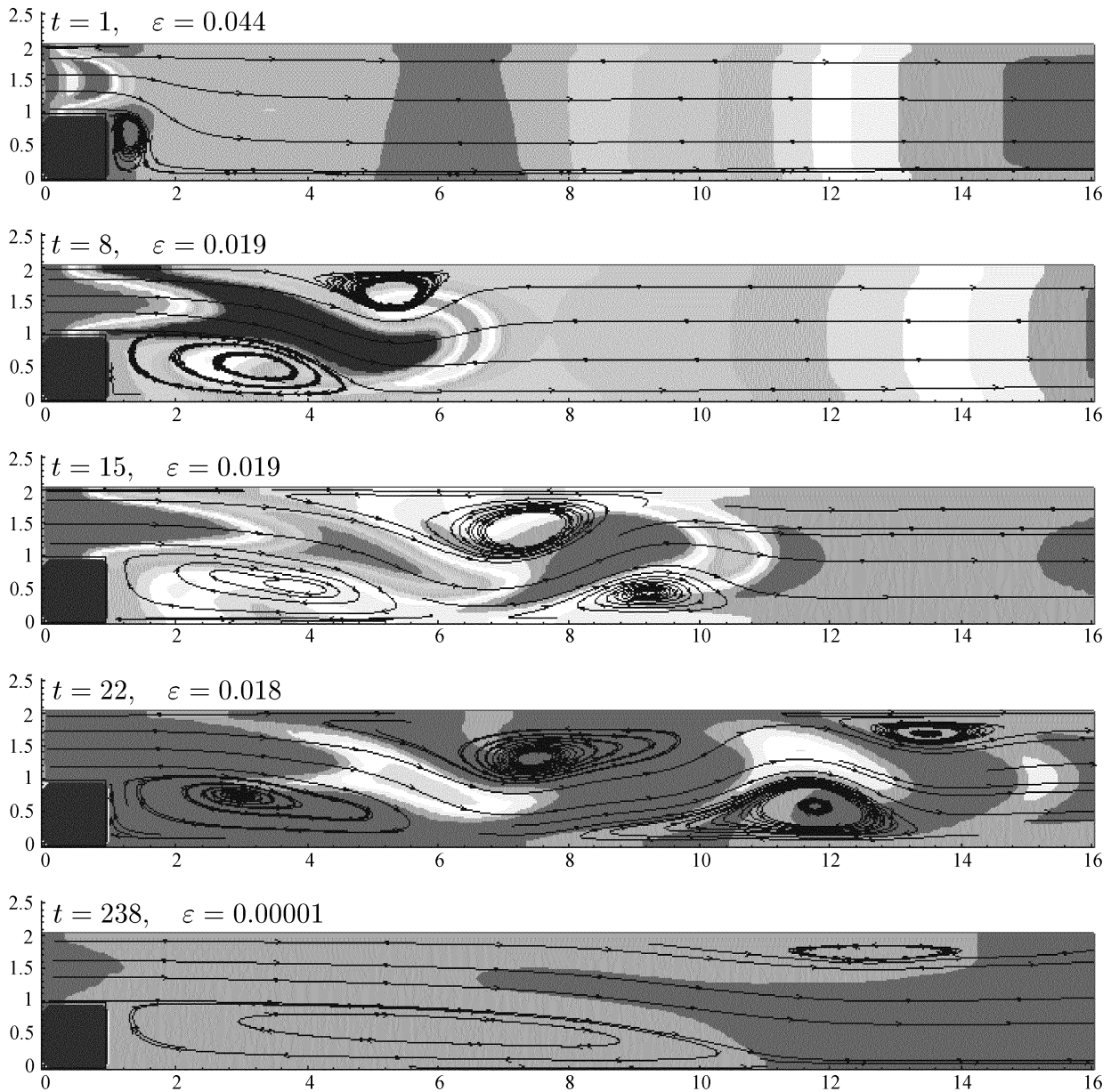


Рис. 1

вязкой несжимаемой жидкости ( $\rho = \text{const}$ ) решение Пуазейля имеет вид

$$u_x(y) = -\frac{\text{Re}}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (H-y)(h-y), \quad (7)$$

$$p = \left(1 - \frac{x}{L}\right) p_1 + \frac{x}{L} p_2,$$

где  $p_1$  — давление в точке с координатами  $(h, 0)$ , а  $p_2$  — давление в точке  $(h, L)$ ,  $h$  и  $l$  — высота и длина уступа,  $H$  и  $L$  — высота и длина канала соответственно.

В случае  $H = 2$  и  $h = 1$  (рис. 1), полагая, что средняя скорость во входном сечении  $u_\infty = 1$ , получаем:

$$u_x(y) = -6(2-y)(1-y), \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12}{\text{Re}}. \quad (8)$$

Граничные условия на входе (8) дополняем выражениями для двух других газодинамических параметров:  $\rho = 1$  и  $u_y = 0$ .

На выходной границе также по аналогии со случаем несжимаемой жидкости [5, 6] используем так называемые «мягкие» граничные условия (или условия «сноса») — равенство нулю производных для всех переменных за исключением давления, которое поддерживаем постоянным  $p = 1/(\gamma \text{Ma}^2)$ .

Эти условия будем использовать в качестве неотражающих условий на входной и выходной границах расчетной области. На твердых стенках ставятся условия «прилипания» и «непротекания» совместно с условием адиабатичности для температуры [2].

В качестве начальных условий используются параметры невозмущенного потока. Рассматривается

Таблица 1

Расчет течения в канале с внезапным расширением

Re	Ma	$\alpha$	Сетка	$h_x = h_y$	$dt$	Невязка	Число шагов	Время	$L_s$
100	0.1	0	100 × 20	0.1	10 <sup>-4</sup>	2 · 10 <sup>-2</sup>	201 500	20	4.7
100	0.1	0.01	100 × 20	0.1	10 <sup>-4</sup>	4 · 10 <sup>-4</sup>	1 201 500	111	5.0
100	0.1	0.1	100 × 20	0.1	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-4</sup>	86 145	86	5.1
100	0.1	0.2	100 × 20	0.1	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-4</sup>	80 333	80	5.0
100	0.1	0.5	100 × 20	0.1	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-4</sup>	80 000	80	5.1
100	0.1	1.0	100 × 20	0.1	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-4</sup>	55 133	55	5.1
100	0.1	1.5	100 × 20	0.1	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-4</sup>	45 413	45	5.0
100	0.1	2.0	100 × 20	0.1	5 · 10 <sup>-4</sup>	10 <sup>-4</sup>	75 405	38	5.1
100	0.1	5.0	100 × 20	0.1	10 <sup>-4</sup>	10 <sup>-4</sup>	219 849	22	4.8
100	0.1	0.5	100 × 20	0.1	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-4</sup>	80 000	80	5.1
100	0.1	0.5	200 × 40	0.05	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-4</sup>	80 832	81	5.0
200	0.1	0.5	140 × 20	0.1	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-5</sup>	170 623	171	8.50
200	0.1	0.5	280 × 40	0.05	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-5</sup>	203 450	204	8.35
300	0.1	0.5	160 × 20	0.1	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-4</sup>	238 033	238	10.10
300	0.1	0.5	320 × 40	0.05	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-4</sup>	140 000	140	9.95
400	0.1	0.5	200 × 20	0.1	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-4</sup>	535 000	535	11.40
400	0.1	0.5	400 × 40	0.05	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-4</sup>	626 000	626	12.70
100	0.5	0.5	100 × 20	0.1	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-4</sup>	95 142	95	4.9
100	0.2	0.5	100 × 20	0.1	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-4</sup>	103 775	104	5.0
100	0.1	0.5	100 × 20	0.1	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-4</sup>	80 000	80	5.1
100	0.05	0.5	100 × 20	0.1	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-4</sup>	39 774	40	5.0
100	0.01	0.5	100 × 20	0.1	10 <sup>-4</sup>	5 · 10 <sup>-6</sup>	271 066	27	4.9

течение воздушного потока при нормальном давлении. Значения молекулярных параметров для воздуха:  $\gamma = 1.4$ ,  $Pr = 0.737$ ,  $Sc = 0.737$ ,  $\omega = 0.74$ .

Расчеты проведены на равномерных пространственных сетках для чисел Рейнольдса  $Re = 100, 200, 300, 400$  и чисел Маха  $Ma = 0.5, 0.2, 0.1, 0.05, 0.01$ . Стационарное решение находилось методом установления. Результаты расчетов течения в канале с внезапным расширением приведены в табл. 1. На рис. 1 изображен процесс установления течения для варианта  $Re = 300, \alpha = 0.5, Ma = 0.1$ . Построены распределения плотности и приведены линии тока для времен  $t = 1, 8, 15, 22, 238$ . Видно, что возмущения свободно пересекают выходную границу области.

Для рассмотренных течений градиенты плотности пропорциональны  $1/Ma^2$  [7], что позволяет проводить сопоставление решения с расчетами, выполненными в приближении вязкой несжимаемой жидкости [5, 6]. Полученная в расчетах длина отрывной зоны  $L_s$  для всех вариантов хорошо соответствует эталонным результатам. При измельчении шага пространственной сетки длина отрывной зоны становится ближе к эталонному решению (табл. 2).

Длина отрывной зоны практически не зависит от числа Маха, когда  $0.01 < Ma < 0.5$ . При дальнейшем уменьшении ( $Ma < 0.01$ ) значительно замедляется

Таблица 2

Длина отрывной зоны  $L_s$  при разных Re

Re	Жидкость	Газ	
	$h_x = 0.05$	$h_x = 0.1$	$h_x = 0.05$
100	5.0	5.1	5.00
200	8.2	8.5	8.35
300	10.1	10.1	9.95
400	14.8	11.3	12.70

скорость сходимости, поскольку время счета обратно пропорционально числу Маха:  $t \sim 1/Ma$ .

Оптимальный диапазон значений для регулирующего параметра составляет  $0.5 < \alpha < 2$ . Этот диапазон соответствует наилучшей точности решения и минимальному числу шагов до сходимости (табл. 1).

В качестве второго примера рассматривалось течение воздушного потока в канале с внезапным сужением. По сравнению с предыдущим случаем изменяется направление течения — газ втекает справа налево, размер области и уступа остаются прежними. Проведены расчеты  $Re = 100$  и  $Re = 400$  при  $Ma = 0.1$  на двух пространственных сетках.

При  $Re = 100, \alpha = 0$  устойчивое решение получить не удастся. При  $\alpha < 0.2$  и  $\alpha > 0.5$  сходимость и устойчивость алгоритма ухудшается. В диапазоне

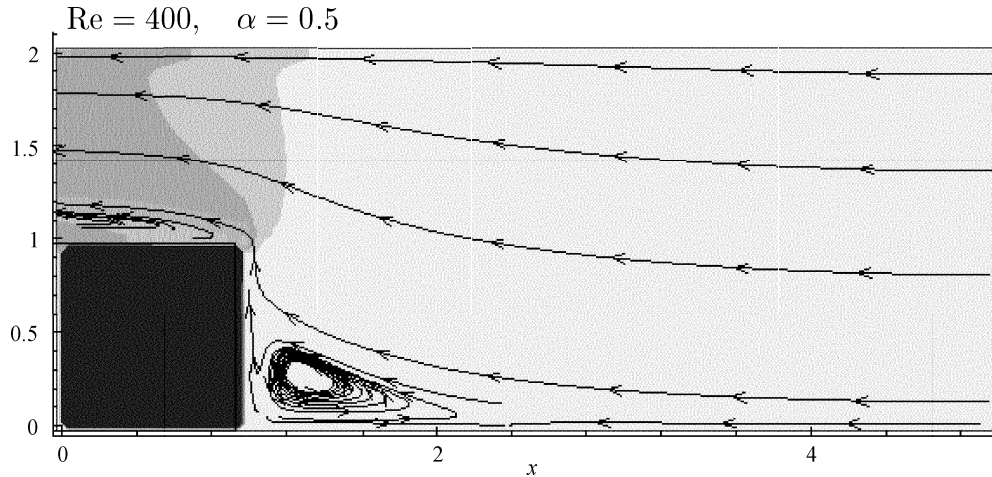


Рис. 2

$0.1 < \alpha < 1.0$  перед передней стенкой цилиндра образуется небольшой вихрь. При числе Рейнольдса  $Re = 400$  образуются два вихря: на торце и на боковой стенке уступа. На рис. 2 приведено распределение плотности и линий тока для варианта  $Re = 400, \alpha = 0.5$ .

При  $\alpha = 0.5$  полученные результаты расчетов для  $Re = 100$  и  $Re = 400$  хорошо согласуются с данными [8], где приведен двумерный расчет ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости в каналах различной формы в  $x, y$ -геометрии. Расчеты выполнены в переменных «функция тока» — «вихрь скорости». На входе задан профиль Пуазейля.

Для  $Re = 100$  оптимальный диапазон составляет  $0.1 < \alpha < 1$ , а для  $Re = 400$  область значений параметра  $\alpha$  сужается до  $0.5 < \alpha < 1$ . Значения  $\alpha > 1$  не исследовались.

### Выводы

В работе построен и протестирован эффективный численный метод расчета дозвуковых течений, основанный на КГД уравнениях. Основными особенностями метода являются способ введения искусственной диссипации, который позволяет рассчитывать тепловые потоки и коэффициент трения без искажений, а также естественный способ задания неотражающих граничных условий на свободных границах, который позволяет избежать применения условий, основанных на характеристиках для уравнений Эйлера.

Для рассмотренных задач параметр регуляризации целесообразно выбирать в диапазоне  $0.5 < \alpha < 1.5$ .

С уменьшением числа Маха скорость сходимости построенного метода замедляется, что является естественным при использовании полных уравнений газовой динамики для расчета дозвуковых течений. Для преодоления этого недостатка существуют специальные методы, например, ЛМ-приближение [9].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 01-01-00061). Авторы благодарны Ю. В. Шеретову за сотрудничество.

### Литература

1. Шеретов Ю.В. // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 2001. С. 191.
2. Елизарова Т.Г., Соколова М.Е. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2004. № 1. С. 10 (Moscow University Phys. Bull. 2004. N 1. P. 12).
3. Ильгамов М.А., Гильманов А.Н. Неотражающие условия на границах расчетной области. М., 2003.
4. Дородницын Л.В. // ЖВМ и МФ. 2002. **42**, № 4. С. 522.
5. Елизарова Т.Г., Калачинская И.С., Шеретов Ю.В., Шильников Е.В. // Сб. Прикладная тематика и информатика. Тр. факультета ВМиК. М., 2003. № 14. С. 85.
6. Armaly B.F., Li A., Nie J.H. // J. of Thermophysics and Heat Transfer. 2002. **16**, N 2. P. 222.
7. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., 1987.
8. R. W. Mei, A Plotkin. // AIAA Paper. 1986. N 86. P. 110.
9. Ланин Ю.В., Стрелец М.Х. Внутреннее течение газовых смесей. М., 1989.

Поступила в редакцию  
13.04.04