

УДК 519.934

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕЛКОЙ ВОДЫ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЙ С ПОДВИЖНОЙ БЕРЕГОВОЙ ЛИНИЕЙ¹⁾

© 2016 г. О. В. Булатов*, Т. Г. Елизарова**

(*119991 Москва, Ленинские горы, МГУ, физич. фак-т;

**125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ РАН)

e-mail: telizar@mail.ru

Поступила в редакцию 06.06.2015 г.
Переработанный вариант 10.08.2015 г.

Численный алгоритм для моделирования течений со свободной поверхностью, основанный на регуляризованных уравнениях мелкой воды, адаптирован для течений, включающих в себя подвижные области сухого дна. Построены варианты алгоритма, обеспечивающие условие хорошей балансировки. Приведены тестовые расчеты течений с зонами сухого дна для задач о набегании жидкости на плоский берег и берег постоянного наклона. Приведен пример моделирования волны цунами. Библ. 32. Фиг. 16.

Ключевые слова: уравнения мелкой воды, регуляризация, метод конечного объема, условие хорошей балансировки, течения с зонами сухого дна, волна цунами.

DOI: 10.7868/S0044466916040050

ВВЕДЕНИЕ

Уравнения гидродинамики в приближении мелкой воды (МВ) широко используются для численного моделирования течений со свободной границей для случаев, когда вертикальной компонентой скорости можно пренебречь (см., например, [1], [2]). К таким течениям относятся, в частности, течения вблизи береговой линии, положение которой может быть переменным из-за наката и отхода жидкости в окрестности берега, что сопровождается формированием так называемых зон сухого дна. В частности, такие задачи возникают при моделировании волн цунами вблизи берега (см. [3]).

В [4] и [5] предложен и изучен новый численный алгоритм решения уравнений мелкой воды. Алгоритм основан на использовании регуляризованных, или сглаженных по малому интервалу времени, уравнений МВ. Полученные уравнения были названы *регуляризованными уравнениями мелкой воды* (РУМВ). Эти уравнения могут рассматриваться также как вариант баротропного приближения квазигазодинамических уравнений, применяемых для численного моделирования течений вязкого сжимаемого газа (см. [6], [7]).

Широкий круг одномерных тестовых задач, рассчитанных на основе регуляризованных уравнений МВ, представлен в [8]. В [9] впервые выполнено численное моделирование экспериментально зафиксированного эффекта формирования уединенной волны в гидроканале с использованием приближения МВ. Уединенная волна в кольцевом канале образуется под действием распределенной ветровой нагрузки. В [10] показано, что численный алгоритм, основанный на регуляризованных уравнениях МВ, позволяет моделировать течения, образующиеся при разрушении плотины над подстилающей поверхностью с уступами и ступеньками дна. Численное моделирование колебаний жидкости в топливном баке ледокольного судна выполнено в [11] для различных вариантов остановки судна при его столкновении с ледовым покрытием и колебаний судна на волнах. В [12] впервые проведено численное моделирование формирования волн Фарадея при вертикальных колебаниях сосуда с жидкостью в приближении МВ. Для моделирования воздействия ускорения сосуда на гидродинамику процесса задачи решались в неинерционных системах координат.

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 13-01-00703-а).

В данной статье метод, основанный на решении регуляризованных уравнений в приближении МВ, обобщается для численного моделирования течений с подвижной границей, обусловленной формированием областей с сухим дном. Приведены варианты алгоритма, обеспечивающие условие хорошей балансировки. Построенный алгоритм тестируется на двух задачах Римана с образованием зон сухого дна для плоской подстилающей поверхности и двух задачах о набегаии воды на берег с постоянным наклоном. В заключение приведены результаты численного моделирования задачи о набегаии волны цунами на берег сложной формы.

1. РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Уравнения гидродинамики в приближении мелкой воды в форме законов сохранения массы и импульса можно записать в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial u_x h}{\partial x} + \frac{\partial u_y h}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial h u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h u_x^2 + \frac{1}{2} g h^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (h u_x u_y) = h f_x - g h \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{xx}^{NS}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yx}^{NS}}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial h u_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h u_x u_y) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h u_y^2 + \frac{1}{2} g h^2 \right) = h f_y - g h \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{xy}^{NS}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yy}^{NS}}{\partial y}. \quad (3)$$

Здесь компоненты тензора деформаций имеют вид

$$\Pi_{xx}^{NS} = \nu h \left(2 \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{u} \right), \quad \Pi_{yy}^{NS} = \nu h \left(2 \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{u} \right), \quad (4)$$

$$\Pi_{xy}^{NS} = \Pi_{yx}^{NS} = \nu h \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}. \quad (5)$$

Неизвестными величинами в системе (1)–(3) являются уровень жидкости $h(x, y, t)$, который измеряется от заданного профиля дна $b(x, y)$, и компоненты горизонтальной скорости $u_x(x, y, t)$ и $u_y(x, y, t)$. Здесь g – ускорение свободного падения, ν – коэффициент кинематической вязкости и f_x, f_y – компоненты внешних сил.

Согласно [4], [5], регуляризованные уравнения МВ (1)–(3) имеют вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx}}{\partial x} + \frac{\partial j_{my}}{\partial y} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial h u_x}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx} u_x}{\partial x} + \frac{\partial j_{my} u_x}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g h^2}{2} \right) = h^* \left(f_x - g \frac{\partial b}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yx}}{\partial y}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial h u_y}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx} u_y}{\partial x} + \frac{\partial j_{my} u_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{g h^2}{2} \right) = h^* \left(f_y - g \frac{\partial b}{\partial y} \right) + \frac{\partial \Pi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yy}}{\partial y}, \quad (8)$$

где

$$h^* = h - \tau \left(\frac{\partial h u_x}{\partial x} + \frac{\partial h u_y}{\partial y} \right). \quad (9)$$

Компоненты плотности потока массы вычисляются как

$$j_{mx} = h(u_x - w_x), \quad j_{my} = h(u_y - w_y), \quad (10)$$

где

$$w_x = \frac{\tau}{h} \left(\frac{\partial (h u_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial (h u_x u_y)}{\partial y} + g h \frac{\partial (h + b)}{\partial x} - h f_x \right), \quad (11)$$

$$w_y = \frac{\tau}{h} \left(\frac{\partial(hu_x u_y)}{\partial x} + \frac{\partial(hu_y^2)}{\partial y} + gh \frac{\partial(h+b)}{\partial y} - hf_y \right). \quad (12)$$

В отличие от представления из [4], [5] и по аналогии с соответствующими выражениями для квазигазодинамических уравнений из [6], [7], выражения Π_{ij} здесь представлены в компактном и удобном для численной реализации виде:

$$\begin{aligned} \Pi_{xx} &= u_x w_x^* + R^* + \Pi_{xx}^{NS}, & \Pi_{yx} &= u_y w_x^* + \Pi_{yx}^{NS}, \\ \Pi_{xy} &= u_x w_y^* + \Pi_{xy}^{NS}, & \Pi_{yy} &= u_y w_y^* + R^* + \Pi_{yy}^{NS}. \end{aligned} \quad (13)$$

Величины w_x^* , w_y^* и R^* обозначают следующие выражения:

$$\begin{aligned} w_x^* &= \tau h \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + g \frac{\partial(h+b)}{\partial x} - f_x \right), \\ w_y^* &= \tau h \left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + g \frac{\partial(h+b)}{\partial y} - f_y \right), \\ R^* &= g \tau h \left(u_x \frac{\partial h}{\partial x} + u_y \frac{\partial h}{\partial y} + h \operatorname{div} \mathbf{u} \right). \end{aligned}$$

Тензор Π_{ij} оказывается несимметричным, но симметричной остается величина $\Lambda_{ij} = u_j j_{m,i} - \Pi_{ij} + \delta_{ij} \frac{1}{2} gh^2$, которая позволяет представить уравнения движения в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial h u_x}{\partial t} + \frac{\partial \Lambda_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Lambda_{yx}}{\partial y} h^* \left(f_x - g \frac{\partial b}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial h u_y}{\partial t} + \frac{\partial \Lambda_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Lambda_{yy}}{\partial y} h^* \left(f_y - g \frac{\partial b}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

В приведенных выражениях малая величина τ является параметром регуляризации или временного сглаживания и имеет размерность времени. Слагаемые с коэффициентом τ представляют собой регуляризующие добавки к уравнениям мелкой воды (1)–(3). При $\tau = 0$ регуляризованные уравнения (6)–(8) принимают вид классических уравнений МВ.

Уравнение (6) включает в себя пространственные производные второго порядка, что приводит к специальному граничному условию при постановке начально-краевой задачи для регуляризованных уравнений МВ. В частности, условие непротекания для системы (6)–(8) имеет вид $\mathbf{j}_m = 0$, что в декартовых координатах в соответствии с выражениями (10)–(12) и в зависимости от положения границы записывается как

$$u_x = 0, \quad g \frac{\partial}{\partial x} (h+b) = f_x$$

или

$$u_y = 0, \quad g \frac{\partial}{\partial y} (h+b) = f_y.$$

Для регуляризованных уравнений МВ выведено уравнение баланса специфической энтропии и установлен факт ее неубывания. Тем самым показано, что τ -добавки носят диссипативный характер (см. [13], [14] и [15]). Построена линеаризованная система регуляризованных уравнений МВ. Для нее получены энергетические соотношения и доказаны теоремы об асимптотической устойчивости равновесного решения и единственности классического решения (см. [16]). Получены необходимые и достаточные условия неравномерной и равномерной параболичности регуляризованных уравнений по Петровскому. В [14] и [15], [16] изучались свойства точных решений регуляризованных уравнений и их соотношения с точными решениями исходных уравнений как для баротропных уравнений газовой динамики, так и для приближения мелкой воды. Предложен метод построения общих точных решений классических и регуляризованных уравнений МВ в форме Сен-Венана в стационарном случае. Показано, что справедливо следующее

утверждение: если функции $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$ и $h(x, y)$ являются решением стационарных уравнений мелкой воды, то они также являются решением стационарных регуляризованных уравнений.

В частности, для системы регуляризованных уравнений так же, как и для исходной системы (1)–(3), выполняется так называемое условие покоящейся жидкости: т.е. для покоящейся в начальный момент времени жидкости $u_x = u_y = 0$ в отсутствие внешних сил $f_x = f_y = 0$ в любой последующий момент времени уровень поверхности жидкости остается постоянным:

$$\xi(x, y) = h(x, y) + b(x, y) = \xi_0 = \text{const.} \quad (14)$$

Выражение (14) является точным решением систем уравнений (1)–(3) и (6)–(8) в указанном случае.

Таким образом, регуляризованные уравнения МВ можно рассматривать как расширение классической системы уравнений МВ.

2. ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ

Построим конечно-разностную аппроксимацию регуляризованных уравнений МВ в декартовой системе координат. Пусть все искомые переменные заданы в узлах сетки. Соответствующий шаблон для прямоугольной пространственной сетки показан на фиг. 1. Выберем переменную h для демонстрации расчетных формул.

Определим значения в центрах ячеек как среднее арифметическое от значений в соседних узлах, например:

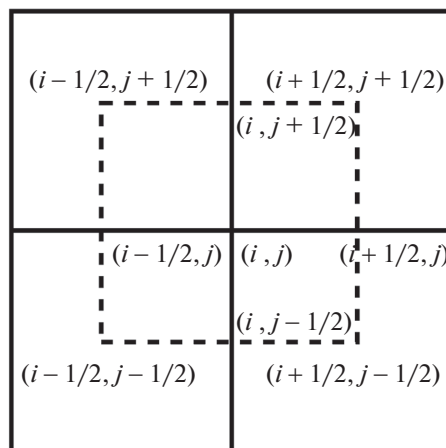
$$h_{i+1/2, j+1/2} = 0.25(h_{i, j} + h_{i+1, j} + h_{i, j+1} + h_{i+1, j+1}).$$

Значения переменных на ребре вычисляются как среднее значение в точках, которые это ребро соединяют:

$$h_{i\pm 1/2, j} = 0.5(h_{i, j} + h_{i\pm 1, j}), \quad h_{i, j\pm 1/2} = 0.5(h_{i, j} + h_{i, j\pm 1}).$$

Аналогичная аппроксимация используется для компонент скоростей u_x , u_y и переменного параметра τ . Значения уровня дна $b(x, y)$ являются известной функцией. Тем не менее значения этой функции в полущелых точках следует определять так же, как и значения величин h и скорости, т.е. по приведенным выше формулам.

Для аппроксимации потоковых величин j_{mx} и j_{my} определим их значения в полущелых точках на ребрах. Здесь и далее для удобства использован верхний индекс для обозначения x - и y -компонент. Таким образом, требуется определить значения $w_{i+1/2, j}^x, w_{i-1/2, j}^x$ и $w_{i, j+1/2}^y, w_{i, j-1/2}^y$. В соответ-



Фиг. 1. Вычислительный шаблон для прямоугольной пространственной сетки.

ствующие выражения входят производные, которые будем аппроксимировать центральными разностями. Например, приведем выражение для $w_{i+1/2,j}^x$ и $w_{i-1/2,j}^x$:

$$w_{i+1/2,j}^x = \frac{\tau_{i+1/2,j}}{h_{i+1/2,j}} \left(\frac{h_{i+1,j}u_{i+1,j}^x u_{i+1,j}^x - h_{i,j}u_{i,j}^x u_{i,j}^x}{\Delta x} + \frac{h_{i+1/2,j+1/2}u_{i+1/2,j+1/2}^y u_{i+1/2,j+1/2}^y - h_{i+1/2,j-1/2}u_{i+1/2,j-1/2}^y u_{i+1/2,j-1/2}^y}{\Delta y} + \frac{gh_{i+1/2,j}}{\Delta x} (h_{i+1,j} - h_{i,j} + b_{i+1,j} - b_{i,j}) - h_{i+1/2,j}f_{i+1/2,j}^x \right),$$

$$w_{i-1/2,j}^x = \frac{\tau_{i-1/2,j}}{h_{i-1/2,j}} \left(\frac{h_{i,j}u_{i,j}^x u_{i,j}^x - h_{i-1,j}u_{i-1,j}^x u_{i-1,j}^x}{\Delta x} + \frac{h_{i-1/2,j+1/2}u_{i-1/2,j+1/2}^y u_{i-1/2,j+1/2}^y - h_{i-1/2,j-1/2}u_{i-1/2,j-1/2}^y u_{i-1/2,j-1/2}^y}{\Delta y} + \frac{gh_{i-1/2,j}}{\Delta x} (h_{i,j} - h_{i-1,j} + b_{i,j} - b_{i-1,j}) - h_{i-1/2,j}f_{i-1/2,j}^x \right).$$

Аналогично аппроксимируются величины $w_{i,j+1/2}^y$ и $w_{i,j-1/2}^y$.

Используя интегро-интерполяционный метод для аппроксимации уравнения (6), построим явную по времени разностную схему его решения:

$$\hat{h}_{i,j} = h_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (j_{i+1/2,j}^x - j_{i-1/2,j}^x) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (j_{i,j+1/2}^y - j_{i,j-1/2}^y), \tag{15}$$

где Δt – шаг разностной схемы по времени, Δx и Δy – шаги разностной сетки по пространственным переменным x и y , $\hat{h}_{i,j}$ – значение переменной $h_{i,j}$ на верхнем временном слое.

Для аппроксимации тензора Π_{ij} используем вид (13) и аппроксимируем центральными разностями выражения, входящие в w_x^* , w_y^* и R^* . Все необходимые разностные формулы выписываются аналогично вышеизложенным исходя из шаблона, представленного на фиг. 1. Значения \hat{u}_x и \hat{u}_y на следующем временном слое вычисляются согласно разностным формулам

$$\begin{aligned} \hat{h}\hat{u}_x = hu_x + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\Pi_{i+1/2,j}^{xx} - \Pi_{i-1/2,j}^{xx}) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1/2,j}^x j_{i+1/2,j}^x - u_{i-1/2,j}^x j_{i-1/2,j}^x) - \\ - 0.5g \frac{\Delta t}{\Delta x} (h_{i+1/2,j}^2 - h_{i-1/2,j}^2) + \frac{\Delta t}{\Delta y} (\Pi_{i,j+1/2}^{yx} - \Pi_{i,j-1/2}^{yx}) - \\ - \frac{\Delta t}{\Delta y} (u_{i,j+1/2}^x j_{i,j+1/2}^y - u_{i,j-1/2}^x j_{i,j-1/2}^y) + \Delta t h_{i,j}^{*(x)} \left(f_{i,j}^x - g \frac{b_{i+1/2,j} - b_{i-1/2,j}}{\Delta x} \right), \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \hat{h}\hat{u}_y = hu_y + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\Pi_{i+1/2,j}^{xy} - \Pi_{i-1/2,j}^{xy}) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1/2,j}^y j_{i+1/2,j}^x - u_{i-1/2,j}^y j_{i-1/2,j}^x) + \\ + \frac{\Delta t}{\Delta y} (\Pi_{i,j+1/2}^{yy} - \Pi_{i,j-1/2}^{yy}) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (u_{i,j+1/2}^y j_{i,j+1/2}^y - u_{i,j-1/2}^y j_{i,j-1/2}^y) - \\ - 0.5g \frac{\Delta t}{\Delta y} (h_{i,j+1/2}^2 - h_{i,j-1/2}^2) + \Delta t h_{i,j}^{*(y)} \left(f_{i,j}^y - g \frac{b_{i,j+1/2} - b_{i,j-1/2}}{\Delta y} \right). \end{aligned} \tag{17}$$

Отдельно выпишем выражения для $h_{i,j}^{*(x)}$ и $h_{i,j}^{*(y)}$:

$$h_{i,j}^{*(x)} = h_{i,j}^x - \tau_{i,j} \left(\frac{h_{i+1/2,j}u_{i+1/2,j}^x - h_{i-1/2,j}u_{i-1/2,j}^x}{\Delta x} + \frac{h_{i,j+1/2}u_{i,j+1/2}^y - h_{i,j-1/2}u_{i,j-1/2}^y}{\Delta y} \right), \tag{18}$$

$$h_{i,j}^{*(y)} = h_{i,j}^y - \tau_{i,j} \left(\frac{h_{i+1/2,j} u_{i+1/2,j}^x - h_{i-1/2,j} u_{i-1/2,j}^x}{\Delta x} + \frac{h_{i,j+1/2} u_{i,j+1/2}^y - h_{i,j-1/2} u_{i,j-1/2}^y}{\Delta y} \right). \quad (19)$$

Выбор параметра регуляризации определяется соотношением

$$\tau = \alpha \frac{\Delta x + \Delta y}{2\sqrt{gh}}, \quad (20)$$

где $0 < \alpha < 1$ – численный коэффициент, выбираемый исходя из требований устойчивости и точности алгоритма. В качестве характерной скорости выбрана скорость распространения длинных волн $c = \sqrt{gh}$.

В задачах в приближении МВ коэффициент кинематической вязкости жидкости ν , как правило, является очень малым. Тем не менее, как показывает практика расчетов, для течений с большими числами Фруда слагаемые Π^{NS} удобно рассматривать как искусственные регуляризаторы и связывать коэффициент ν с величиной τ в виде (см. [17])

$$\nu = \frac{gh^2}{2} \tau.$$

В приведенных далее расчетах полагается $\nu = 0$.

Условие устойчивости построенной явной разностной схемы выбирается согласно условию Куранта на шаг по времени

$$\Delta t = \beta \left(\frac{\Delta x + \Delta y}{2\sqrt{gh}} \right)_{\min}. \quad (21)$$

В [16] методом энергетических неравенств в линейном приближении получено достаточное условие устойчивости явной по времени разностной схемы решения регуляризованных уравнений, совпадающее с условием Куранта.

Очевидно, что использование условия (20) понижает порядок построенной выше разностной схемы и делает ее схемой первого порядка точности. Однако, как показала практика применения аналогичных схем для решения задач газовой динамики и вязкой несжимаемой жидкости, эти схемы имеют целый ряд положительных качеств при расчете нестационарных течений с большими градиентами.

Применительно к уравнениям МВ на примере расчетов течений в рамках одномерных уравнений Сен-Венана для ряда задач о распаде разрыва в [17] показано, что описанный выше численный метод оказывается более точным, чем схема Лакса–Фридрихса.

Выписанный здесь алгоритм естественным образом обобщается на случай неравномерных пространственных сеток. Построение соответствующих разностных схем для неструктурированных треугольных сеток и их тестирование изложено в [18]. В [19] построены регуляризованные уравнения МВ и соответствующие разностные схемы для уравнений, записанных в полярной системе координат.

3. УСЛОВИЕ ПОКОЯЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Для многих задач необходимо, чтобы разностный алгоритм не нарушал условия гидростатического равновесия, или условия покоящейся жидкости. В англоязычной литературе такой численный алгоритм называют *well-balanced scheme* (см., например, [20] и [21]). Указанное условие означает, что в отсутствие внешних сил для изначально покоящейся жидкости в численном решении не должны появляться нефизичные возмущения, обусловленные разностной аппроксимацией неровностей дна.

Для проверки выполнения условия хорошей балансировки подставим равновесное решение $u_{i,j}^x = u_{i,j}^y = 0$ и $h_{i,j} + b_{i,j} = \text{const}$ в разностный алгоритм (15)–(17) и убедимся в тождественном выполнении разностных уравнений на этом решении. Действительно, разностные аналоги потоков (10)–(11) в уравнении (15) обращаются в ноль в силу соотношений вида

$$w_{i-1/2,j}^x = \frac{gh_{i-1/2,j}}{\Delta x} (h_{i,j} - h_{i-1,j} + b_{i,j} - b_{i-1,j}) = 0,$$

$$w_{i,j-1/2}^y = \frac{gh_{i,j-1/2}}{\Delta y} (h_{i,j} - h_{i,j-1} + b_{i,j} - b_{i,j-1}) = 0,$$

которые обеспечиваются условиями покоящейся жидкости в дискретном виде по направлениям x и y :

$$h_{i,j} + b_{i,j} = h_{i-1,j} + b_{i-1,j} = \text{const}, \quad h_{i,j} + b_{i,j} = h_{i,j-1} + b_{i,j-1} = \text{const}.$$

Разностные аналоги уравнений движения (16)–(17) принимают вид

$$0 = -g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(0.5 (h_{i+1/2,j}^2 - h_{i-1/2,j}^2) + h_{i,j}^{*(x)} (b_{i+1/2,j} - b_{i-1/2,j}) \right), \quad (22)$$

$$0 = -g \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(0.5 (h_{i,j+1/2}^2 - h_{i,j-1/2}^2) + h_{i,j}^{*(y)} (b_{i,j+1/2} - b_{i,j-1/2}) \right). \quad (23)$$

Если в выражениях (18) и (19) использовать разностную аппроксимацию для $h_{i,j}^x$ и $h_{i,j}^y$ в виде средних значений по двум соседним полуцелым точкам на соответствующих осях x и y

$$h_{i,j}^x = 0.5 (h_{i+1/2,j} + h_{i-1/2,j}), \quad (24)$$

$$h_{i,j}^y = 0.5 (h_{i,j+1/2} + h_{i,j-1/2}), \quad (25)$$

то соотношения (22) и (23) будут выполняться тождественно на равновесном решении (14), вычисленном в полуцелых точках:

$$h_{i+1/2,j} + b_{i+1/2,j} = h_{i-1/2,j} + b_{i-1/2,j}, \quad (26)$$

$$h_{i,j+1/2} + b_{i,j+1/2} = h_{i,j-1/2} + b_{i,j-1/2}. \quad (27)$$

Таким образом, построенная выше разностная схема обладает свойством хорошей балансировки. Это свойство важно для численного моделирования медленных течений, на которые не должны влиять нефизичные возмущения, вызванные разностной аппроксимацией неровностей подстилающей поверхности. В случае сильно нестационарных интенсивных течений, когда такие возмущения не существенны, достаточно использовать более простую аппроксимацию

$$h_{i,j}^x = h_{i,j}^y = h_{i,j}. \quad (28)$$

Построение сбалансированных разностных схем для алгоритмов высокого порядка точности представляет существенные трудности, см., например, [21]. Для предложенного авторами алгоритма условие хорошей балансировки реализуется достаточно просто, поскольку включенная в него адаптивная τ -диссипация обращается в ноль на стационарных равновесных решениях. В [21] построены новые варианты консервативных пространственных дискретизаций для системы квазигазодинамических уравнений в баротропном приближении с учетом внешних сил, которые помимо выполнения законов сохранения энергии обладают свойством хорошей балансировки. Частным случаем таких дискретизаций является описанная выше разностная схема.

В [4] и [5] приведен сбалансированный алгоритм решения уравнений МВ для одномерных плоских течений и впервые выписана формула (24) для одномерного случая. В [18] формулы для $h_{i,j}^{*(x)}$, $h_{i,j}^{*(y)}$ (24), (25) обобщены для аппроксимации регуляризованных уравнений МВ на неструктурированных сетках. В [19] для течения вращающейся жидкости показано, что на равновесном решении точность несбалансированной разностной схемы составляет $\sim 10^{-3}$, а при введении условия балансировки точность возрастает до $\sim 10^{-13} - 10^{-14}$. Эти расчеты проведены в полярной системе координат.

4. ПОДВИЖНАЯ ГРАНИЦА С СУХИМ ДНОМ

Во многих практических задачах, связанных, например, с численным моделированием разливов рек, наводнений, обрушением волн цунами на прибрежную территорию, и целым рядом других, требуется определять границы областей сухого дна. В этих зонах уровень жидкости считается нулевым $h(x, y) = 0$. Для описания таких сухих областей в различных численных алгоритмах решения уравнений мелкой воды используются разные подходы (см., например, [21] или [23], [24]).

Для алгоритма, основанного на регуляризованных уравнениях МВ, авторы остановились на широко используемом методе, изложенном, например, в [23].

В соответствии с этим подходом предполагаем, что в области сухого дна жидкость покоится. Поэтому в численном алгоритме при вычислении глубины жидкости ставится условие, чтобы для малых $h_{i,j}$ скорость течения была равна нулю $u_{i,j} = 0$, т.е.

$$\begin{aligned} \hat{u}_{i,j} &= h_{i,j} u_{i,j} / \hat{h}_{i,j}, & h_{i,j} > \varepsilon_{i,j}, \\ \hat{u}_{i,j} &= 0, & h_{i,j} < \varepsilon_{i,j}, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\varepsilon_{i,j}$ – параметр отсечения, выбор которого определяется решаемой задачей.

В отличие от [23], в численном алгоритме, основанном на регуляризованных уравнениях МВ, фигурирует параметр τ , который входит во все регуляризующие добавки. Ставим такое же ограничение для τ при малых h :

$$\begin{aligned} \tau_{i,j} &= \alpha \frac{\Delta x + \Delta y}{2\sqrt{gh_{i,j}}}, & h_{i,j} > \varepsilon_{i,j}, \\ \tau_{i,j} &= 0, & h_{i,j} < \varepsilon_{i,j}. \end{aligned} \quad (30)$$

В случае, когда задан профиль подстилающей поверхности $b(x, y) \neq \text{const}$ и градиент величины $b(x, y)$ ограничен, параметр ε удобно связать с наклоном подстилающей поверхности соотношением вида

$$\varepsilon > \Delta x \left| \frac{\partial b}{\partial x} \right|, \quad (31)$$

т.е. параметр отсечения является переменной величиной и зависит от формы подстилающей поверхности и выбранной пространственной сетки. В случае прямоугольной или неструктурированной сетки разностный аналог условия (31) представим в виде

$$\varepsilon_{i,j} > \max_{(m,k) \in \text{шаблон}} (b_{m,k} - b_{i,j}).$$

В частности, для двумерной прямоугольной сетки это условие удобно записать как

$$\varepsilon_{i,j} = \varepsilon_0 \max((b_{i+1,j} - b_{i,j}), (b_{i-1,j} - b_{i,j}), (b_{i,j+1} - b_{i,j}), (b_{i,j-1} - b_{i,j})), \quad (32)$$

где ε_0 – настроечный параметр.

5. ЗАДАЧА О РАЗРУШЕНИИ ПЛОТИНЫ В ЗОНУ СУХОГО ДНА

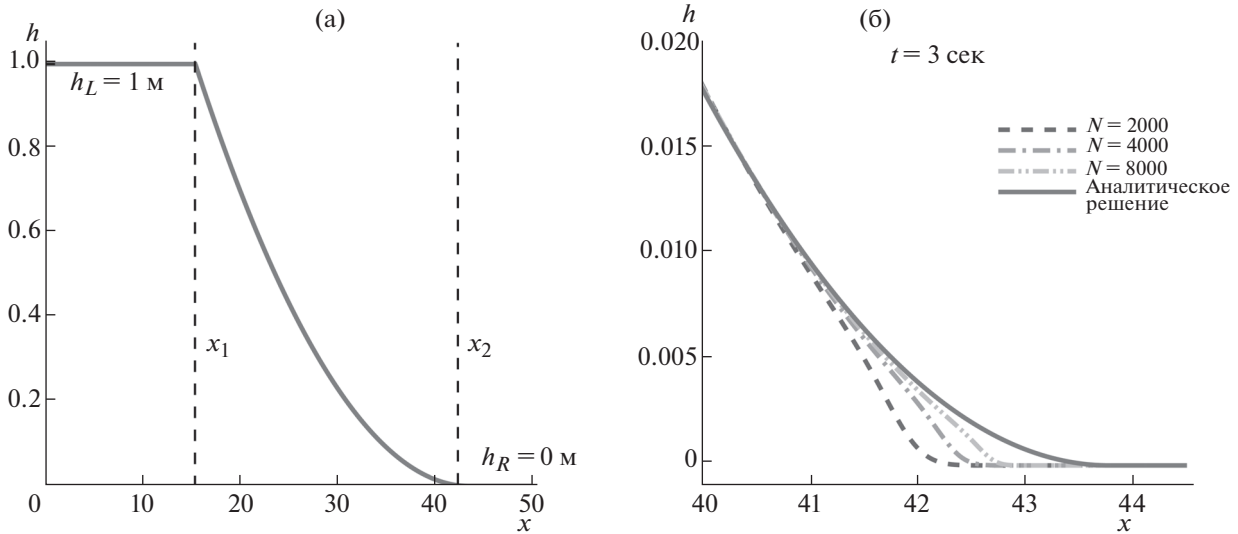
Рассмотрим задачу о распаде одномерного разрыва, моделирующую течение, связанную с распространением волны прорыва в область с сухим дном, т.е. в зону с $h = 0$. Пусть размер области составляет $[0, 50]$ м, в центре области в точке с координатой $x = 25$ м расположен разрыв. В начальный момент времени жидкость покоится, и скорости слева и справа от разрыва равны нулю ($u_L = 0$ м/сек, $u_R = 0$ м/сек). В левой области высота уровня жидкости $h_L = 1.0$ м, справа – сухое дно $h_R = 0$ м.

На основе общего решения задачи о распаде разрыва (см. [25], [26]) аналитическое решение для данной задачи Римана выписывается в виде

$$h(x), \quad u(x) = \begin{cases} h = h_L, & u = 0, & x < x_1 = -t\sqrt{gh_L}, \\ h = \frac{1}{9g} \left(2\sqrt{gh_L} - \frac{x}{t} \right)^2, & u = \frac{2}{3} \left(\sqrt{gh_L} + \frac{x}{t} \right), & x_1 < x < x_2 = 2t\sqrt{gh_L}, \\ h = h_R, & u = 0, & x_2 < x. \end{cases}$$

Из приведенного решения определяется скорость движения береговой точки на границе с сухим дном $x_2 = 2t\sqrt{gh_L}$. Заметим, что в численном расчете мы не можем определить точное расположение береговой точки, так как условие для сухого дна убирают из рассмотрения область, в которой $h < \varepsilon$.

Расчет ведется до момента времени $t = 5$ сек на четырех сгущающихся сетках $\Delta x = 0.05$ м с числом точек по пространству ($N = 1000$), $\Delta x = 0.025$ м ($N = 2000$), $\Delta x = 0.0125$ м ($N = 4000$), $\Delta x = 0.00625$ м ($N = 8000$). Остальные параметры расчета имеют следующие значения: параметр регуляризации $\alpha = 0.2$, число Куранта $\beta = 0.1$, параметр отсечения $\varepsilon = 0.0001$ м. При увеличении



Фиг. 2. Высота уровня жидкости h в задаче о распаде разрыва. (а) – автомодельное решение, (б) – сходимость по сетке. Фрагмент на отрезке $[40, 44.5]$ на момент времени $t = 3$ сек при $\varepsilon = 0.0001$, $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.1$.

$\varepsilon = 0.001$ м результаты расчета вблизи береговой точки становятся менее точными. При уменьшении $\varepsilon = 0.00001$ м для проведения устойчивого счета требуется уменьшать шаг по времени и, соответственно, число Куранта β до 0.01. Понижение устойчивости алгоритма обусловлено резким увеличением числа Фруда $Fr = u/\sqrt{gh}$ вблизи областей с сухим дном.

Общий вид решения и сходимость численного решения к аналитическому приведены на фиг. 2. На фиг. 2а – автомодельное решение, на фиг. 2б представлена сходимость по сетке на фрагменте на отрезке $[40, 44.5]$ на момент времени $t = 3$ сек при $\varepsilon = 0.0001$, $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.1$. Видно, что численное решение совпадает с аналитическим на всем протяжении графиков, и заметное отличие видно только на границе с сухим дном. Из графиков следует, что уменьшение шага сетки повышает точность численного расчета. Влияние величины α на точность определения береговой точки оказывается незначительным.

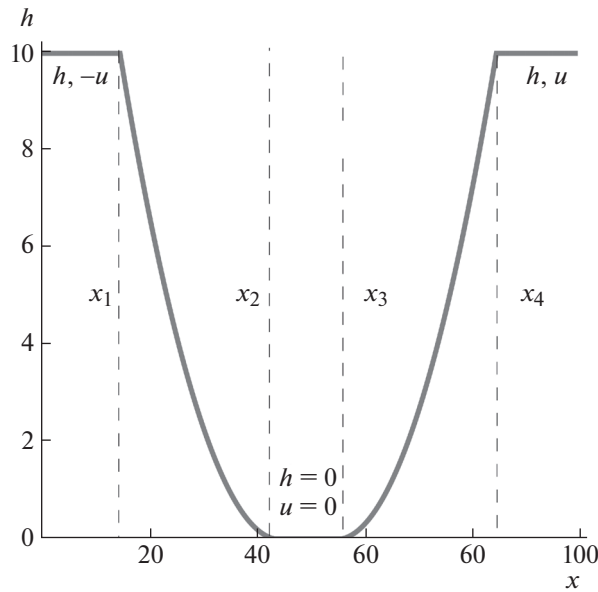
На положение береговой линии оказывает влияние выбор величины ε . Из-за наличия численных погрешностей величина ε не может быть нулевой. При нулевом значении ε любое численное возмущение для задач, в которых есть сухие области $h = 0$, приводит к отрицательным значениям h . С физической точки зрения, например при рассмотрении течения глубиной 10 м, мы пренебрегаем движением жидкости в слое толщиной соответственно 10 см ($\varepsilon = 0.1$ м) или 1 см ($\varepsilon = 0.01$ м). Параметр ε следует выбирать согласно целесообразности в каждой отдельной задаче. Например, если требуется моделировать набегание 10-метровой волны на берег, то мы можем пренебречь движением жидкости в 1 см слое вблизи сухого дна.

В задаче об одномерном разрыве с сухим дном жидкость натекает на сухую область. Более сложной является задача, где жидкость стекает с поверхности, образуя сухую область. Такая задача рассмотрена в следующем разделе.

6. ЗАДАЧА РИМАНА О РАЗБЕГАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим задачу Римана с разбегающейся в разные стороны жидкостью (см. [22]). Пусть задана область $[0, 100]$ м. В центре отрезка $x = 25$ м расположен разрыв. В начальный момент времени высота уровня жидкости везде постоянна ($h_L = h_R = 10$ м), но скорости противоположны ($u_R = -u_L = 15$ м/сек). На фиг. 3 схематически изображено автомодельное решение рассматриваемой задачи. Здесь точки x_2 и x_3 движутся в противоположных направлениях.

В области $[x_2, x_3]$ будет появляться сухое дно только в случае выполнения условия $u_R > 2\sqrt{gh_R}$. Отметим, что в точках x_2 и x_3 расположен разрыв для скорости u . Аналитическое решение состо-



Фиг. 3. Автомоделное решение в задаче о разбегающейся жидкости. В области $[x_2, x_3]$ образуется сухое дно. Точки x_2, x_3 движутся в противоположных направлениях.

ит из двух волн разрежения и области с сухим дном. На отрезке $[x_1, x_2]$ волна разрежения описывается автомоделным решением (см. [25], [26])

$$\frac{3}{2}u = c_1 + \frac{x}{t}, \quad 3\sqrt{gh} = 2c_1 - \frac{x}{t}.$$

Аналогичным образом в области $[x_3, x_4]$ решение описывается функциями

$$\frac{3}{2}u = c_2 + \frac{x}{t}, \quad 3\sqrt{gh} = \frac{x}{t} - 2c_2.$$

Из начальных условий находим константы c_1 и c_2 :

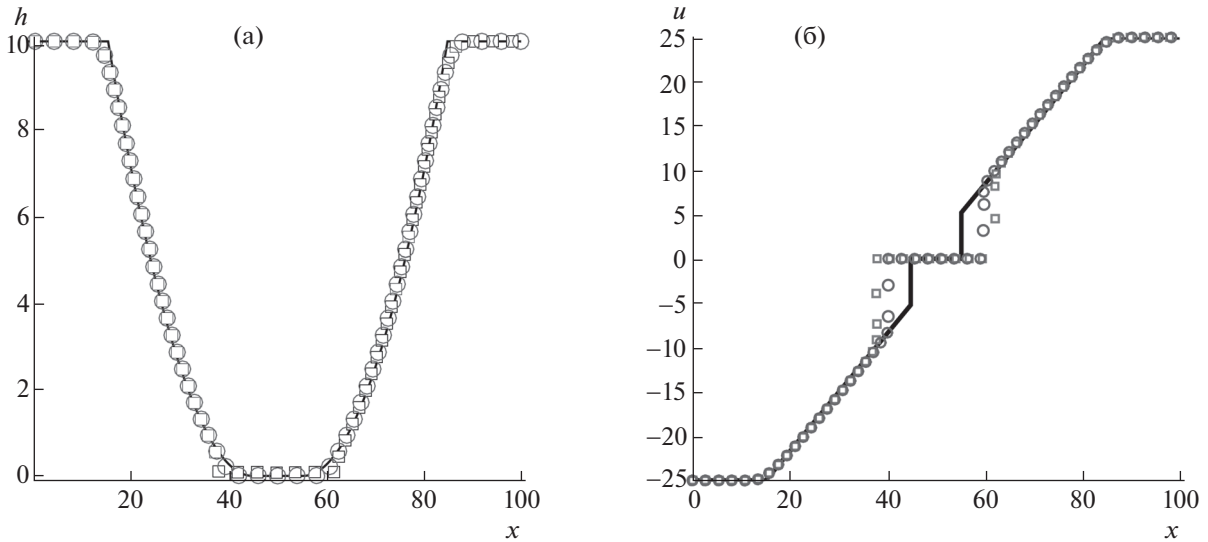
$$c_1 = -\frac{u_R}{2} + \sqrt{gh_R}, \quad c_2 = \frac{u_R}{2} - \sqrt{gh_R}.$$

Запишем аналитическое решение для данной задачи:

$$h(x), \quad u(x) = \begin{cases} h = h_R, & u = -u_R, & x < x_1 = -t(u_R + \sqrt{gh_R}), \\ h = \frac{1}{9g} \left(2c_1 - \frac{x}{t}\right)^2, & u = \frac{2}{3} \left(c_1 + \frac{x}{t}\right), & x_1 < x < x_2 = -t(u_R - 2\sqrt{gh_R}), \\ h = 0, & u = 0, & x_2 < x < x_3 = t(u_R - 2\sqrt{gh_R}), \\ h = \frac{1}{9g} \left(2c_2 - \frac{x}{t}\right)^2, & u = \frac{2}{3} \left(c_2 + \frac{x}{t}\right), & x_3 < x < x_4 = t(u_R + \sqrt{gh_R}), \\ h = h_R, & u = u_R, & x_4 < x. \end{cases}$$

Численный расчет задачи ведется до времени $t = 2$ сек, параметр регуляризации $\alpha = 0.5$, число Куранта $\beta = 0.01$. Шаг сетки составил $\Delta x = 0.025$ м ($N = 2000$). Расчеты проведены для двух параметров отсечения $\varepsilon = 0.1$ м и $\varepsilon = 0.01$ м, чтобы показать влияние выбора ε на результаты численного расчета.

На фиг. 4а показано распределение высоты уровня жидкости для момента времени $t = 1$ сек. Аналитическое решение обозначено сплошной линией. Квадратиками обозначено численное решение, полученное для параметра отсечения $\varepsilon = 10$ см, окружности соответствуют $\varepsilon = 1$ см. Видно, что почти на всем протяжении численное и аналитическое решения хорошо согласуются.



Фиг. 4. Уровень жидкости и скорость на момент времени $t_{\text{out}} = 1$ сек. Сплошная линия – точное решение, квадратные символы – расчет с параметром отсечения $\epsilon = 10$ см, окружности – расчет $\epsilon = 1$ см.

На фиг. 4б показано распределение скорости в момент времени $t = 1$ сек. Видно, что уменьшение параметра отсечения ϵ уточняет положение границы жидкости с сухой областью.

7. ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ВОЛНА В ОБЛАСТИ С ДНОМ ПОСТОЯННОГО НАКЛОНА. СРАВНЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО И ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ

В качестве тестовой данная задача рассматривалась, например, в [27], где проведено сравнение численного решения с известным точным решением периодической волны Кэри и Гринспана (Carrier and Greenspan) (см. [28]). Это решение применяют для проверки способности численного алгоритма моделировать набегание и сбегание волны с наклонного берега. В частности, оно позволяет верифицировать постановку граничного условия для “береговой линии”.

Согласно [29], аналитическое решение этой задачи удобно записать с помощью безразмерных переменных

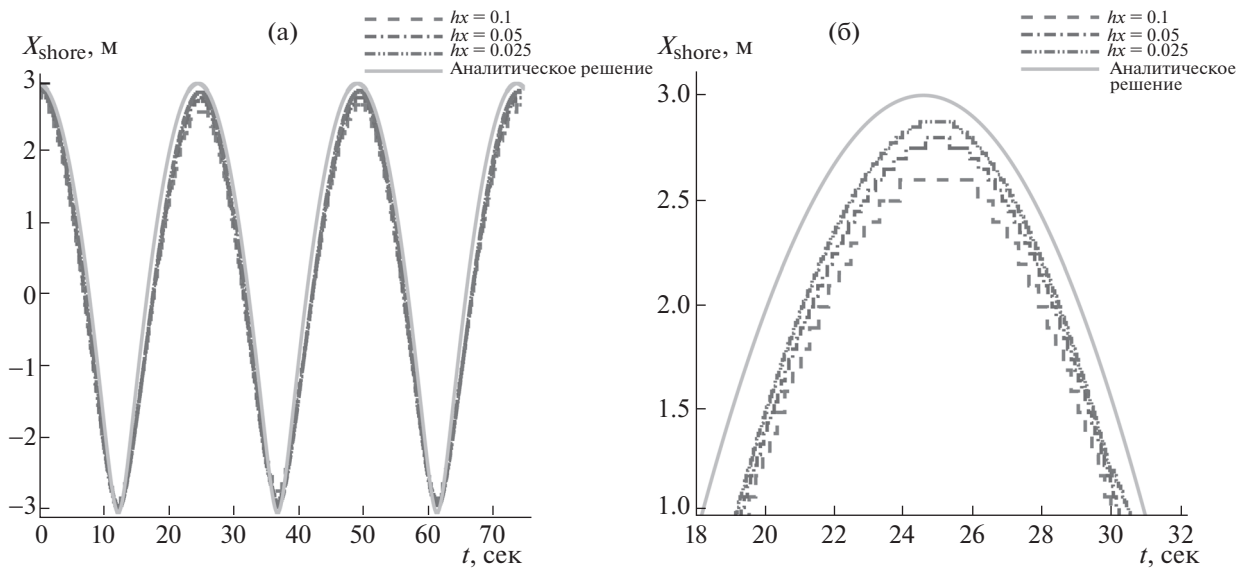
$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x/L, & \tilde{u} &= u/\sqrt{g \operatorname{tg} \gamma L}, \\ \tilde{\xi} &= \xi/\operatorname{tg} \gamma L, & \tilde{t} &= t/\sqrt{L/(g \operatorname{tg} \gamma)}. \end{aligned}$$

Решение записывается в неявном виде:

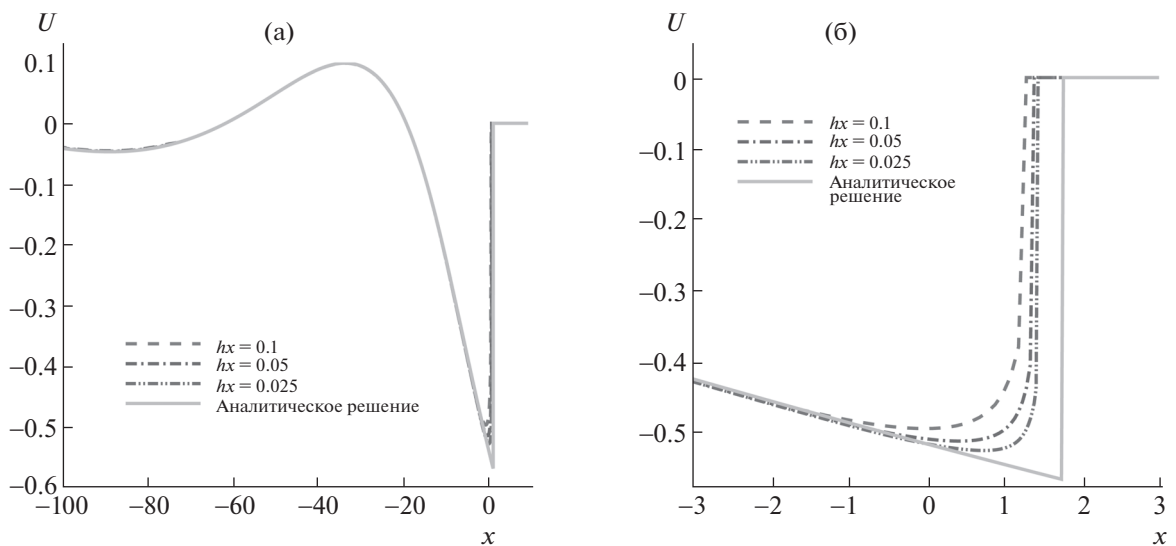
$$\begin{aligned} \tilde{u} &= -A \frac{J_1(\tilde{\sigma})}{\tilde{\sigma}} \sin(\tilde{\lambda}), & \tilde{\xi} &= \frac{A}{4} J_0(\tilde{\sigma}) \cos(\tilde{\lambda}) - \frac{\tilde{u}^2}{4}, \\ \tilde{x} &= \tilde{\xi} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{16}, & \tilde{t} &= \frac{\tilde{\lambda}}{2} - \tilde{u}. \end{aligned}$$

Из вида решения следует, что в момент времени $t = 0$ жидкость покоится. Затем возникает периодическое движение, период которого $T = \pi\sqrt{L/(g \operatorname{tg} \gamma)}$. Величина $\tilde{\sigma}$ является безразмерным аналогом скорости длинных волн $c = \sqrt{gh}$. Поэтому подстановка $\tilde{\sigma} = 0$ позволяет получить информацию о координате x и скорости u в “береговой точке”. Для справедливости указанного выражения необходимо, чтобы величина A была ограничена: $0 \leq A \leq 1$.

Рассмотренная далее задача соответствует случаю $A = 0.6$, $g = 9.8$ м/сек², длине области $L = 20$ м, углу наклона $\operatorname{tg} \gamma = 1/30$. Областью расчета является отрезок $[-100$ м, 10 м]. Дно имеет постоянный наклон $b(x) = \operatorname{tg} \gamma x$. В качестве начальных условий взято решение при $t = 0$. Слева на границе области поставлено периодическое по времени граничное условие для h и u , которое получено из точного решения при фиксированном $x_0 = -100$ м.



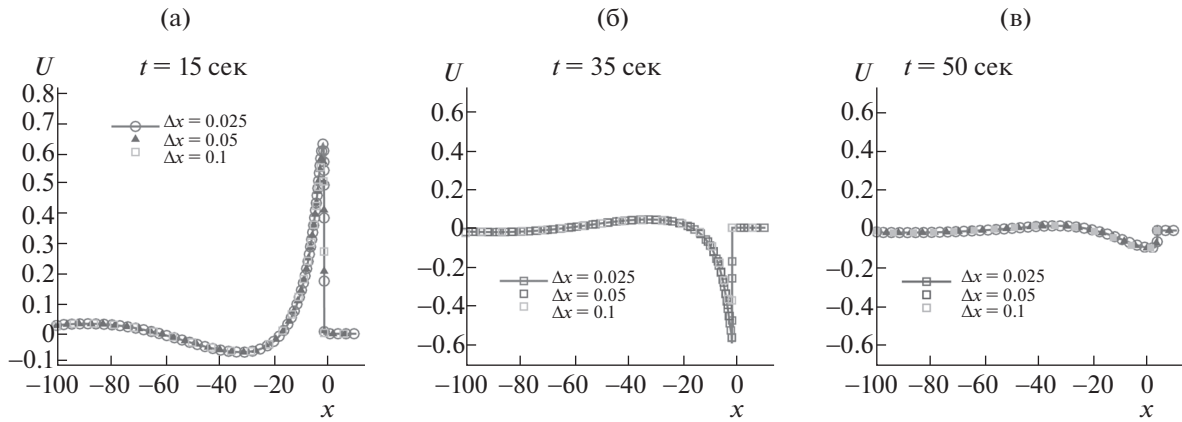
Фиг. 5. Зависимость координаты “береговой точки” от времени для трех шагов сетки $\Delta x = 0.1$ м, $\Delta x = 0.05$ м, $\Delta x = 0.025$ м, (б) – фрагмент.



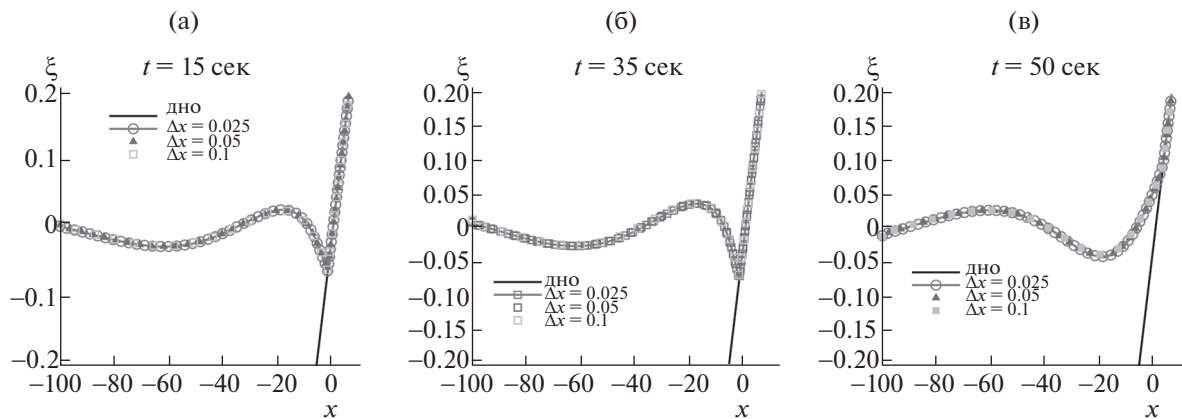
Фиг. 6. Распределение скорости u в момент времени $t = 5$ сек для трех пространственных шагов $\Delta x = 0.1$ м, $\Delta x = 0.05$ м, $\Delta x = 0.025$ м, (б) – фрагмент.

Расчет проводился для трех шагов сетки $\Delta x = 0.1$ м, $\Delta x = 0.05$ м, $\Delta x = 0.025$ м. Параметры численного алгоритма имели значения $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.1$ для всех шагов сетки. Параметр отсечения выбирался в соответствии с (31). Так как дно имеет постоянный наклон, то для трех разных шагов выбраны три разные значения $\varepsilon = \Delta x \operatorname{tg} \gamma$, которые, соответственно, равны $\varepsilon = 1/300$ м, $\varepsilon = 1/600$ м, $\varepsilon = 1/1200$ м.

На фиг. 5 показана зависимость координаты “береговой точки” (moving shoreline), которая обозначает разделение жидкости и сухого дна в зависимости от времени для трех периодов $3T$. Значение периода составляет $T = \pi\sqrt{L/(g \operatorname{tg} \gamma)}$. Точное решение обозначено сплошной линией, результаты численного расчета для трех шагов сетки $\Delta x = 0.1$ м, $\Delta x = 0.05$ м и $\Delta x = 0.025$ м отмечены различными прерывистыми линиями. На графике шаг сетки Δx обозначен как hx .



Фиг. 7. Распределение скорости u в моменты времени $t = 15$ сек, $t = 35$ сек и $t = 50$ сек.



Фиг. 8. Профили свободной поверхности жидкости ξ в моменты времени $t = 15$ сек, $t = 35$ сек и $t = 50$ сек. Сплошная линия обозначает профиль дна.

Изменение шага сетки, которое влечет изменение $\varepsilon = \Delta x \operatorname{tg} \gamma$, слабо влияет на положение береговой точки, и изменения, связанные с уменьшением шага сетки, заметны только около пиковых значений, фиг. 5а. Уменьшение шага сетки приближает результаты численных расчетов к аналитическому решению, фиг. 5б.

На фиг. 6 показано распределение скорости u для момента времени $t = 5$ сек. Видно, что скорость терпит разрыв около береговой точки. Приведено аналитическое решение и результаты численного расчета для трех шагов сетки $\Delta x = 0.1$ м, 0.05 м, 0.025 м. Остальные параметры численного алгоритма такие же, как и в предыдущем примере: $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.1$. На фиг. 6а приведено распределение скорости для всего отрезка $[-100$ м, 10 м]. На фиг. 6б показан фрагмент распределения скорости в окрестности “береговой точки”. Отличия численного и точного решений заметны только вблизи граничной береговой точки.

На фиг. 7 и 8 показаны результаты расчета для скорости u и профиля свободной поверхности $\xi = h + b$ для трех последовательных моментов времени: $t = 15$ сек, 35 сек и 50 сек. Из приведенных фигур видно, что скачок по скорости оказывается сглажен, но при этом численное решение приближается к аналитическому при уменьшении шага сетки Δx и соответствующем уменьшении параметра отсечения ε для всех моментов времени.

8. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛН ЦУНАМИ

Проблема численного моделирования набегания на побережье волн различного типа, включая волны цунами, является актуальной задачей гидродинамики, и в целом ряде случаев может

быть решена на основе гидродинамических уравнений в приближении мелкой воды (см. [3]). В данном разделе приведены результаты расчетов двух тестовых задач, которые показывают перспективность использования для этих целей модели сглаженных уравнений мелкой воды, дополненных граничными условиями для описания подвижных зон сухого дна. Одной из характерных особенностей данных задач является существенное различие в масштабах, определяющих размеры области в целом, размеры самих волн и зон взаимодействия волны с берегом, т.е. зон, в которых образуется сухое дно.

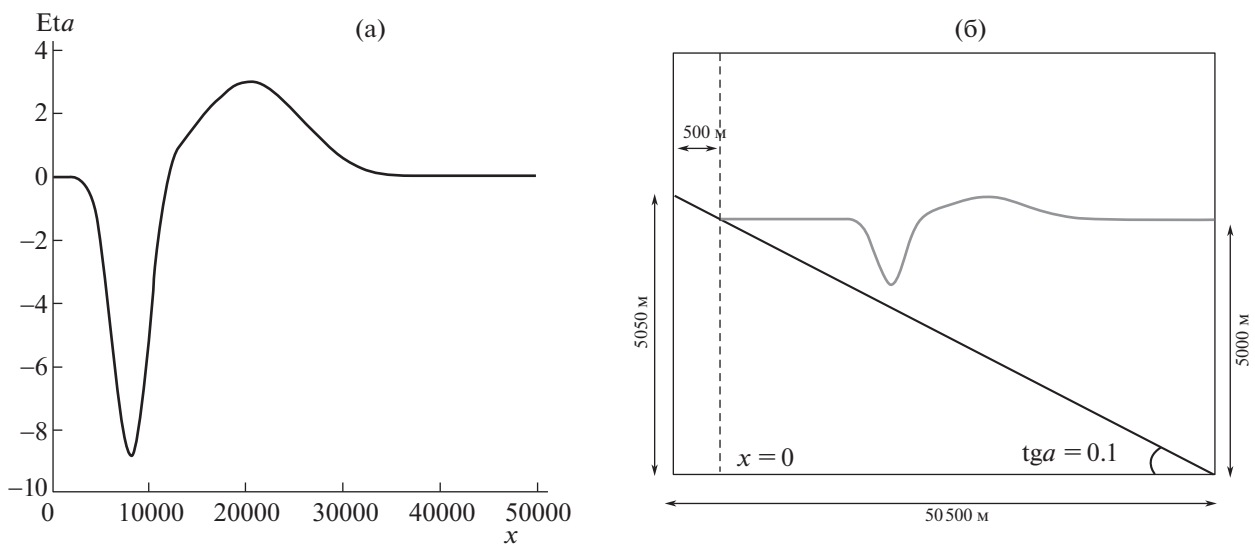
8.1. Набегание волны цунами на берег постоянного наклона

Постановка задачи и аналитические результаты, которые используются в качестве эталонных, находятся на электронном ресурсе (см. [30]). В частности, это данные о начальном распределении жидкости. Там же находятся аналитические данные по распределению возмущения свободной поверхности ξ и скорости жидкости u для трех моментов времени $t_1 = 160$ сек, $t_2 = 175$ сек и $t_3 = 220$ сек, а также информация о движении береговой линии на промежутке времени $[0, 355]$ сек.

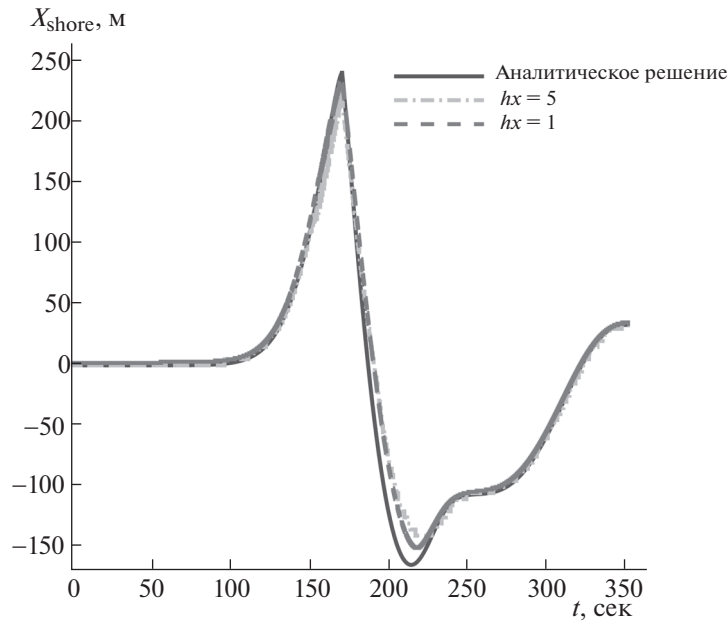
Распределение жидкости в начальный момент времени $t = 0$ представлено на фиг. 9, где изображена свободная поверхность жидкости $\xi = h + b$ и наклонный берег, профиль которого b имеет постоянный угол наклона γ ($\text{tg } \gamma = 0.1$). На фиг. 9а показана зависимость возмущения свободной поверхности жидкости от координаты. Область расчета занимает отрезок $[-500 \text{ м}, 50000 \text{ м}]$. В начальный момент времени $t = 0$ жидкость покоится и задано возмущение свободной поверхности в виде распределения высоты жидкости на отрезке $[0, 50000 \text{ м}]$. Область $[-500 \text{ м}, 0]$ отведена для сухого дна, где задано $h = 0$. Слева ставятся условия для сухого дна, справа поддерживается постоянный уровень жидкости $h(x = 50000 \text{ м}) = 5000 \text{ м}$.

Обратим внимание на существенно различные масштабы по горизонтали и вертикали. В то время как жидкость занимает область размером 50 км, разница между максимальным и минимальным значениями уровня свободной поверхности, как видно из фигуры, составляет 10 м. На фиг. 9а форма поверхности жидкости представлена в схематическом виде.

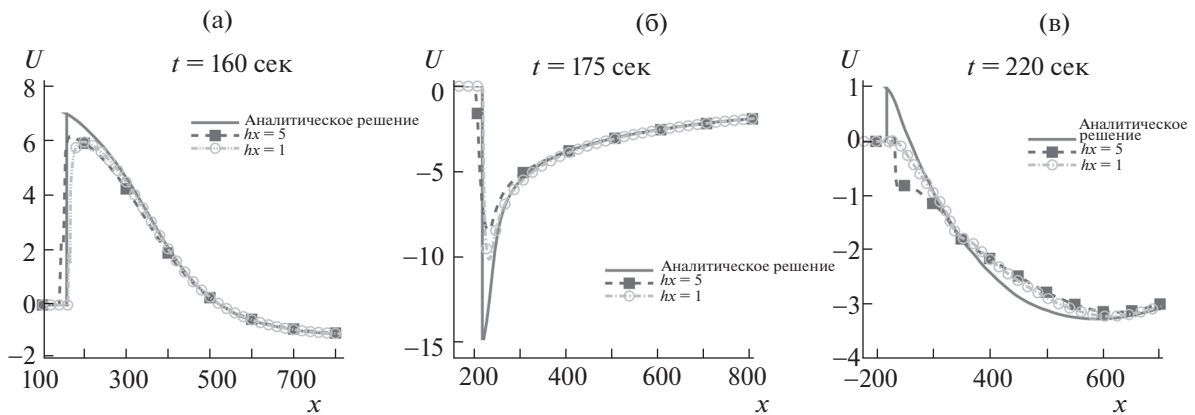
Расчеты проводились для сгущающихся сеток с шагами $\Delta x = 5 \text{ м}$, $\Delta x = 2 \text{ м}$ и $\Delta x = 1 \text{ м}$. Трем различным шагам сетки отвечают разные значения ε согласно условию $\varepsilon = \Delta x \text{ tg } \gamma$. Для демонстрации влияния параметра регуляризации использовано два значения коэффициента: $\alpha = 0.3$ и $\alpha = 0.4$. Число Куранта $\beta = 0.5$. Установлено, что значение $\alpha = 0.3$ является оптимальным для расчетов данной задачи. Приведенные далее графики построены для $\alpha = 0.4$ и шагов сетки $\Delta x = 5$ и 1 м в сравнении с точным решением.



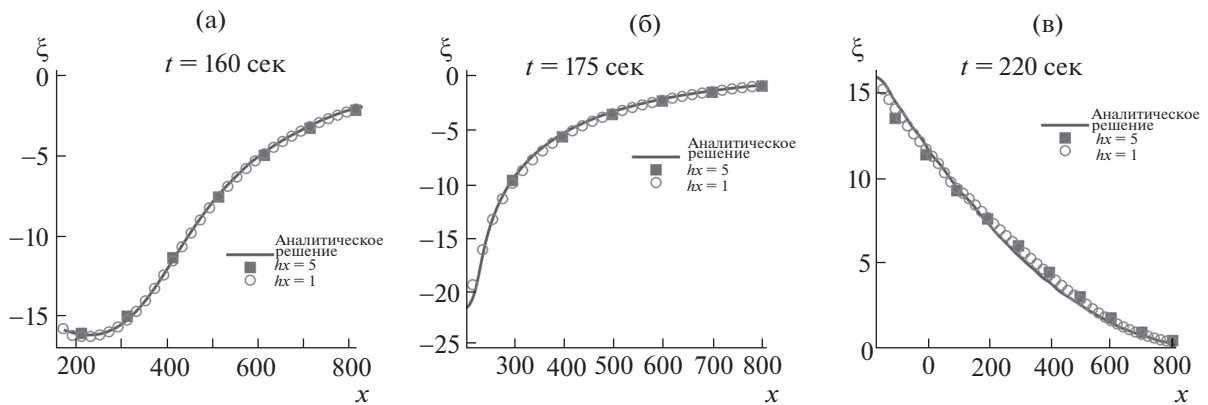
Фиг. 9. Начальное возмущение свободной поверхности жидкости ξ , (а) – фрагмент.



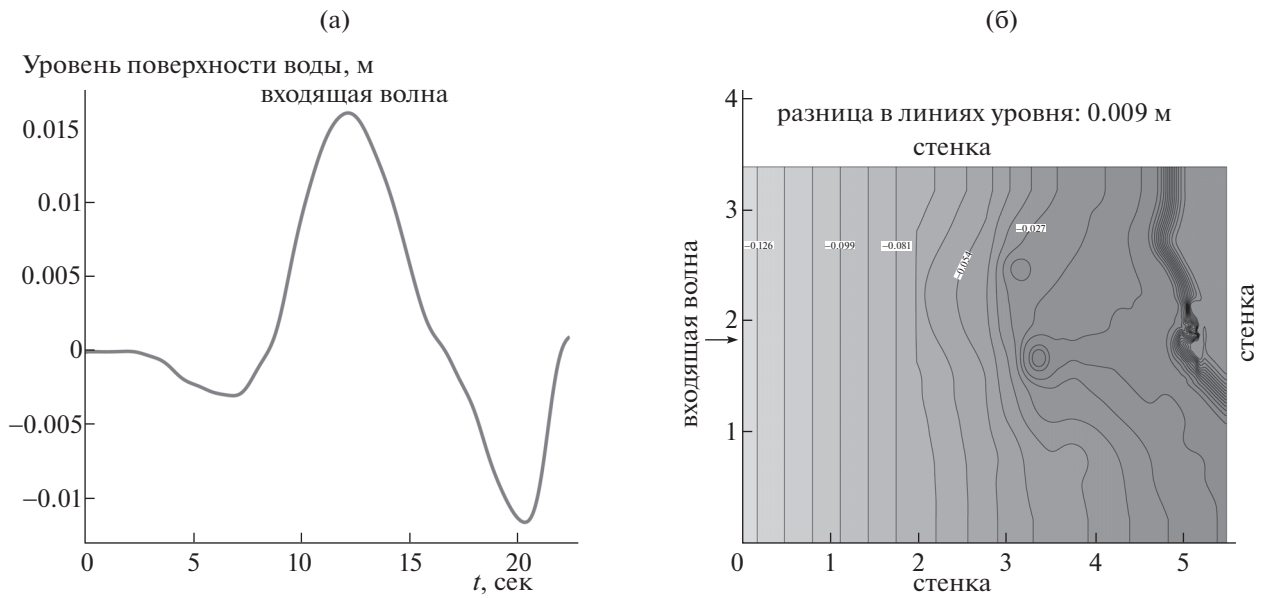
Фиг. 10. Зависимость от времени координаты точки, которая отделяет жидкость от сухой области. Точное решение обозначено сплошной линией. Результаты расчетов для сеток с шагом $\Delta x = 5$ м и $\Delta x = 1$ м обозначены штрихпунктирной и штриховой линиями соответственно.



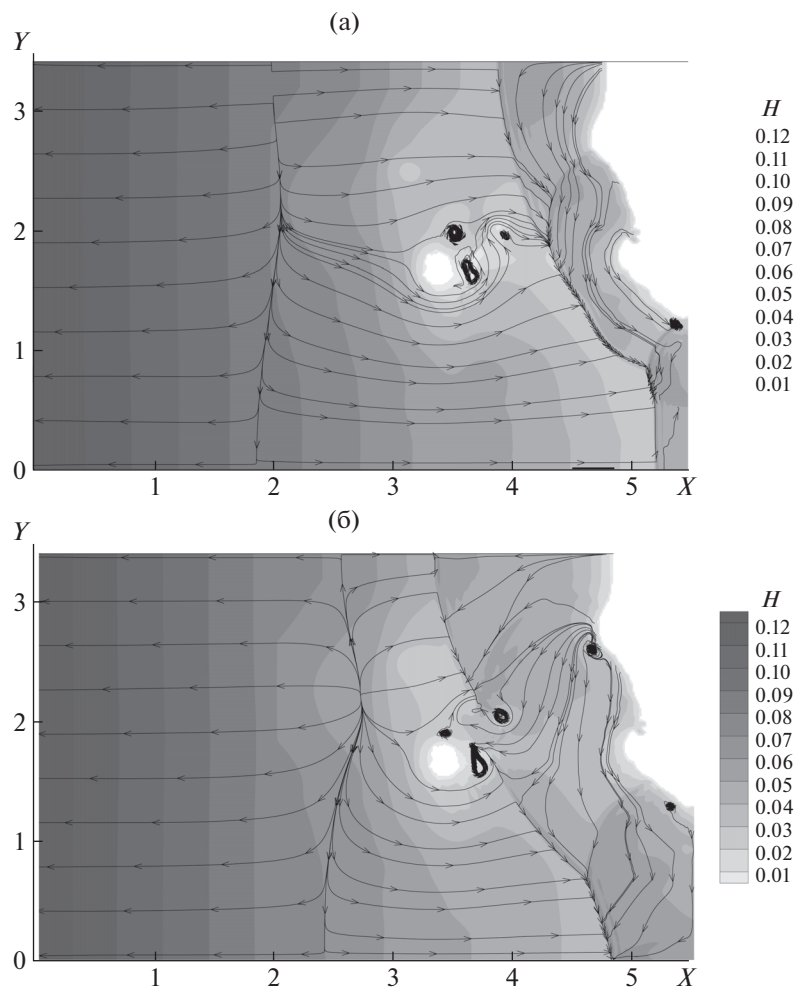
Фиг. 11. Профили скорости u в моменты времени $t = 160$ сек, 175 сек и 220 сек.



Фиг. 12. Возмущение свободной поверхности жидкости ξ в моменты времени $t = 160$ сек, 175 сек и 220 сек.



Фиг. 13. (а) – уровень жидкости входящей волны, (б) – рельеф дна в эксперименте для долины Минай.



Фиг. 14. Линии уровня h и линии тока в момент времени $t = 17$ сек и 18 сек.

На фиг. 10 приведена зависимость координаты береговой точки для двух значений шага сетки в сравнении с точным решением. Точное решение обозначено сплошной линией. Результаты расчетов для сеток с шагом $\Delta x = 5$ м и $\Delta x = 1$ м обозначены пунктирными линиями.

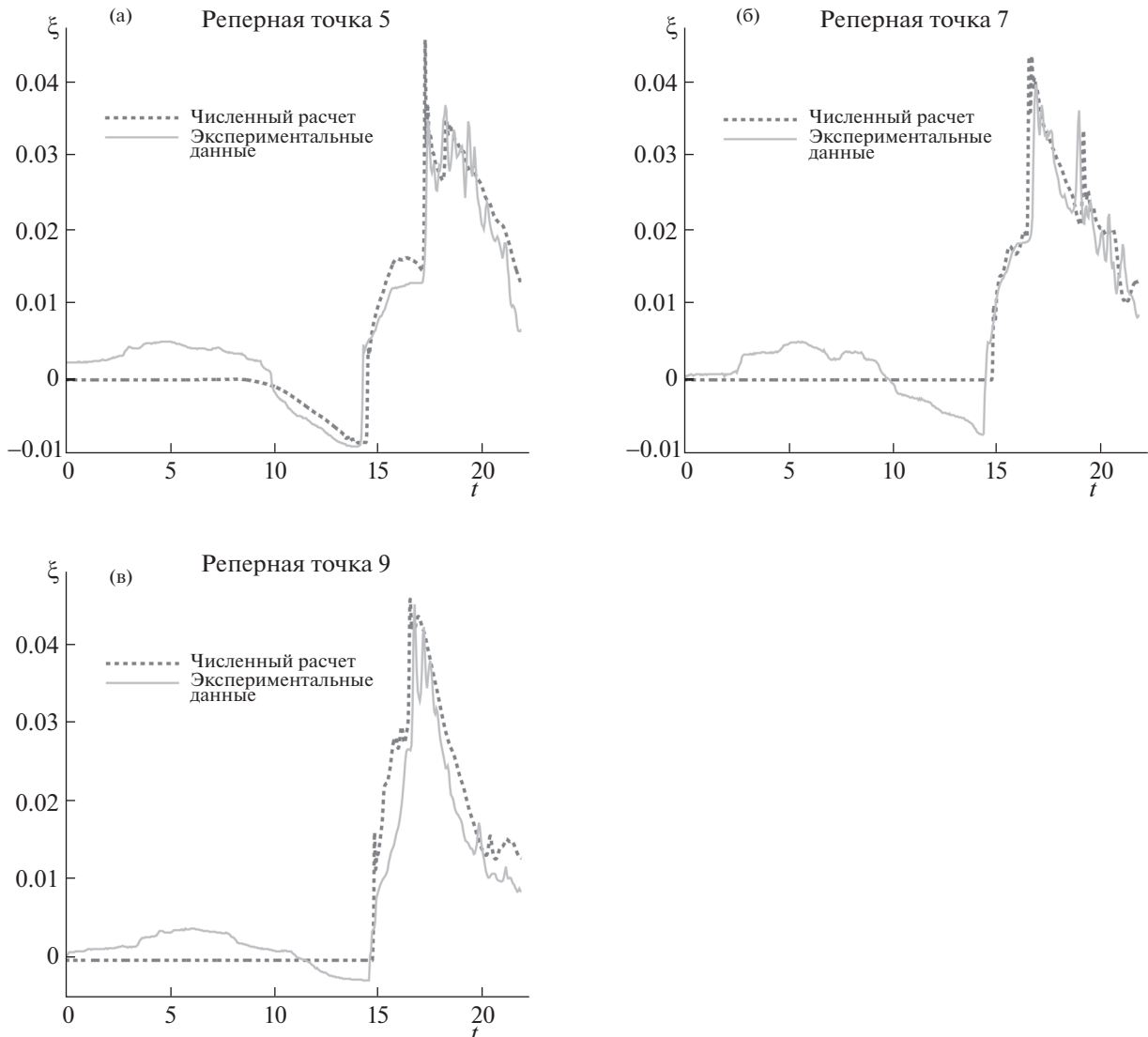
На фиг. 11 представлено сравнение результатов расчета и точного решения для распределения скорости для трех моментов времени $t = 160$ сек, 175 сек и 220 сек. Для графиков скорости u видны заметные отличия численных значений скорости от точных в зоне скачка, примыкающей к “береговой точке”. Аналогичный эффект имеет место в рассмотренной ранее задаче, см. фиг. 7.

На фиг. 12 представлено сопоставление результатов численных расчетов и точного решения для величины возмущения свободной поверхности $\xi = h + b$ для тех же трех моментов времени $t = 160$ сек, 175 сек и 220 сек. В приведенном масштабе не заметны отличия между точным решением и численными расчетами на обеих сетках.

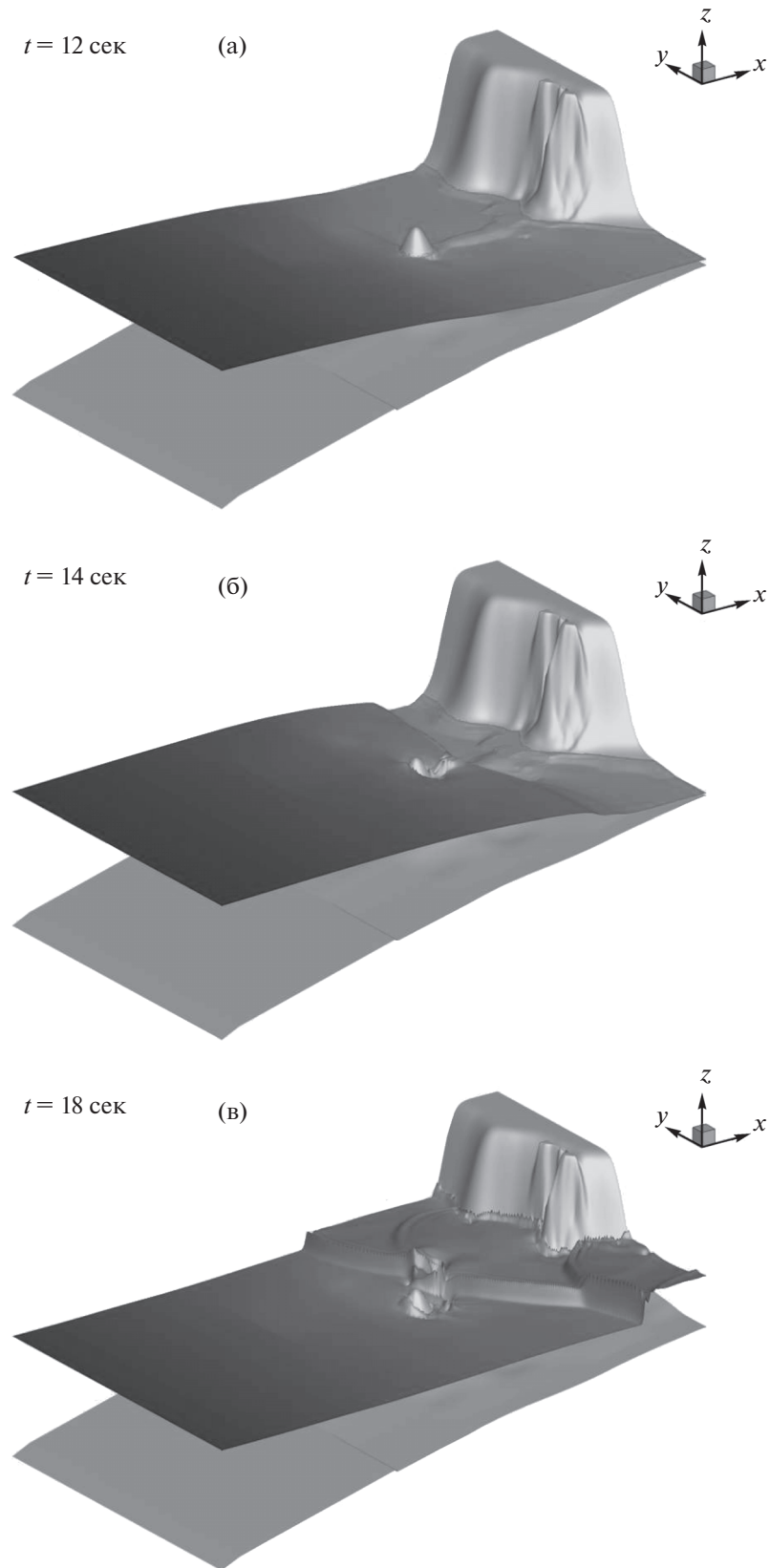
На приведенных выше фигурах видна сходимость решения при сгущении пространственной сетки.

8.2. Набегание волны цунами на берег сложной формы

Задача о набегании цунами на берег сложной формы используется для тестирования возможностей и особенностей различных численных алгоритмов. Результаты численного расчета сопо-



Фиг. 15. Сравнение возмущения свободной поверхности жидкости ξ , полученных из экспериментальных данных, с результатами численного расчета для реперных точек 5, 7 и 9. Сплошная линия – эксперимент, штриховая – расчет.



Фиг. 16. Трехмерный профиль жидкости $\zeta(x, y)$ и рельеф дна $b(x, y)$. Набегание волны на берег в моменты времени $t = 12$ сек, 14 сек и 18 сек.

ставляются с результатами натурального эксперимента. При постановке эксперимента строилась модель, в основе которой лежал реальный ландшафт береговой линии в соотношении 1 : 400. В этом эксперименте пытались смоделировать цунами Окушири (яп. Okushiri tsunami), которое произошло в 1993 году в долине Монай (Monai Valley). Его характерной особенностью стал необычно большой размер береговых волн (на пике он составил 31.7 м). Соответствующий эксперимент был проведен в Научно-исследовательском институте электроэнергетики города Абики, Япония (Research Institute for Electric Power Industry in Abiko, Japan). Данные о рельефе дна, начальных и граничных условиях, а также результаты экспериментов можно найти на ресурсе [31].

Подобная задача рассматривается в [22], а также в [32]. Для практических приложений важно, что результаты численного моделирования можно сравнить с результатами лабораторного эксперимента.

В данной задаче прямоугольная расчетная область имеет длину 5.448 м и ширину 3.402 м. Все стороны области представляют собой твердые стенки, кроме левой границы. Уровень h на левой границе задается входящей волной (фиг. 13а). Профиль дна приведен на фиг. 13б, где разница в линиях уровня составляет 0.009 м. При этом максимальный угол наклона берега невелик $tg\gamma \sim 0.1$, что позволяет использовать приближение МВ.

Исходные барометрические данные приведены для сетки с шагом 0.014 м, этот шаг мы выбираем для расчета на прямоугольной сетке $\Delta x = \Delta y$. Численные параметры равны $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$. Расчет велся до момента времени $t = 22$ сек. Параметр отсечения выбирался в соответствии с выражением (32) с коэффициентом $\epsilon_0 = 3$.

Линии тока показывают сложный нестационарный характер течения, что видно на фиг. 14 для моментов времени $t = 17, 18$ сек. Здесь показано распределение уровня жидкости h вместе с линиями тока. Белым цветом обозначены области сухого дна.

Полученные численные результаты можно сравнить с экспериментальными измерениями колебания свободной поверхности жидкости, сделанных в трех реперных точках, которые пронумерованы цифрами 5, 7 и 9 (5: $(x, y) = (4.521, 1.196)$; 7: $(x, y) = (4.521, 1.696)$; 9: $(x, y) = (4.521, 2.196)$). Сравнение численных и экспериментальных результатов приведены на фиг. 15. Из графиков видно хорошее соответствие между экспериментальными данными и результатами численного моделирования. При сравнении с экспериментальными данными обращает на себя внимание совпадение пиковых значений. Совпадение положений максимумов на временной шкале означает, что принятая модель адекватным образом описывает распространение волн и возмущений в жидкости. Отличие вычислительных результатов от данных эксперимента для малых времен может быть устранено путем уменьшения параметра отсечения ϵ .

На фиг. 16 для наглядности приведены трехмерные распределения уровня жидкости для трех характерных моментов времени $t = 12, 14$ и 18 сек.

ВЫВОДЫ

В работе показано, что сглаженные уравнения мелкой воды и предложенный на их основе численный алгоритм, дополненный условиями хорошей балансировки и условиями, обеспечивающими формирование зон сухого дна, представляют собой удобный и надежный численный алгоритм для численного моделирования течений, связанных с волновыми движениями в прибрежных зонах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стокер Дж.Дж.* Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: ИЛ, 1959.
2. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
3. *Levin B.W., Nosov M.A.* Physics of tsunamis. Springer, 2008.
4. *Elizarova T.G., Bulatov O.V.* Regularized shallow water equations and a new method of simulation of the open channel flows // Int. J. Comp. and Fluids. 2011. № 46. P. 206–211.
5. *Булатов О.В., Елизарова Т.Г.* Регуляризованные уравнения мелкой воды и эффективный метод численного моделирования течений в неглубоких водоемах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 1. С. 170–184.
6. *Елизарова Т.Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.

7. *Шеретов Ю.В.* Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. Москва–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2009.
8. *Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Никитина О.В.* Моделирование одномерных течений мелкой воды на основе регуляризованных уравнений. Препр. № 33, 36. М.: ИПМ им. Келдыша РАН, 2011.
9. *Елизарова Т.Г., Истомина М.А., Шелковников Н.К.* Численное моделирование формирования уединенной волны в кольцевом аэрогидроканале // Матем. моделирование. 2012. Т. 24. № 4. С. 107–116.
10. *Булатов О.В.* Аналитические и численные решения уравнений Сен-Венана для некоторых задач о распаде разрыва над уступом и ступенькой дна // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 1. С. 150–163.
11. *Елизарова Т.Г., Сабурин Д.А.* Численное моделирование колебаний жидкости в топливных баках // Матем. моделирование. 2013. Т. 25. № 3. С. 75–88.
12. *Елизарова Т.Г., Сабурин Д.С.* Численное моделирование волн Фарадея на основе уравнений гидродинамики в приближении мелкой воды // Вестник Моск. ун-та. Сер. 3. Физика и астрономия. 2015. № 1. С. 3–8.
13. *Злотник А.А.* О построении квазигазодинамических систем уравнений и баротропной системы с потенциальной массовой силой // Матем. моделирование. 2012. Т. 24. № 4. С. 65–79.
14. *Злотник А.А.* Энергетические равенства и оценки для баротропных квазигазо- и квазигидродинамических систем уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 2. С. 325–337.
15. *Zlotnik A.A., Chetverushkin B.N.* Parabolicity of the quasi-gasdynamic system of equations, its hyperbolic second-order modification, and the stability of small perturbations for them // Comput. Math. and Math. Phys. 2008. V. 48. № 3. P. 445–472.
16. *Сухомозгий А.А., Шеретов Ю.В.* Единственность решения регуляризованных уравнений Сен-Венана в линейном приближении // Вестн. Тверского гос. ун-та. Сер. “Прикладная математика”. 2012. Вып. 1. № 24. С. 5–17.
17. *Сухомозгий А.А., Шеретов Ю.В.* Тестирование нового алгоритма расчета одномерных нестационарных течений жидкости со свободной границей // Вестн. Тверского гос. ун-та. Сер. “Прикладная математика”. 2012. Вып. 4. № 27. С. 47–64.
18. *Елизарова Т.Г., Булатов О.В.* Численный алгоритм решения регуляризованных уравнений мелкой воды на неструктурированных сетках. Препр. № 21. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2014.
19. *Елизарова Т.Г., Истомина М.А.* Квазигазодинамический алгоритм решения уравнений мелкой воды в полярной системе координат. Препр. № 65. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2014.
20. *LeVeque R.J.* Balancing source terms and flux gradients in high-resolution godunov methods: the quasi-steady wave propagation algorithm // J. Comput. Phys. 1998. V. 146. № 1. P. 346–365.
21. *Huang Y., Zhang N., Pei Y.* Well-balanced finite volume scheme for shallow water flooding and drying over arbitrary topography // Engineering Appl. of Computat. Fluid Mech. 2013. V. 7. № 1. P. 40–54.
22. *Злотник А.А.* О консервативных пространственных дискретизациях баротропной квазигазодинамической системы уравнений с потенциальной массовой силой // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 2. С. 301–318.
23. *Ricchiuto M., Abgrall R., Deconinck H.* Application of conservative residual distribution schemes to the solution of the shallow water equations on unstructured meshes // J. Comput. Phys. 2007. V. 222. P. 287–331.
24. *Birman A., Falcovitz J.* Application of the GRP scheme to open channel flow equations // J. Comput. Phys. 2007. V. 222. P. 131–154.
25. *Петросян А.С.* Дополнительные главы гидродинамики тяжелой жидкости со свободной границей. Сер. “Механика, управление, информатика”. М.: ИКИ РАН, 2010.
26. *Kun Xu.* A well-balanced gas-kinetic scheme for the shallow-water equations with source terms // J. Comput. phys. 2002. V. 178. P. 533–562.
27. *Marche F.* Theoretical and numerical study of shallow water models. Application to nearstore hydrodynamics. PhD thesis, 2005, Universite de Bordeau I. www.math.u-bordeau1.fr/marche/THESE/marche.pdf
28. *Carrier G.F., Greenspan H.P.* Water waves of finite amplitude on a sloping beach // J. Fluid Mech. 1958. V. 4. P. 97–109.
29. *Carrier G.F., Wu T.T., Yeh H.* Tsunami run-up and draw-down on a plane beach // J. Fluid Mechanics. 2003. V. 475. P. 79–99.
30. Benchmark problem № 1. Tsunami Runup onto a plane beach. http://isec.nacse.org/workshop/2004_cornell/bmark1.html
31. NOAA Center for tsunami research. Tsunami Runup onto a Complex Three-dimensional Beach. Monai Valley. http://nctr.pmel.noaa.gov/benchmark/Laboratory/Laboratory_MonaiValley/index.html
32. *Ricchiuto M.* An explicit residual based approach for shallow water flows // J. Comput. Phys. 2015. V. 280. P. 306–344.