

Т.Г. Елизарова, И.А. Широков

**Регуляризованные уравнения
и примеры их использования
при моделировании
газодинамических течений**

Монография



МОСКВА — 2017

УДК 519.6:533.5
ББК 22.19:22.253
Е51

Рецензенты:

Б.Н. Четверушкин, академик РАН, научный руководитель
Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН;

В.А. Трофимов, профессор, заведующий лабораторией
математического моделирования в физике
факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Елизарова Т.Г., Широков И.А.

Е51 Регуляризованные уравнения и примеры их использования при моделировании газодинамических течений: Монография. — М.: МАКС Пресс, 2017. — 136 с.; илл.
ISBN 978-5-317-05570-7

Изложены результаты применения регуляризованных, или квазигазодинамических (КГД) уравнений газовой динамики к задачам численного моделирования до- и сверхзвуковых течений вязкого сжимаемого газа. Рассмотрены задачи о распаде разрывов и турбулентные течения при невысоких числах Рейнольдса. Наличие диссипации специального вида позволяет единообразно моделировать указанные типы течений.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, регуляризация, распады разрывов, вихрь Тейлора–Грина, турбулентное течение Куэтта.

УДК 519.6:533.5
ББК 22.19:22.253

Работа поддержана грантом РФФИ 16-01 00048а

Elizarova T.G., Shirokov I.A.

Regularized equations and examples of their use in the modeling of gas-dynamic flows: Monograph. — M.: MAKS Press, 2017. — 136 p.

Results of the application of regularized, or quasi-gas dynamic (QGD) equations in problems of numerical modeling of subsonic and supersonic flows of a viscous compressible gas are presented. The variants of the discontinuities decay and free and bounded turbulent flows at low Reynolds numbers are considered. The special form of the QGD dissipation makes it possible to model all these gas dynamic flows uniformly.

Keywords: gas-dynamic equations, regularization, discontinuities decay, Taylor–Green vortex, turbulent Couette flow.

ISBN 978-5-317-05570-7

© Елизарова Т.Г., Широков И.А., 2017

Содержание

Глава 1. Регуляризованные уравнения газовой динамики	5
Глава 2. Одномерные течения	14
2.1. КГД уравнения и численный алгоритм	14
2.2. Задачи о распаде разрывов	18
2.3. Задача о взаимодействии двух разрывов.....	37
2.4. Задача о взаимодействии ударной волны и волны энтропии	40
Глава 3. Свободные турбулентные течения.....	43
3.1. Введение.....	43
3.2. Постановка задачи о распаде вихря Тейлора–Грина и математическая модель.....	43
3.3. Результаты расчетов для $Re=100$	50
3.4. Результаты расчетов для $Re=280$	54
3.5. Результаты расчетов для $Re=1600$	58
3.6. Влияние параметров расчета	62
3.7. Энергетический спектр	64
3.8. Общие замечания.....	66
Глава 4. Пристеночные турбулентные течения	71
4.1. Введение.....	71
4.2. Постановка задачи о течении Куэтта и математическая модель.....	73
4.3. Результаты расчетов для $Re=3000$	83
4.4. Результаты расчетов для $Re=4250$	92
4.5. Результаты расчетов для $Re=300$	94
4.6. Зависимость коэффициента трения от числа Рейнольдса	95
4.7. Общие замечания.....	96

Глава 5. Ламинарно-турбулентный переход при обтекании гиперзвукового летательного аппарата	98
5.1. Введение	98
5.2. Постановка задачи и расчетная область	99
5.3. Преобразование координат и построение сетки	100
5.4. Начальные и граничные условия	108
5.5. Искусственная диссипация	111
5.6. Параметры расчетов	113
5.7. Результаты расчетов	114
5.8. Энергетический спектр	122
Литература.....	126

Глава 1. Регуляризованные уравнения газовой динамики

Актуальной задачей вычислительной гидродинамики является разработка математических алгоритмов, позволяющих однородным образом адекватно моделировать основные газодинамические процессы, наблюдающиеся в реальных течениях. К таким процессам относятся сверхзвуковые течения, включающие в себя ударные волны и волны разрежения, а также турбулентные течения, включая взаимодействие потока с твердой стенкой и ламинарно-турбулентный переход, возникающий с ростом скорости потока.

Важным шагом на пути решения этой задачи явилось то обстоятельство, что в последние годы были построены математические модели, обобщающие систему уравнений Навье–Стокса и отличающиеся от нее дополнительными диссипативными слагаемыми с малым параметром размерности времени в качестве коэффициента. Соответствующие системы уравнений были названы квазигазодинамическими (КГД) уравнениями, или регуляризованными уравнениями газовой динамики. Изложенные далее результаты развивают подход, изложенный в монографии Т.Г. Елизаровой «Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений» [70, 73], а также в работах [63, 64, 66, 67].

Система уравнений Навье–Стокса. Система уравнений газовой динамики в форме Навье–Стокса в виде уравнений баланса массы, импульса и полной энергии в традиционных обозначениях имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p &= \operatorname{div} \Pi + \rho \mathbf{F}, \\ \frac{\partial}{\partial t} E + \operatorname{div}[(E + p)\mathbf{u}] + \operatorname{div} \mathbf{q} &= \operatorname{div}(\Pi \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} + Q.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь \mathbf{F} – внешняя массовая сила, Q – мощность тепловых источников. Знак \otimes обозначает прямое векторное произведение, причём при вычислении дивергенции от него дифференцируется первый множитель.

Тензор вязких напряжений Π имеет вид

$$\Pi = \Pi_{NS} = \mu[\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T - \frac{2}{3}(\operatorname{div} \mathbf{u})I] + \zeta(\operatorname{div} \mathbf{u})I \quad (1.2)$$

с коэффициентом динамической вязкости $\mu = \mu(\rho, T) > 0$ и $\zeta = \zeta(\rho, T) \geq 0$ – коэффициентом объемной вязкости. Здесь I – единичный тензор.

Вектор теплового потока \mathbf{q} задается формулой

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_{NS} = -\kappa \nabla T, \quad (1.3)$$

где $\kappa = \kappa(\rho, T) > 0$ – коэффициент теплопроводности.

Полная энергия E вычисляется с использованием величины внутренней энергии ε

$$E = \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 + \rho \varepsilon \quad (1.4)$$

Система уравнений (1.1)–(1.4) замыкается общими уравнениями состояния

$$p = p(\rho, T), \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, T) \quad (1.5)$$

которые связаны равенством Максвелла

$$p = T \frac{\partial p}{\partial T} + \rho^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}$$

и удовлетворяют условиям термодинамической устойчивости, согласно, например, [22].

Для совершенного политропного газа уравнение состояния и уравнения связи упрощаются и принимают вид

$$p = \rho RT, \quad \varepsilon = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}, \quad (1.6)$$

$$\varepsilon = c_v T, \quad c_v = \frac{R}{\gamma - 1}, \quad c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}, \quad (1.7)$$

где показатель адиабаты $\gamma = c_p / c_v > 1$.

Регуляризованные уравнения Навье–Стокса, или КГД системы. В работах [63, 64, 66, 67, 70, 73, 77 и др.] был построен регуляризованный вид уравнений Навье–Стокса. Соответствующая система уравнений была названа квазигазодинамической (КГД) системой уравнений. Численный алгоритм, основанный на этой системе (КГД алгоритм) и родственные ему кинетически-согласованные разностные схемы [63, 64] успешно использовались для численного моделирования широкого круга течений вязкого сжимаемого газа.

КГД система может быть рассмотрена как система Навье–Стокса, усредненная на малом пространственно-временном интервале. Такое усреднение приводит к появлению дополнительных нелинейных слагаемых, пропорциональных малому параметру τ размерности времени. Эти слагаемые имеют вид производных второго порядка по пространственным координатам и являются существенно нелинейными функциями параметров течения.

приводят к увеличению энтропии течения, что позволяет говорить об их диссипативном характере. Указанную процедуру можно рассматривать как введение в уравнения газовой динамики дополнительного сглаживания, или регуляризации.

КГД уравнения с учетом массовой силы и источника тепла для совершенного политропного газа были записаны в виде, аналогичном уравнениям Навье–Стокса, дополненных слагаемыми с коэффициентом τ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} \mathbf{j}_m &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div} (\mathbf{j}_m \otimes \mathbf{u}) + \nabla p &= \operatorname{div} \Pi + [\rho - \tau \operatorname{div} (\rho \mathbf{u})] \mathbf{F} \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E + \operatorname{div}[(E + p)\mathbf{j}_m / \rho] + \operatorname{div} \mathbf{q} = \operatorname{div}(\Pi \mathbf{u}) + \mathbf{j}_m \cdot \mathbf{F} + Q.$$

При этом поток массы в уравнении неразрывности принимает вид

$$\mathbf{j}_m = \rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}), \quad (1.9)$$

тензор вязких напряжений Π с включенными в него регуляризирующими добавками имеет вид

$$\Pi = \Pi_{NS} + \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{w}_* + \tau[\mathbf{u} \nabla p + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{u} - (\gamma - 1)Q]I. \quad (1.10)$$

Тепловой поток \mathbf{q} задается формулой

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T - \tau[\rho(\mathbf{u} \nabla \varepsilon - \frac{p}{\rho^2} \mathbf{u} \nabla \rho - Q)]\mathbf{u}. \quad (1.11)$$

В приведенных выше формулах для потока массы, тензора вязких напряжений и теплового потока малые добавки вычисляются с использованием векторов

$$\mathbf{w} = \frac{\tau}{\rho}[\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p - \rho \mathbf{F}], \quad \mathbf{w}_* = \frac{\tau}{\rho}[\rho(\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \rho \mathbf{F}]. \quad (1.12)$$

Заметим, что скорости \mathbf{w} и \mathbf{w}_* связаны соотношением

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_* + \frac{\tau}{\rho} \mathbf{u} \nabla(\rho \mathbf{u}). \quad (1.13)$$

Для выписанной выше КГД системы уравнений было получено уравнение баланса энтропии s в виде

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{j}_m s) = -\operatorname{div}\left(\frac{q}{T}\right) + X, \quad (1.14)$$

где слагаемое X представляет собой производство энтропии и является неотрицательным:

$$\begin{aligned} X = & \kappa \left(\frac{\nabla T}{T} \right)^2 + \frac{\Pi_{NS} : \Pi_{NS}}{2\mu T} + \frac{p\tau}{\rho^2 T} (\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}))^2 + \frac{\rho}{\tau T} (\mathbf{w}_*)^2 + \\ & + \frac{\tau}{\rho \varepsilon T} \left(\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \varepsilon + p \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{Q}{2\rho} \right)^2 + \frac{Q}{T} \left(1 - \frac{\tau(\gamma - 1)Q}{4p} \right) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Для применения КГД уравнений к численному моделированию течений с общими уравнениями состояния (1.5) эта система была обобщена в работах [60, 61]. Формально такое обобщение может быть выполнено посредством замены в уравнении импульса системы (1.8) тензора вязких напряжений Π (1.10) с последующей заменой в нем слагаемого $\eta \operatorname{div} \mathbf{u}$ на $\rho C_s^2 \operatorname{div} \mathbf{u}$ и слагаемого $(\gamma - 1)Q$ на $(\gamma_Q - 1)Q$.

Таким образом, тензор вязких напряжений примет вид

$$\Pi = \Pi_{NS} + \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{w}_* + \tau [\mathbf{u} \nabla p + \rho C_s^2 \operatorname{div} \mathbf{u} - (\gamma_Q - 1)Q] I,$$

где

$$C_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{T}{\rho^2} \frac{(\partial p / \partial T)^2}{\partial \varepsilon / \partial T} \geq 0$$

– скорость звука в газе, и

$$\gamma_Q(\rho, T) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p / \partial T}{\partial \varepsilon / \partial T} + 1.$$

В частном случае совершенного политропного газа $T \partial p / \partial T = p$, $T \partial \varepsilon / \partial T = \varepsilon$, и поэтому $C_s^2 = \gamma(\gamma - 1)\varepsilon$ и $\rho C_s^2 = \eta$, а $\gamma_Q = \gamma$.

Факт параболичности КГД системы с общими уравнениями состояния был доказан в работе [60]. Также в [60] для КГД системы выведено уравнение баланса энтропии в случае отсутствия источника тепла. В работах [61, 62] уравнение баланса энтропии для КГД системы обобщено на случай наличия источника тепла, и диссипативная функция записана в новой форме.

Пространственная дискретизация обобщенных таким образом КГД уравнений и тестовые расчеты были выполнены в [15].

Корректность постановки задачи с начальными данными (задачи Коши) для КГД системы и ее локальная разрешимость представлены в работе [58]. Устойчивость равновесных решений КГД системы доказана в работе [59].

В плане практического применения КГД система может рассматриваться как система уравнений Навье–Стокса с регуляризацией, что позволяет создать на ее основе эффективные конечно-разностные алгоритмы расчета течений газа и жидкости. Эти алгоритмы представляют собой условно-устойчивые однородные разностные схемы с аппроксимацией всех пространственных производных, включая конвективные слагаемые, с помощью центральных разностей. При этом τ -слагаемые, отличающие КГД систему от системы уравнений Навье–Стокса, выполняют роль регуляризатора и сглаживают нефизичные осцилляции решения.

Теоретический анализ τ -слагаемых показал, что эти добавки вносят положительный вклад в производство энтропии системы и тем самым имеют диссипативный характер. В приближении пограничного слоя τ -слагаемые обращаются в ноль, и КГД уравнения в этом приближении совпадают с уравнениями Прандтля. Было показано, что для медленно меняющихся течений, к которым относятся ламинарные колебательные течения, величина добавочных слагаемых имеет порядок $O(\tau^2)$ и сказывается только на точности разностного решения. Однако для быстропеременных течений добавочные τ -слагаемые имеют порядок $O(\tau)$ и могут вносить существенный вклад в решение задачи. Именно такими течениями являются турбулентные течения.

Среди достоинств КГД алгоритмов укажем простоту численной реализации, их естественное обобщение на неструктурированные пространственные сетки [72] и возможность их реализации на многопроцессорных системах.

Примеры численного моделирования обтекания сложных летательных аппаратов с использованием параллельных вычислений и неортогональных гексагональных индексных сеток имеются, например, в [65, 68]. Тетрайдальные неструктурированные сетки использовались в расчетах сверхзвуковых течений в [37, 38].

Были построены новые варианты КГД алгоритмов для расчета гидродинамических течений в приближении мелкой воды [79, 80, 89, 91]. Данное приближение можно рассматривать как баротропные

уравнения Эйлера при специальном выборе уравнения состояния. Поэтому численные методы, развитые для решения уравнений газовой динамики успешно применяются и для уравнений в приближении мелкой воды.

Регуляризованные уравнения газовой динамики были опробованы на расчетах магнитогидродинамических течений в работах [86, 87].

Эффективность КГД алгоритмов при расчете нестационарных течений подтверждается опытом численного моделирования сверхзвуковых колебательных течений в окрестности тела с иглой, течения вблизи полого цилиндра и каверны, дорожки Кармана за цилиндром и ряда других задач, приведенных в монографиях [63, 66, 73, 69, 74]. Отмеченные выше факты явились обоснованием использования регуляризованных уравнений для компьютерного моделирования быстропеременных турбулентных течений.

Для всех указанных задач были отмечены следующие свойства КГД алгоритма: нестационарное течение возникало без введения какого-либо малого возмущения в область расчета. Для достаточно малых значений параметра регуляризации τ и достаточно подробных сеток частота возникающих колебаний не зависела ни от величины τ , ни от шага пространственной сетки. Частоты рассчитанных колебаний и диапазоны параметров потока, характерные для появления или затухания этих колебаний, соответствовали известным экспериментальным закономерностям.

В настоящее время для численного моделирования турбулентных течений в инженерных приложениях все большее место занимают методы крупных вихрей (Large-Eddy Simulation, LES). Эти модели представляют собой алгоритмы типа фильтра, где крупные вихревые образования, которые разрешаются сеткой, моделируются явно, а движения среды, масштаб которых не разрешается на имеющейся сетке, считаются осредненными. Последнее приводит к появлению в системе уравнений дополнительной диссипации. Введение такой подсеточной вязкости является способом включить в расчет сток энергии за счет ее диссипации на малых масштабах, которые не разрешаются пространственной сеткой. Чем большая степень разре-

ния сетки, тем меньшая часть энергии моделируется подсеточными моделями.

Поэтому для относительно грубых сеток качество численного решения определяется используемой моделью подсеточной диссипации.

Одной из наиболее успешных подсеточных моделей считается модель Смагоринского. Величина диссипации в этой модели пропорциональна шагу сетки h , а в роли фильтра выступает шаг сетки. Связывая в КГД модели значение параметра регуляризации τ с шагом пространственной сетки h в виде $\tau \sim h/c$, где c – локальная скорость распространения малых возмущений в газе (скорость звука), мы можем рассматривать τ - вязкость как новый вариант подсеточной диссипации, которая сглаживает, или осредняет пульсации газодинамических величин на пространственно-временных масштабах порядка шага сетки. Подсеточная диссипация в КГД модели принципиально отличается от турбулентной вязкости типа Смагоринского, а именно: τ -слагаемые имеют другую математическую структуру, и соответствующие слагаемые входят не только в уравнения для импульса и энергии, но и в уравнение неразрывности. Последнее моделирует турбулентную диффузию массы, которая является неотделимой составной частью турбулентного перемешивания. На твердой стенке τ -слагаемые обращаются в ноль.

В качестве первого примера использования КГД алгоритма для моделирования турбулентных течений в [69, 71] было рассмотрено дозвуковое течение сжимаемого газа в канале с внезапным расширением в виде обратной ступеньки. Расчеты выполнены в диапазоне чисел Рейнольдса, включающем ламинарный и турбулентный режимы течения. Получено, что с ростом скорости потока происходит бифуркация решения, и стационарный ламинарный режим течения сменяется нестационарным турбулентным режимом. Показано, что при соответствующем выборе значения параметра τ , КГД модель позволяет в рамках единого алгоритма описать оба режима течения.

При этом для ламинарных течений τ -слагаемые выполняют роль регуляризаторов и оказываются малыми, а для турбулентных течений эти слагаемые не малы и играют роль турбулентной диссипации.

Во второй главе данной монографии представлены расчеты одномерных тестовых задач, демонстрирующих возможности КГД алгоритма для расчета сверхзвуковых течений с разрывами решения. Далее, с использованием того же численного алгоритма показаны результаты численного моделирования ламинарных и турбулентных дозвуковых течений вязкого сжимаемого газа в трехмерной постановке. Рассмотрены свободные течения (вихрь Тейлора–Грина) и пристеночные (течение Куэтта). Сравнение результатов с эталонными данными из литературы, полученными посредством методов прямого численного моделирования (DNS) и методов крупных вихрей (LES) показывает, что КГД алгоритм является адекватным средством моделирования свободного течения как в турбулентном, так и в ламинарном режимах. Сопоставление полученных результатов моделирования течения Куэтта с известными экспериментальными данными (в четвертой главе) демонстрирует возможности КГД алгоритма при моделировании ламинарных и турбулентных пристеночных течений. В последней, пятой главе приведены результаты моделирования нестационарного течения в окрестности фюзеляжа гиперзвукового летательного аппарата.

Глава 2. Одномерные течения

Расчет нестационарных течений сжимаемого газа в одномерном по пространству приближении является наглядным способом оценки возможностей численных алгоритмов. В настоящее время имеется большое число примеров решения многомерных задач, которые также используются для сопоставления численных методов между собой. Однако в таких расчетах, как правило, точность решения определяется не только самим численным алгоритмом, но и структурой пространственной сетки, способом постановки граничных условий и прочими обстоятельствами, что затрудняет сопоставление самих численных алгоритмов. Кроме того, одномерные течения невязкого газа детально исследованы теоретически, а для течений типа распада разрыва имеются автомодельные решения уравнений Эйлера, например [27, 43], которые служат надежным эталоном проверки точности и сходимости численных решений.

Представительная система тестов собрана, например, в [32] и [33], где десять одномерных нестационарных течений невязкого газа рассчитываются на основе десяти различных численных алгоритмов, достаточно полно представляющих возможности конечно-разностного подхода к решению уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных.

В данной главе на этих же тестах проверяются возможности численного алгоритма, основанного на КГД уравнениях (1.8)–(1.13), (1.5)–(1.7). Материал этой главы основан на работах [75, 76].

2.1. КГД уравнения и численный алгоритм

Квазигазодинамические (КГД) уравнения (1.8)–(1.13), (1.5)–(1.7) для одномерного плоского течения при отсутствии внешних сил и источников тепла в общепринятых обозначениях имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_m}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial j_m u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial j_m H}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial \Pi u}{\partial x}. \quad (2.3)$$

Здесь E и H – полная энергия единицы объема и полная удельная энтальпия, которые вычисляются по формулам: $E = \rho u^2 / 2 + p / (\gamma - 1)$ и $H = (E + p) / \rho$. Вектор плотности потока массы вычисляется как

$$j_m = \rho(u - w),$$

где

$$w = \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p).$$

Компонента тензора вязких напряжений, входящая в систему уравнений (2.1)–(2.3), определяется как

$$\Pi = \frac{4}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \tau \left(\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \tau \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Вектор теплового потока q равен

$$q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} - \tau \rho u \left[\frac{u}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) + p u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right].$$

где $p = \rho R T$, μ – коэффициент динамической вязкости, $\kappa = \mu \gamma R / ((\gamma - 1) Pr)$ – коэффициент теплопроводности, γ – показатель адиабаты, Pr – число Прандтля, $\tau = \mu / (p Sc)$ – релаксационный параметр, имеющий размерность времени, Sc – число Шмидта.

Для удобства численного решения система уравнений (2.1)–(2.3) приводится к безразмерному виду с использованием базовых

значений плотности ρ_0 , скорости звука $c_0 = \sqrt{\gamma RT_0}$ и длины L . Обезразмеривание не изменяет вид уравнений.

Введем равномерную сетку по координате x с шагом h , и сетку по времени с шагом Δt . Значения всех газодинамических величин – скорости, плотности, давления – будем определять в узлах сетки. Значения потоков определяются в полужелтых узлах. Для решения задачи (2.1)–(2.3) используем явную по времени разностную схему следующего вида:

$$\begin{aligned}\rho_i^{UP} &= \rho_i - \frac{\Delta t}{h} (j_{mi+1/2} - j_{mi-1/2}), \\ \rho_i^{UP} u_i^{UP} &= \rho_i u_i + \frac{\Delta t}{h} [(\Pi_{i+1/2} - \Pi_{i-1/2}) - (p_{i+1/2} - p_{i-1/2}) - \\ &\quad - (j_{mi+1/2} u_{i+1/2} - j_{mi-1/2} u_{i-1/2})],\end{aligned}\quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}E_i^{UP} &= E_i + \frac{\Delta t}{h} [(\Pi_{i+1/2} u_{i+1/2} - \Pi_{i-1/2} u_{i-1/2}) - \\ &\quad - (q_{i+1/2} - q_{i-1/2}) - \left(\frac{j_{mi+1/2}}{\rho_{i+1/2}} (E_{i+1/2} + p_{i+1/2}) - \frac{j_{mi-1/2}}{\rho_{i-1/2}} (E_{i-1/2} + p_{i-1/2}) \right)], \\ p_i &= (\gamma - 1) \left(E_i - \frac{\rho_i u_i^2}{2} \right)\end{aligned}\quad (2.5)$$

Дискретный аналог потока массы j_m имеет вид

$$j_{mi+1/2} = \rho_{i+1/2} (u_{i+1/2} - w_{i+1/2}), \quad (2.6)$$

где добавка к скорости вычисляется как

$$w_{i+1/2} = \frac{\tau_{i+1/2}}{\rho_{i+1/2}} \frac{1}{h} (\rho_{i+1} u_{i+1}^2 + p_{i+1} - \rho_i u_i^2 - p_i). \quad (2.7)$$

В программной реализации одномерных задач, описанных во второй главе, поток массы вычисляется в виде:

$$j_{mi+1/2} = (\rho u)_{i+1/2} \frac{\tau_{i+1/2}}{h} (\rho_{i+1} u_{i+1}^2 + p_{i+1} - \rho_i u_i^2 - p_i),$$

где

$$(\rho u)_{i+1/2} = \frac{1}{2}(\rho_i u_i + \rho_{i+1} u_{i+1}).$$

Дискретное выражение для $\Pi_{i+1/2}$ вычисляется по формулам

$$\mu_{i+1/2} = \tau_{i+1/2} p_{i+1/2} Sc, \quad (2.8)$$

$$\Pi_{NSi+1/2} = \frac{4}{3} \mu_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \quad (2.9)$$

$$(w_*)_{i+1/2} = \tau_{i+1/2} (\rho_{i+1/2} u_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \frac{p_{i+1} - p_i}{h}), \quad (2.10)$$

$$R_{i+1/2} = \tau_{i+1/2} (u_{i+1/2} \frac{p_{i+1} - p_i}{h} + \gamma p_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h}), \quad (2.11)$$

$$\Pi_{i+1/2} = (\Pi_{NS} + u w_* + R)_{i+1/2}. \quad (2.12)$$

Вычисление $q_{i+1/2}$ происходит согласно соотношениям

$$R_{i+1/2}^q = (\tau p)_{i+1/2} (\frac{u_{i+1/2}}{\gamma - 1} \frac{(p/\rho)_{i+1} - (p/\rho)_i}{h} + (pu)_{i+1/2} \frac{1/\rho_{i+1} - 1/\rho_i}{h}), \quad (2.13)$$

$$q_{i+1/2} = -(\tau p)_{i+1/2} \frac{\gamma Sc}{Pr(\gamma - 1)} \frac{(p/\rho)_{i+1} - (p/\rho)_i}{h} - u_{i+1/2} R_{i+1/2}^q. \quad (2.14)$$

Дискретные выражения для Π и q выписываются аналогично. Порядок точности разностной схемы (2.4)–(2.7) составляет $O(h^2 + \Delta t)$. Вопросы точности и устойчивости КГД алгоритма анализируются далее на примере расчетов задачи Римана.

При численном решении уравнений Эйлера на основе системы (2.1)–(2.3) все диссипативные слагаемые, то есть слагаемые с коэффициентами μ , κ и τ , рассматриваются как искусственные регуляризаторы. При этом релаксационный параметр и коэффициенты вязкости и теплопроводности связаны между собой и в безразмерном виде вычисляются как

$$\tau = \alpha \frac{h}{c}, \quad \mu = \tau \cdot p \cdot Sc, \quad \kappa = \frac{\tau \cdot p \cdot Sc}{Pr(\gamma - 1)}, \quad (2.15)$$

где α – численный коэффициент, который, как правило, выбирался в пределах 0.2–0.7. В большинстве представленных далее расчетов полагаем $Pr = 1$ и $Sc = 1$.

С учетом соотношений (2.15) схема (2.4)–(2.14) формально имеет порядок $O(\alpha h + \Delta t)$. Приведенные далее расчеты подтверждают, что уменьшение коэффициента α в определенных пределах эквивалентно сгущению пространственной сетки в α раз.

Выписанная разностная схема (2.4)–(2.15) обладает условием устойчивости Куранта. Шаг по времени выбирается из соотношения

$$\Delta t = \beta \min\left(\frac{h}{|u_i| + c_i}\right), \quad (2.16)$$

где β – численный коэффициент, который в большинстве расчетов составляет 0.1–0.4.

2.2. Задачи о распаде разрывов

В этом разделе рассмотрены задачи Римана о распаде разрывов, собранные в [32, 33]. Эти задачи всесторонне отражают характерные и сложные для численного моделирования особенности нестационарных газодинамических течений. Начальные данные к задачам о распаде разрывов приведены в Таблице 1 в соответствии с обозначениями, принятыми в [32, 33]. А именно, значения газодинамических величин слева от разрыва обозначены индексом L , справа – индексом R . Момент времени, для которого построены графики, указан в таблице 1 и обозначен как t_{fin} .

Граничные условия совпадают с соответствующими начальными условиями на концах расчетной области. Во всех вариантах расчетов $\gamma = 1.4$, за исключением задачи Ноха (3), для которой $\gamma = 5/3$. Область расчета составляет $[-0.5, 0.5]$. Разрыв расположен в точке 0.

Тест	1	2	3	3a	4
ρ_L	1	1	1	1	5.99924
u_L	0.75	-2	1	-19.59745	19.5975
p_L	1	0.4	10^{-6}	1000	460.894
ρ_R	0.125	1	1	1	5.99924
u_R	0	2	-1	-19.59745	-6.19633
p_R	0.1	0.4	10^{-6}	0.01	46.095
t_{fin}	0.2	0.15	1	0.012	0.035

Табл. 1. Начальные условия для задач Римана

Тест	5	6	7	8
ρ_L	1.4	1.4	0.1261192	1000
u_L	0	0.1	8.9047029	0
p_L	1	1	782.92899	1000
ρ_R	1	1	6.591493	1
u_R	0	0.1	2.2654207	0
p_R	1	1	3.1544874	1
t_{fin}	2	2	0.0039	0.15

Табл. 1. (продолжение). Начальные условия для задач Римана

Задачи 1, 2, 4, 5 и 6 впервые были предложены и численно решены в [52]. В [18] задача 2 решалась на основе КГД алгоритма, представленного в виде схемы расщепления потока. Задача Ноха была впервые предложена и численно решена в [34].

Тест 1. Данная задача представляет собой один из вариантов задачи Сода. В образующемся течении имеются все характерные особенности, присущие сверхзвуковым течениям: звуковые точки на границах волны разрежения, контактный разрыв и ударная волна.

В рамках КГД алгоритма устойчивое решение этой задачи обеспечивается выбором коэффициентов $0.2 \leq \alpha \leq 0.5$ и $\beta = 0.4$ в формулах (2.15) и (2.16), соответственно. Уменьшение коэффициента α при расчете параметра регуляризации (2.15) приводит к уточнению численного решения. На рис. 1. показаны распределения плотности, вычисленные для пространственной сетки с шагом $h = 0.0025$. Сплошная линия – автомодельное решение.

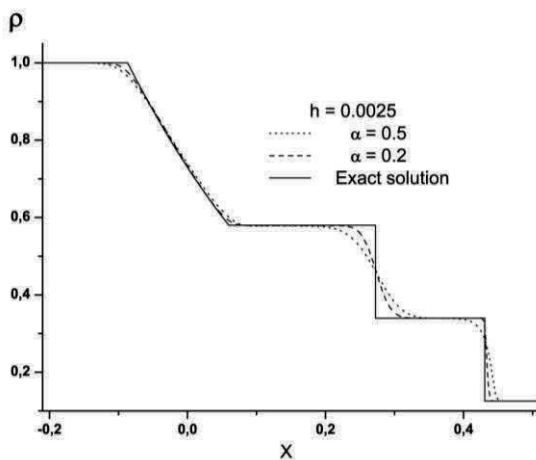


Рис. 1. Тест 1. Распределение плотности. Зависимость решения от параметра регуляризации

Здесь, так же как и в последующих расчетах, уменьшение коэффициента α в два раза практически эквивалентно уменьшению шага пространственной сетки в два раза. Однако выбор $\alpha < 0.2$ приводит к возникновению вычислительной неустойчивости, которая может быть устранена путем уменьшения шага по времени: уменьшения коэффициента β . Сходимость численного решения к автомодельному решению задачи (сплошная линия) при сгущении пространственной сетки для $\alpha = 0.2$ демонстрирует рис. 2.

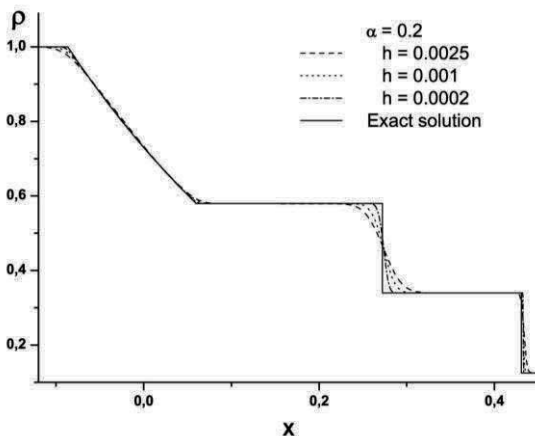


Рис. 2. Тест 1. Распределение плотности. Сходимость по сетке

Тест 2. Течение здесь представляет собой две волны разрежения, разбегающиеся от центра области. Сложность численного решения этой задачи обусловлена тем, что в центре между разбегающимися потоками плотность газа и его давление очень малы, но в то же время внутренняя энергия $\varepsilon = p / (\rho(\gamma - 1))$ к нулю не стремится. Представляется, что никакая разностная схема в переменных Эйлера не описывает поведение внутренней энергии в этой задаче с высокой точностью, см., например, [32] и [33].

Во всех расчетах этой задачи коэффициент $\beta = 0.1$. Увеличение шага по времени приводило к численной неустойчивости. Зависимость плотности и внутренней энергии газа от шага сетки и параметра регуляризации α приведены на рис. 3 и рис. 4. Линия 6 соответствует автомодельному решению. Где не оговорено специально, $\alpha = 0.5$ для рис. 3 и $\alpha = 0.1$ для рис. 4.

Распределение скорости быстро сходится к аналитическому решению и здесь не приведено.

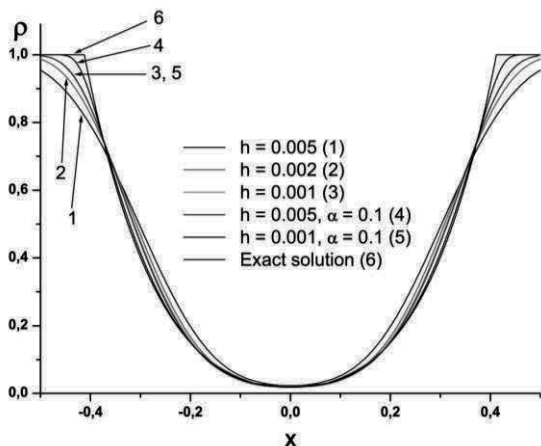


Рис. 3. Тест 2. Распределение плотности. Сходимость по сетке

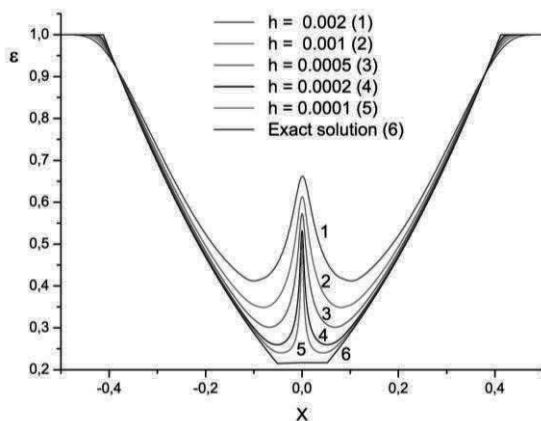


Рис. 4. Тест 2. Распределение внутренней энергии. Сходимость по сетке

Уменьшение параметра регуляризации, как и уменьшение шага сетки, приводит к уточнению численного решения и его приближению к автомодельному решению. Это особенно хорошо видно на графиках внутренней энергии (рис. 4). Нефизичный максимум внутренней энергии, или энтропийный след, который виден на указанном рисунке, уменьшается при сгущении пространственной сетки. Заметим, что в области этого следа

скорость близка к нулю, поэтому регуляризующие добавки в тепловом потоке очень малы, что препятствует разглаживанию возникшего в начальный момент времени энтропийного следа. Разглаживание этого следа может быть обеспечено увеличением искусственной теплопроводности. Наличие энтропийного следа не связано с диссипативными добавками и обусловлено недостаточно высокой точностью аппроксимации конвективных слагаемых в уравнениях Эйлера.

Тест 3. Задача Ноха. Рассматриваемое в этой задаче течение представляет собой столкновение двух гиперзвуковых потоков холодного плотного газа, которое приводит к образованию двух расходящихся "бесконечно сильных" ударных волн, между которыми остается неподвижный газ с постоянными плотностью и давлением. Действительно, согласно начальным условиям (табл. 1), скорость звука на невозмущенном фоне составляет $c = \sqrt{\gamma p_r / \rho_r} = 0.0013$. Скорость распространения волн равна 1, то есть число Маха $Ma = u_L / c = 775$. Известно, что в земных условиях максимально достижимое число Маха составляет порядка 30. Расчеты этой задачи проводились при $\alpha = 0.5$ и $\beta = 0.001$.

Рис. 5 и рис. 6 показывают сходимость распределений плотности и скорости по сетке для $Pr = 1$. Так же быстро сходятся к автомодельному решению распределения температуры и давления.

Незначительный провал в распределении плотности и соответствующий максимум в распределении внутренней энергии (здесь не приведены), которые образуются в центре области расчета, сглаживаются при уменьшении шага пространственной сетки. Таким образом, в этой задаче энтропийный след оказывается малым.

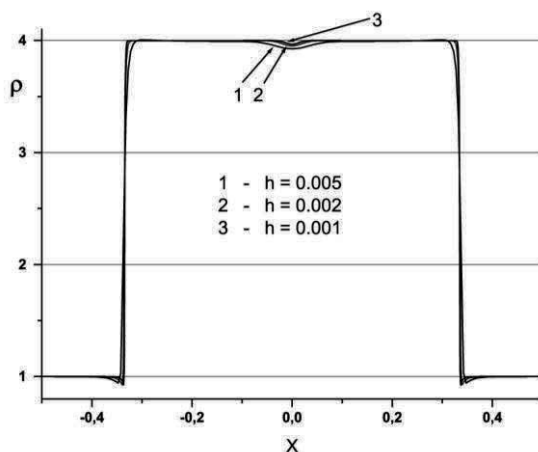


Рис. 5. Тест 3. Распределение плотности. Сходимость по сетке

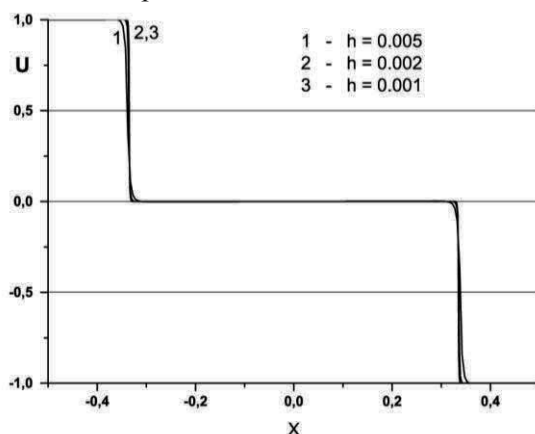


Рис. 6. Тест 3. Распределение скорости. Сходимость по сетке

В этом примере, также, как и в предыдущем случае, дополнительная КГД диссипация обращается в ноль в центре расчетной области, так как в этой зоне скорость течения равна нулю, и давление газа постоянно. Само наличие энтропийного следа обусловлено не наличием τ -диссипации, а связано с аппроксимацией конвективных слагаемых в уравнениях Эйлера. В

рамках КГД модели получить еще более точное решение задачи Ноха позволяет увеличение искусственной теплопроводности.

Отметим, что ряд рассмотренных в [32] и [33] алгоритмов приводит к нефизичным осцилляциям и нарушению симметрии в профиле плотности. Заметим, что здесь, так же как и в других рассмотренных примерах, качественное численное решение в рамках КГД алгоритма получается на достаточно подробных сетках. Однако вычислительные затраты, связанные с подробностью сетки, компенсируются простотой и вычислительной эффективностью этого алгоритма.

Тест 3а. В эта задаче рассчитывается газодинамическое течение типа сжатия газа в термоядерной мишени. Перепад давления p_L / p_R составляет 10^5 , что соответствует перепаду температур того же порядка.

Параметр регуляризации для этой задачи вычислялся при $\alpha = 0.4$. Меньшие значения α приводили к неустойчивости решения на контактном разрыве. Число Куранта $\beta = 0.01$ для всех вариантов расчета. Увеличение искусственной теплопроводности ($Pr = 1$) позволило улучшить численное решение.

Сходимость численного решения по сетке видна на рис. 7, рис. 8 и рис. 9. На рис. 8 и рис. 9 приведены фрагменты распределений внутренней энергии и скорости течения газа. Видно очень хорошее разрешение фронта сильной ударной волны. На указанных рисунках автомодельное решение показано сплошной линией.

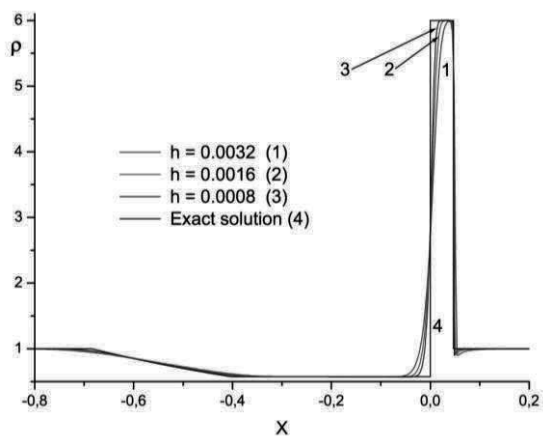


Рис. 7. Тест 3а. Распределение плотности. Сходимость по сетке

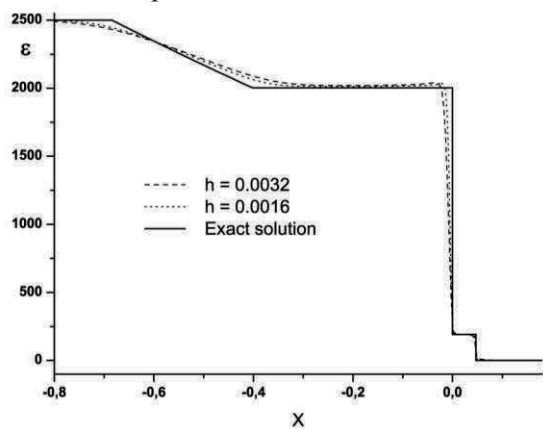


Рис. 8. Тест 3а. Распределение внутренней энергии. Сходимость по сетке

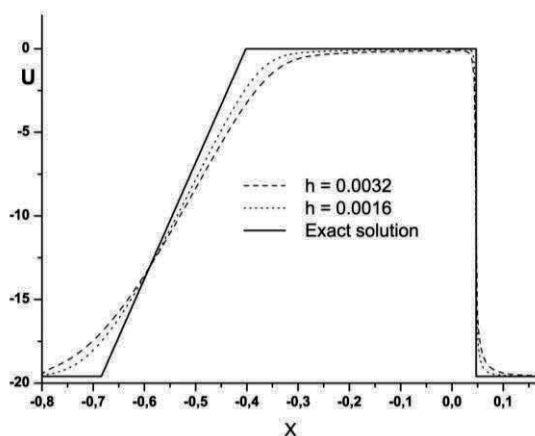


Рис. 9. Тест 3а. Распределение скорости. Сходимость по сетке

Тест 4. Здесь рассматривается течение газа в виде двух расходящихся по газу ударных волн, между которыми располагается движущийся контактный разрыв. Для этой задачи характерно малое время протекания рассчитываемого процесса, и здесь численное решение задачи практически не зависит от величины искусственной теплопроводности (числа Прандтля).

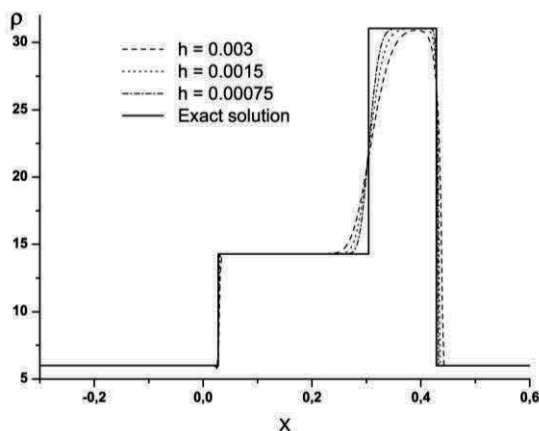


Рис. 10. Тест 4. Распределение плотности. Сходимость по сетке

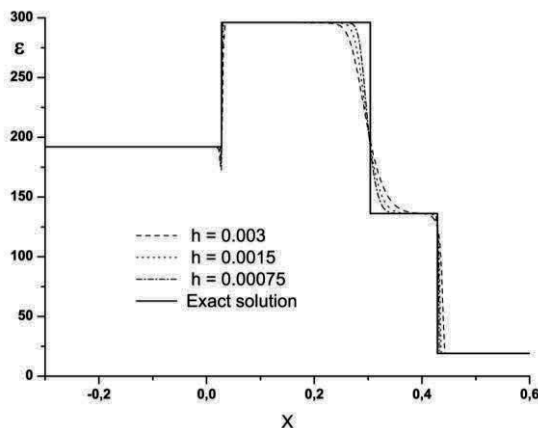


Рис. 11. Тест 4. Распределение внутренней энергии. Сходимость по сетке

Задача решалась при следующих значениях определяющих параметров $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.1$. Сходимость численного решения по сетке к автомодельным распределениям плотности и внутренней энергии (сплошная линия) показана на рис. 10 и рис. 11.

Тест 5. Течение в этой задаче представляет собой неподвижный контактный разрыв. Задача решалась при $\alpha = 0.4$ и $\beta = 0.1$. Рис. 12 демонстрирует влияние коэффициентов вязкости и теплопроводности на численное решение задачи.

Подчеркнем, что коэффициенты вязкости и теплопроводности здесь $\sim h$ и соответствующие слагаемые рассматриваются как численные регуляризаторы. Величины коэффициентов вязкости и теплопроводности определяется коэффициентом Sc (2.15). При отключении вязкости и теплопроводности ($Sc = 0$), КГД алгоритм для этой задачи является точным в том смысле, что ширина контактного разрыва составляет один шаг сетки.

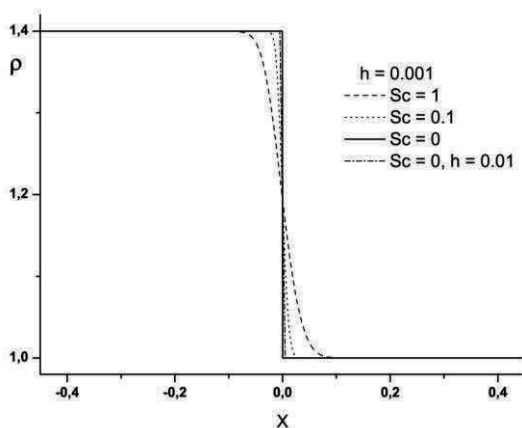


Рис. 12. Тест 5. Распределение плотности в контактном разрыве.
Зависимость решения от числа Шмидта

Этот факт демонстрирует роль КГД диссипации: КГД диссипация стабилизирует неподвижный контактный разрыв, вязкость типа Навье–Стокса его размазывает. При отключении всей вязкости ($\tau = 0$) решение оказывается абсолютно неустойчивым.

Тест 6. Задача представляет собой расчет медленно движущегося контактного разрыва. Расчет проведен при $\alpha = 0.4$ и $\beta = 0.1$, $Sc = 1$. Рис. 13 иллюстрирует влияние коэффициентов вязкости и теплопроводности для $h = 0.01$. Уменьшение этих коэффициентов ($Sc = 0.1$) улучшает качество численного решения.

Однако полное исключение искусственной диссипации типа Навье–Стокса ($Sc = 0$) приводит к появлению осцилляций. Сходимость численного решения по сетке для $Sc = 0.1$ видна на рис. 14.

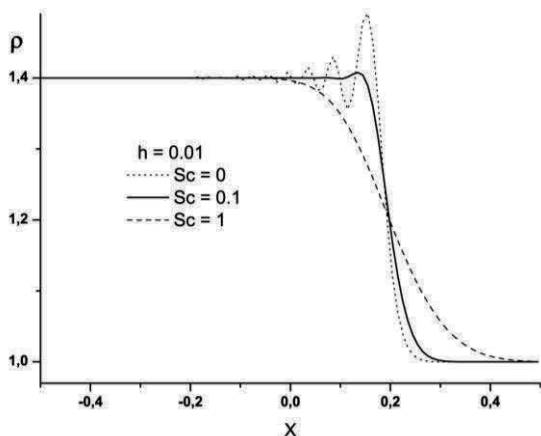


Рис. 13. Тест 6. Распределение плотности в движущемся контактном разрыве. Зависимость решения от числа Шмидта

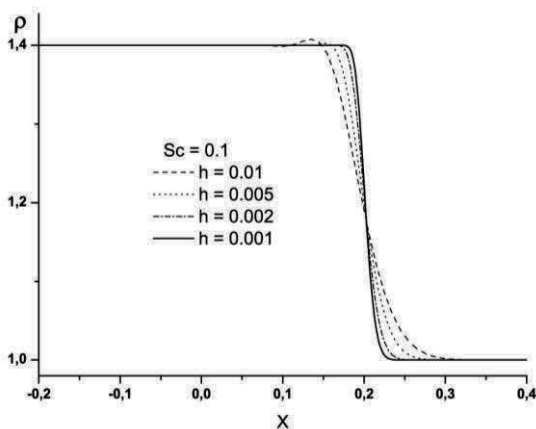


Рис. 14. Тест 6. Распределение плотности в движущемся контактном разрыве. Сходимость по сетке

Тест 7. Рассматривается задача "peak problem". Эта задача представляет собой расчет течения, включающего в себя сильную ударную волну с перепадом плотности ~ 30 , волну разрежения и контактный разрыв между ними. Расчет проведен при $\alpha = 0.3$,

$\beta = 0.3$, $Sc = 1$ и $Pr = 1$. При увеличении коэффициента α численное решение сильнее размазывается по сетке, при его уменьшении – на фронтах волн сжатия и разрежения появляются осцилляции.

При уменьшении коэффициентов вязкости и теплопроводности (число $Sc = 0.1$) или только коэффициента теплопроводности ($Pr = 1000$) численное решение теряет устойчивость.

Сходимости решения при уменьшении шага сетки для профилей плотности и скорости показана на рис. 15, 16, 17.

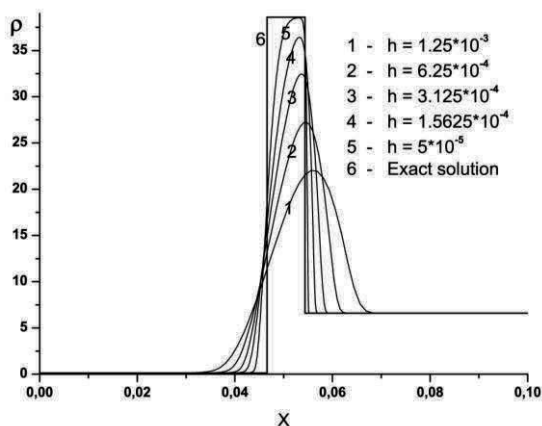


Рис. 15. Тест 7. "Peak problem". Распределение плотности.
Сходимость по сетке

Как отмечено в [32] и [33], все рассмотренные там схемы имеют недостатки при вычислении скорости, особенно в окрестности волны разрежения ($x: -0.32$), где перепад плотности очень мал и составляет 0.002 (рис. 17). На всех приведенных рисунках линия 6 обозначает автомодельное решение.

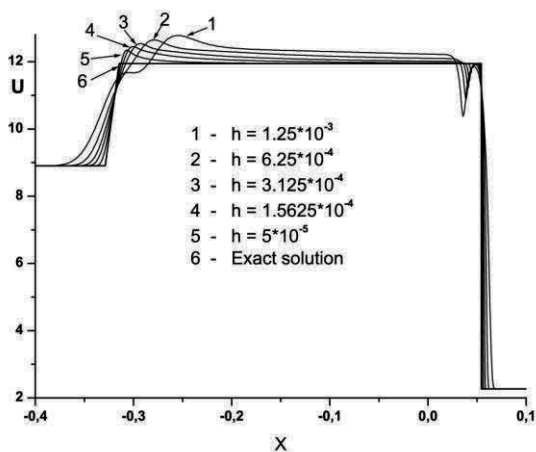


Рис. 16. Тест 7. "Peak problem". Распределение скорости.
Сходимость по сетке

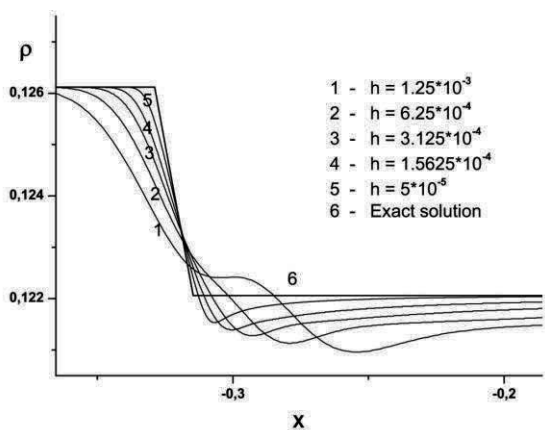


Рис. 17. Тест 7. "Peak problem". Распределение плотности в
окрестности волны разрешения. Сходимость по сетке

Тест 8. В качестве последнего теста из серии задач Римана рассмотрим задачу о сверхсильном разрыве. Речь идет о распаде разрыва с высокими перепадами плотности и давления. В качестве

начальных условий зададим $(\rho_l, u_l, p_l) = (1000, 0, 1000)$, при $-0.3 < x < 0$, $(\rho_r, u_r, p_r) = (1, 0, 1)$ при $0 < x < 0.7$, $\gamma = 1.4$. Расчет ведется до времени $t_{fin} = 0.15$. На примере решения указанной задачи в [49] проведено детальное сопоставление возможностей 8 наиболее распространенных разностных схем высоких порядков точности.

В частности, рассматривались схемы типа Годунова и различные варианты схем высокого порядка точности с расщеплением и коррекцией потока.

Оптимальные параметры расчета этой задачи для КГД алгоритма составляют $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.05$. Расчет выполнен при $Pr = 1$, $Sc = 1$.

Сходимость распределений плотности и скорости по сетке для всей области расчета показана на рис. 18 и рис. 19. В силу больших перепадов газодинамических параметров, области решения вблизи звуковой точки, контактного разрыва и ударной волны приведены отдельно.

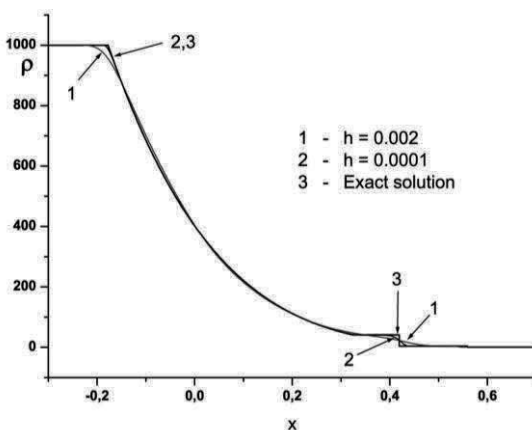


Рис. 18. Тест 8. Распределение плотности. Сходимость по сетке

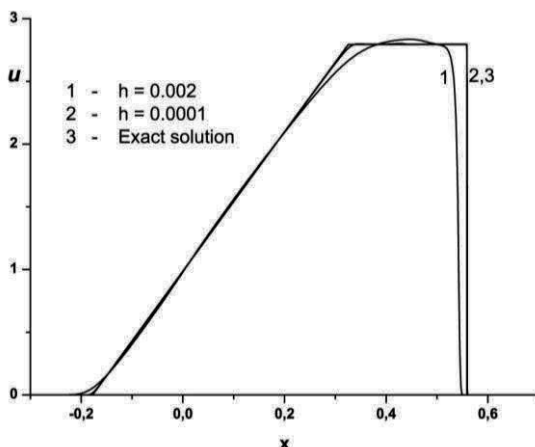


Рис. 19. Тест 8. Распределение скорости. Сходимость по сетке

Фрагменты распределений плотности и скорости в левой звуковой точке показаны на рис. 20 и рис. 21. Те же величины в середине расчетной области изображены на рис. 22 и рис. 23, и в зоне ударной волны – на рис. 24 и рис. 25.

Из приведенных данных наглядно видна достаточно быстрая сходимость разностного решения к автомодельному при сгущении пространственной сетки.

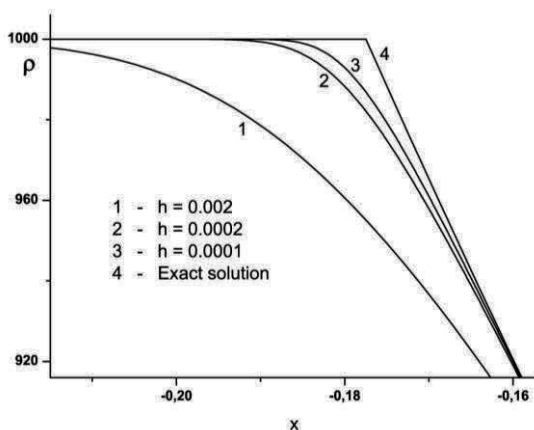


Рис. 20. Тест 8. Фрагмент распределения плотности вблизи левой звуковой точки. Сходимость по сетке

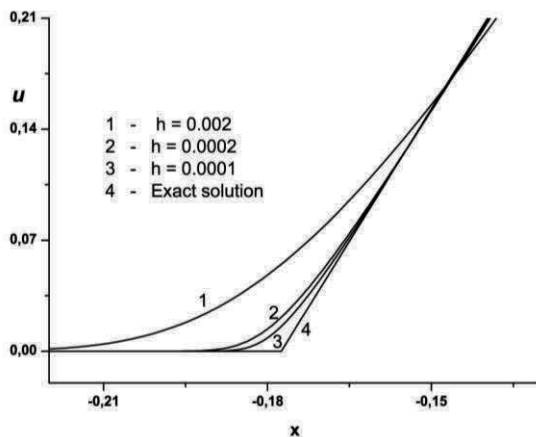


Рис. 21. Тест 8. Фрагмент распределения скорости вблизи левой звуковой точки. Сходимость по сетке

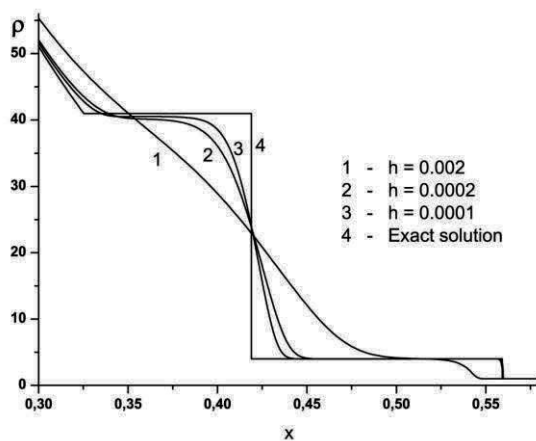


Рис. 22. Тест 8. Фрагмент распределения плотности в центре области. Сходимость по сетке

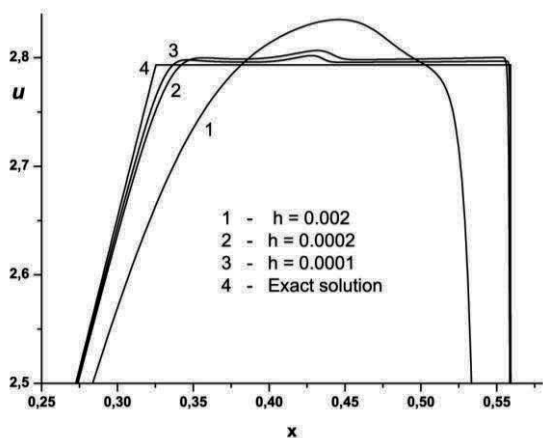


Рис. 23. Тест 8. Фрагмент распределения скорости в центре области. Сходимость по сетке

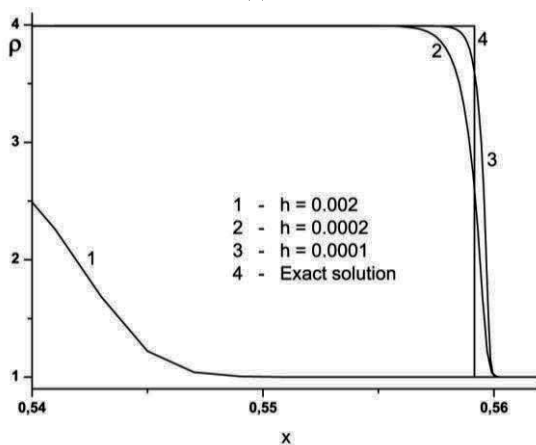


Рис. 24. Тест 8. Фрагмент распределения плотности на ударной волне. Сходимость по сетке

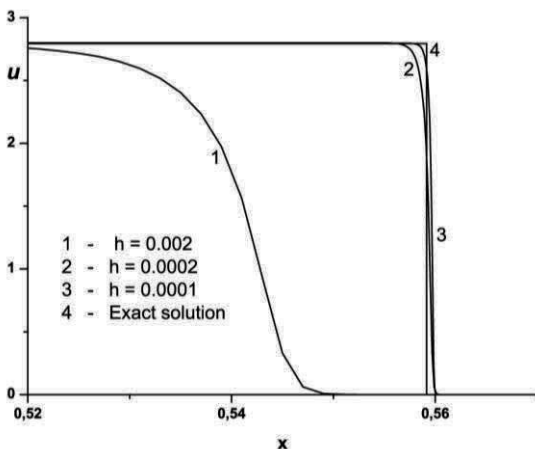


Рис. 25. Тест 8. Фрагмент распределения скорости на ударной волне. Сходимость по сетке

Показательной характеристикой решения этой задачи является распределение скорости в ударной волне. Из сопоставления рис. 25 с результатами [49], полученными на такой же пространственной сетке $h = 0.002$, следует, что на этой сетке КГД алгоритм близок по точности к рассмотренным в [49] разностным схемам. При этом численное решение, полученное по КГД алгоритму, располагается слева от автомодельного решения, в то время как все алгоритмы, изученные в [49], формируют профиль скорости, расположенный справа от автомодельного распределения. С уменьшением шага пространственной сетки точность КГД алгоритма резко увеличивается и превосходит точность исследуемых в [49] методов.

2.3. Задача о взаимодействии двух разрывов

В этом разделе решается задача Вудворда–Колелла (Woodward–Collela blast wave problem), или задача о взаимодействии двух разрывов [32, 33, 57]. В [6] эта же задача выбрана в качестве теста для алгоритмов решения уравнений Эйлера на сетках, динамически адаптирующихся к решению.

Данная задача представляет собой задачу о взаимодействии двух волн, образующихся в результате распада двух разрывов типа Римана. Для этой задачи нет автомодельного решения.

Задача решается на интервале $(-0.5, +0.5)$. В начальный момент задаются разрывы в точках $x_1 = -0.4$ и $x_2 = 0.4$. Во всей расчетной области задается плотность $\rho = 1$ и скорость $u = 0$. Начальные значения давления в трех соответствующих областях левой p_l , средней p_m и правой p_r равны $(p_l, p_m, p_r) = (1000, 0.01, 100)$. В качестве граничных условий ставятся условия отражения вида

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad u = 0.$$

Расчет ведется до времени $t_{fin} = 0.038$. В этой задаче $\gamma = 7/5$. Оптимальными параметрами расчета являются $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.4$, $Pr = 1$, $Sc = 1$. Уменьшение коэффициента α приводит к появлению осцилляций в профиле плотности.

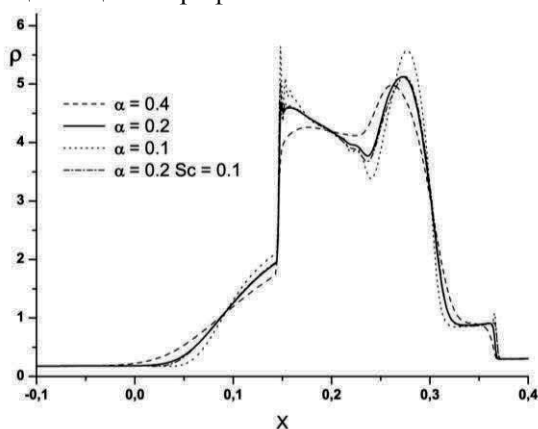


Рис. 26. Тест "blust problem". Распределение плотности.
Зависимость от параметра регуляризации

Уменьшение коэффициентов вязкости и теплопроводности ($Sc = 0.1$) также приводит к численной неустойчивости, см. рис. 26. Уменьшение численной теплопроводности ($Pr = 1000$) практически не сказывается на численном решении задачи, так как рассматриваемые здесь процессы протекают на относительно коротких временах.

Распределения плотности и скорости на последовательности сеток при выборе параметра регуляризации с коэффициентами $\alpha = 0.3$ и 0.2 представлены на рис. 27 и рис. 28.

В этой задаче чувствительными характеристиками являются распределения плотности, температуры и внутренней энергии. Из расчетов следует, что достаточно точное распределение плотности достигается лишь на подробных сетках, в то время как профили скорости (рис. 28) и давления хорошо разрешаются и на грубых сетках.

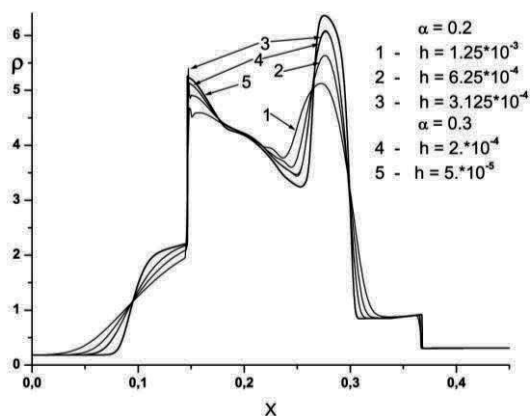


Рис. 27. Тест "blust problem". Распределение плотности.
Сходимость по сетке

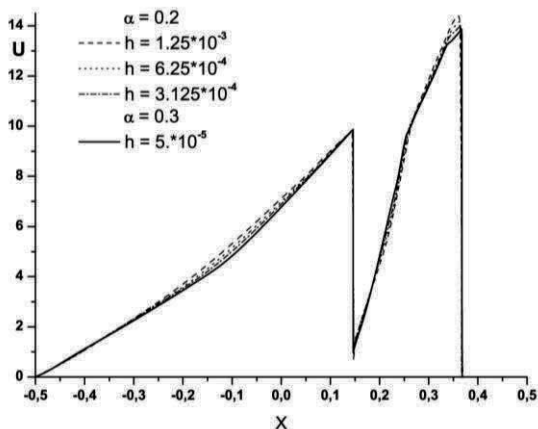


Рис. 28. Тест "blust problem". Распределение скорости.
Сходимость по сетке

2.4. Задача о взаимодействии ударной волны и волны энтропии

Задача о взаимодействии ударной волны и волны энтропии (Shu-Osher shock entropy wave interaction problem) была впервые предложена и численно решена в [47]. Этот тест показывает поведение разностного алгоритма при описании взаимодействия гладкого решения с ударной волной – а именно, описание взаимодействия движущейся ударной волны, для которой число Маха = 3, с малым возмущением энтропии. Также, как и предыдущая, эта задача не имеет автомодельного решения.

Указанный тест часто используется для апробации возможностей разностных алгоритмов. Так, в [26] этот тест выбран для демонстрации возможностей разностных схем повышенного порядка точности, в ряде работ на этом же примере демонстрируются свойства схем, предназначенных для расчетов турбулентных течений в рамках модели LES. Далее указанная задача рассматривается в постановке [33].

Задача решается в области $(-5,5)$, разрыв располагается в точке $x_0 = 4$. Начальные условия близки к условиям для задачи Римана: значения на левом интервале составляют $(\rho_l, u_l, p_l) = (3.857143, 2.629369, 10.33333)$.

На правом интервале задаются сглаженная плотность и постоянные значения скорости и давления $(\rho_r, u_r, p_r) = (1 + 0.2 \sin(5x), 0, 1)$. $\gamma = 7/5$. Время окончания расчета составляет $t_{fin} = 1.8$.

Оптимальными параметрами расчета являются $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.4$, $Pr = 1$, $Sc = 1$. Уменьшение коэффициента α приводит к появлению осцилляций в профиле плотности. Увеличение коэффициента α или коэффициентов вязкости и теплопроводности ($Sc = 10$) приводит к излишнему сглаживанию решения. Уменьшение численной теплопроводности ($Pr = 100$) практически не сказывается на численном решении задачи, см. рис. 29, где $h = 0.01$.

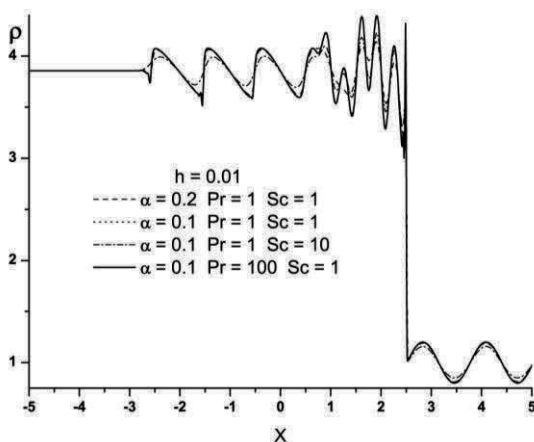


Рис. 29. Тест "Shu–Osher problem". Распределение плотности. Зависимость от параметра регуляризации

Сходимость численного решения по сетке для $\alpha = 0.2$ показана на рис. 30.

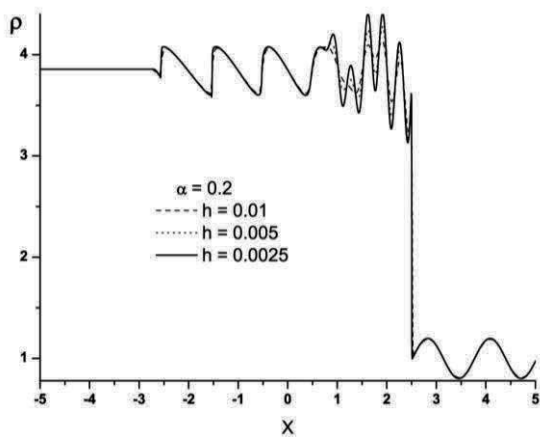


Рис. 30. Тест "Shu–Osher problem". Распределение плотности.
Сходимость по сетке

Глава 3. Свободные турбулентные течения

3.1. Введение

В качестве примера свободного нестационарного течения вдали от стенок рассмотрим вихревое течение, определяемое в начальный момент как вихрь Тейлора–Грина [4]. Это течение является одной из задач, для которых возможно численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода. Развитие течения включает две стадии. На первой из них происходит распад крупных вихрей на мелкие в ламинарном режиме. В дальнейшем, если число Рейнольдса достаточно велико, после достижения максимума скорости диссипации кинетической энергии, распад вихрей приводит к возникновению изотропного турбулентного течения. При малых числах Рейнольдса распад вихря происходит в ламинарном режиме.

Как ламинарный, так и турбулентный режимы распада хорошо изучены. Благодаря простоте численной реализации, вихрь Тейлора–Грина применяется как тест для численных алгоритмов моделирования турбулентных течений несжимаемой жидкости или слабо сжимаемого газа. При этом используются методы прямого численного моделирования (Direct Numerical Simulation, DNS) [4, 5, 41, 17, 8, 12] и методы крупных вихрей (Large-Eddy Simulation, LES) [16, 10, 56, 19].

В настоящей главе для моделирования эволюции вихря Тейлора–Грина мы применяем конечно-разностный КГД алгоритм на основе уравнений (1.8)–(1.13), (1.5)–(1.7) в трехмерной постановке.

Материалы этой главы основаны на результатах, изложенных в [83, 84, 85].

3.2. Постановка задачи о распаде вихря Тейлора–Грина и математическая модель

В соответствии с [17] рассмотрим пространственную область кубической формы: $-\pi L \leq x, y, z \leq \pi L$ в декартовых координатах. В нашем случае $\pi L = 0.016$ м. Область заполнена газом (азотом).

Используем традиционные начальные условия вихря Тейлора-Грина [4]:

$$\begin{aligned} u_x &= U_0 \sin(x/L) \cos(y/L) \cos(z/L), \\ u_y &= -U_0 \cos(x/L) \sin(y/L) \cos(z/L), \quad u_z = 0, \\ p &= p_0 + (\rho_0 U_0^2 / 16) (\cos(2x/L) + \cos(2y/L)) (\cos(2z/L) + 2). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Начальное распределение температуры является однородным по пространству: $T = T_0 = 273$ К. Начальная плотность определяется уравнением состояния идеального газа:

$$\rho = p / (RT). \quad (3.2)$$

Газовая постоянная азота $R = 297$ Дж/(кг·К). Отметим, что постоянные параметры p_0 , ρ_0 , T_0 также связаны уравнением состояния $p_0 = \rho_0 R T_0$. Введем начальное число Маха как

$$Ma = U_0 / c_{s0} = 0.1, \quad (3.3)$$

где скорость звука в азоте при начальных условиях $c_{s0} = \sqrt{\gamma R T_0} = 337$ м/с, показатель адиабаты $\gamma = 7/5$. В рассматриваемой задаче число Маха невелико, и течение можно считать слабо сжимаемым.

Введем число Рейнольдса

$$Re = \rho_0 U_0 L / \mu_0, \quad (3.4)$$

где $\mu_0 = 1.67 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с) — вязкость азота при температуре $T_0 = 273$ К [23]. В данной работе рассмотрены варианты $Re = 100$, $Re = 280$, $Re = 1600$, которые сопоставляются с данными расчетов, приведенными, соответственно, в [4], [8] и [17].

Порядок задания начальных параметров следующий. Определяем характерную скорость U_0 через (3), плотность ρ_0 через (4), давление $p_0 = \rho_0 R T_0$, затем задаем начальное распределение скорости и давления (1) и начальное распределение плотности через (2).

Граничные условия являются периодическими, что физически означает неограниченную область, заполненную системой идентичных вихрей.

Введем в области $-\pi L \leq x, y, z \leq \pi L$ равномерную по пространству и по времени сетку $\Omega_{xyz t} = \omega_x \times \omega_y \times \omega_z \times \omega_t$,
 $\omega_x = \{x_i, i = \overline{0, N-1}, x_i = hi\}$, $\omega_y = \{y_j, j = \overline{0, N-1}, y_j = hj\}$,
 $\omega_z = \{z_k, k = \overline{0, N-1}, z_k = hk\}$, $\omega_t = \{t_p, p = \overline{0, N_t}, t_p = h_t p\}$.
 Отметим, что число шагов по времени N_t заранее не определено.

Для всех газодинамических величин, зависящих от пространственных координат, введем сеточные функции: для плотности $\rho_{ijk} = \rho(x_i, y_j, z_k, t_p)$, аналогично для других величин. Размерности сеточных функций такие же, как и размерности соответствующих физических величин.

Выпишем общий вид КГД системы (1.8)–(1.13), (1.5)–(1.7) в предположении отсутствия внешних сил и источников тепла в декартовых координатах [70, 73]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla_i j_m^i = 0, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u^j + \nabla_i (j_m^i u^j) + \nabla^j p = \nabla_i \Pi^{ij}, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E + \nabla_i (j_m^i H) + \nabla_i q^i = \nabla_i (\Pi^{ij} u_j). \quad (3.7)$$

Полная энергия единицы объема E и полная удельная энтальпия H вычисляются по формулам

$$E = \rho u^2 / 2 + p / (\gamma - 1), \quad H = (E + p) / \rho. \quad (3.8)$$

Вектор плотности потока массы j_m^i определяется следующим образом:

$$j_m^i = \rho(u^i - w^i), \quad w^i = \frac{\tau}{\rho} (\nabla_j \rho u^i u^j + \nabla^i p). \quad (3.9)$$

Выражения для тензора вязких напряжений Π^{ij} и теплового потока q^i записываются так

$$\Pi^{ij} = \Pi_{NS}^{ij} + \tau u_i \rho (u_k \nabla^k u_j + \frac{1}{\rho} \nabla_j p) + \tau \delta^{ij} (u_k \nabla^k p + \gamma p \nabla^k u_k), \quad (3.10)$$

$$\Pi_{NS}^{ij} = \mu (\nabla^i u^j + \nabla^j u^i - \frac{2}{3} \nabla^k u_k) + \zeta \delta^{ij} \nabla^k u_k, \quad (3.11)$$

$$q^i = q_{NS}^i - \tau u_i \rho (u_j \nabla^j \varepsilon + p u_j \nabla^j \frac{1}{\rho}), \quad q_{NS}^i = -\kappa \nabla^i T. \quad (3.12)$$

Здесь – символ Кронекера ($\delta^{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta^{ij} = 0$ при $i \neq j$) и $\varepsilon = p/(\rho(\gamma - 1))$ – внутренняя энергия единицы массы газа. Π_{NS}^{ij} и q_{NS}^i – тензор вязких напряжений и тепловой поток в системе Навье–Стокса.

Выпишем систему (3.5)–(3.12) в переменных в переменных x, y, z в форме, удобной для построения численного алгоритма.

Уравнение для плотности:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} j_{mx} + \frac{\partial}{\partial y} j_{my} + \frac{\partial}{\partial z} j_{mz} = 0, \quad (3.13)$$

где

$$\begin{aligned} j_{mx} &= \rho u_x - \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x^2 + p) - \tau \frac{\partial}{\partial y} \rho u_x u_y - \tau \frac{\partial}{\partial z} \rho u_x u_z, \\ j_{my} &= \rho u_y - \tau \frac{\partial}{\partial x} \rho u_x u_y - \tau \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_y^2 + p) - \tau \frac{\partial}{\partial z} \rho u_y u_z, \\ j_{mz} &= \rho u_z - \tau \frac{\partial}{\partial x} \rho u_x u_z - \tau \frac{\partial}{\partial y} \rho u_y u_z - \tau \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z^2 + p). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Уравнение для x -компоненты импульса:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_x = \frac{\partial}{\partial x} (\Pi_{xx} - j_{mx} u_x - p) + \frac{\partial}{\partial y} (\Pi_{yx} - j_{my} u_x) + \frac{\partial}{\partial z} (\Pi_{zx} - j_{mz} u_x), \quad (3.15)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_{xx} = & \left(\left[\frac{4}{3} \mu + \zeta \right] + \tau \rho p + \tau \rho u_x^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} u_x + 2 \tau u_x \frac{\partial}{\partial x} p + \left(-\frac{2}{3} \mu + \zeta + \tau \rho p \right) \frac{\partial}{\partial y} u_y + \\ & + \tau u_y \frac{\partial}{\partial y} p + \tau \rho u_x u_y \frac{\partial}{\partial y} u_x + \left(-\frac{2}{3} \mu + \zeta + \tau \rho p \right) \frac{\partial}{\partial z} u_z + \tau u_z \frac{\partial}{\partial z} p + \tau \rho u_x u_z \frac{\partial}{\partial z} u_x, \\ \Pi_{yx} = & (\mu + \tau \rho u_y^2) \frac{\partial}{\partial y} u_x + \mu \frac{\partial}{\partial x} u_y + \tau \rho u_y u_x \frac{\partial}{\partial x} u_x + \tau \rho u_y u_z \frac{\partial}{\partial z} u_x + \tau u_y \frac{\partial}{\partial x} p, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\Pi_{zx} = (\mu + \tau \rho u_z^2) \frac{\partial}{\partial z} u_x + \mu \frac{\partial}{\partial x} u_z + \tau \rho u_z u_x \frac{\partial}{\partial x} u_x + \tau \rho u_z u_y \frac{\partial}{\partial y} u_x + \tau u_z \frac{\partial}{\partial x} p.$$

Уравнение для Y -компоненты импульса:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_y = \frac{\partial}{\partial x} (\Pi_{xy} - j_{mx} u_y) + \frac{\partial}{\partial y} (\Pi_{yy} - j_{my} u_y - p) + \frac{\partial}{\partial z} (\Pi_{zy} - j_{mz} u_y), \quad (3.17)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_{xy} = & (\mu + \tau \rho u_x^2) \frac{\partial u_y}{\partial x} + \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} + \tau \rho u_x u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \tau \rho u_x u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} + \tau u_x \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \Pi_{yy} = & \left(\frac{4}{3} \mu + \zeta + \tau \rho p + \tau \rho u_y^2 \right) \frac{\partial u_y}{\partial y} + 2 \tau u_y \frac{\partial p}{\partial y} + \left(-\frac{2}{3} \mu + \zeta + \tau \rho p \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \\ & + \tau \rho u_y u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + \tau u_x \frac{\partial p}{\partial x} + \left(-\frac{2}{3} \mu + \zeta + \tau \rho p \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \tau \rho u_y u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} + \tau u_z \frac{\partial p}{\partial z}, \\ \Pi_{zy} = & (\mu + \tau \rho u_z^2) \frac{\partial u_y}{\partial z} + \mu \frac{\partial u_z}{\partial y} + \tau \rho u_z u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + \tau \rho u_z u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \tau u_z \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Уравнение для Z -компоненты импульса:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_z = \frac{\partial}{\partial x} (\Pi_{xz} - j_{mx} u_z) + \frac{\partial}{\partial y} (\Pi_{yz} - j_{my} u_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\Pi_{zz} - j_{mz} u_z - p), \quad (3.19)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_{xz} = & (\mu + \tau \rho u_x^2) \frac{\partial u_z}{\partial x} + \mu \frac{\partial u_x}{\partial z} + \tau \rho u_x u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + \tau \rho u_x u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \tau u_x \frac{\partial p}{\partial z}, \\ \Pi_{yz} = & (\mu + \tau \rho u_y^2) \frac{\partial u_z}{\partial y} + \mu \frac{\partial u_y}{\partial z} + \tau \rho u_y u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + \tau \rho u_y u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \tau u_y \frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{zz} = & \left(\frac{4}{3} \mu + \zeta + \tau \rho p + \tau \rho u_z^2 \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} + 2 \pi_z \frac{\partial p}{\partial z} + \left(-\frac{2}{3} \mu + \zeta + \tau \rho p \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \\ & + \tau \rho u_z u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + \pi_x \frac{\partial p}{\partial x} + \left(-\frac{2}{3} \mu + \zeta + \tau \rho p \right) \frac{\partial u_y}{\partial y} + \tau \rho u_z u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + \pi_y \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned}$$

Уравнение для полной энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E = & \frac{\partial}{\partial x} (\Pi_{xx} u_x + \Pi_{xy} u_y + \Pi_{xz} u_z - j_{mx} H - q_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\Pi_{yx} u_x + \Pi_{yy} u_y + \\ & + \Pi_{yz} u_z - j_{my} H - q_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\Pi_{zx} u_x + \Pi_{zy} u_y + \Pi_{zz} u_z - j_{mz} H - q_z), \end{aligned} \quad (3.21)$$

где

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}, \\ q_x = & -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} - u_x R_q, \quad q_y = -\kappa \frac{\partial T}{\partial y} - u_y R_q, \quad q_z = -\kappa \frac{\partial T}{\partial z} - u_z R_q, \\ R_q = & \tau \rho \frac{1}{\gamma - 1} \left\{ u_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) + u_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho} \right) + u_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} \right) \right\} + \\ & + \tau \rho p \left\{ u_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \right) + u_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \right) + u_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Компоненты Π^{ij} и j_m^i , входящие в (3.21), определены в (3.14)–(3.20). Коэффициент теплопроводности выражается соотношением:

$$\kappa = \frac{\mu \gamma R}{\text{Pr}(\gamma - 1)}, \quad (3.23)$$

где Pr – число Прандтля. Коэффициент динамической вязкости μ в выражениях для Π_{NS}^{ij} и q_{NS}^i определим через температурную зависимость:

$$\mu = \mu_0 (T / T_0)^\omega, \quad (3.24)$$

где ω описывает межмолекулярное взаимодействие в газе [3]. Коэффициент второй (объемной) вязкости ζ , входящий в (3.11), положим равным нулю, согласно условию из [17]:

$$\zeta = 0. \quad (3.25)$$

Релаксационный параметр τ определим как

$$\tau = \alpha h / c_s, \quad (3.26)$$

где $c_s = \sqrt{\gamma RT}$ – местная скорость звука и h – величина шага пространственной сетки. Слагаемые с коэффициентом τ представляют собой подсеточную диссипацию, которая сглаживает пульсации газодинамических величин на масштабах порядка шага сетки. Коэффициент α можно рассматривать как настроечный параметр, определяющий величину подсеточной диссипации. Отметим, что α является единственным настроечным параметром КГД алгоритма. Опыт численного моделирования показывает, что значения α лежат в диапазоне от 0 до 1.

Для численного решения начально-краевой задачи для КГД-уравнений (3.13)–(3.26) с указанными выше начальными и граничными условиями пространственные производные аппроксимируются на построенной сетке центральными разностями со вторым порядком, а для производных по времени используется явный метод Эйлера. Алгоритм и реализация разностной схемы в общих чертах такие же, как и для одномерных задач, описанных в главе 2.

Расчет по явной схеме соответствует эволюции газодинамического течения по времени. Для реализации периодических граничных условий используем фиктивные ячейки. Тогда, к примеру, сетку с $N = 130$ будем обозначать как 128^3 (т.е. без учета фиктивных ячеек). Шаг по времени определим из условия Куранта [70]: $h_t = \beta h / c_{s0}$, где β – число Куранта, $c_{s0} = \sqrt{\gamma RT_0}$ – скорость звука при начальных условиях.

Расчеты проводятся в размерных переменных. Для сравнения с данными литературы авторы приводят результаты в безразмерном виде. При этом в качестве определяющих параметров используются L , U_0 и ρ_0 . Таким образом, безразмерное значение времени $t_{dl} = t / t_0$, где $t_0 = L / U_0 \approx 1.512 \cdot 10^{-4}$ с, а безразмерное значение удельной кинетической энергии $E_{dl} = E / (\rho_0 U_0^2)$. Отметим, что безразмерный интервал $t = 1$ соответствует периоду вращения начального вихря (3.1).

Длину свободного пробега молекул газа для начальных условий определим так: $\lambda_0 = \mu_0 / (\rho_0 \sqrt{2\pi RT_0} \cdot \Omega/4)$, $\Omega = 30 / ((7 - 2\omega)(5 - 2\omega))$ [3]. Используемая математическая модель требует выполнения условия $\lambda_0 \ll h$.

Для $Re = 100$ оценка дает $\lambda_0 = 6.2 \cdot 10^{-6}$ м, в то время как минимальная величина шага сетки $h = 2.5 \cdot 10^{-4}$ м.

Расчеты проводились на многопроцессорном вычислительном комплексе К-100 [28], при этом применялось распараллеливание вычислений, основанное на декомпозиции расчетной области параллельными плоскостями. Такая технология использует стандарт передачи сообщений MPI и с успехом применялась во многих работах авторов, например в [81, 82, 83] и более поздних. Программный комплекс обладает полной переносимостью между платформами, поддерживающими язык Си и стандарт MPI. Алгоритм распараллеливания позволяет добиться линейного роста производительности вычислений с ростом числа вычислительных узлов.

3.3. Результаты расчетов для $Re = 100$

На рис. 31 представлена эволюция поверхностей уровня z -компоненты безразмерной завихренности поля скорости, т. е. z -компоненты ротора скорости:

$$V_z = \partial u_y / \partial x - \partial u_x / \partial y \quad (3.27)$$

Здесь $Re = 100$, желтый цвет соответствует $V_z = 0.2$, голубой $V_z = -0.2$. Поверхности уровня приведены для следующих моментов безразмерного времени: от $t = 0, 5, 10, 15, 20, 22.5$.

Параметры расчета следующие: размер сетки 128^3 , шаг сетки $h = 2.5 \cdot 10^{-4}$ м, $\alpha = 0.1$, число Куранта $\beta = 0.1$. Видно, что регулярное в начальный момент времени распределение скорости (3.1) (рис. 31) распадается на мелкие структуры. Постепенно, под влиянием вязкости, вихрь полностью исчезает.

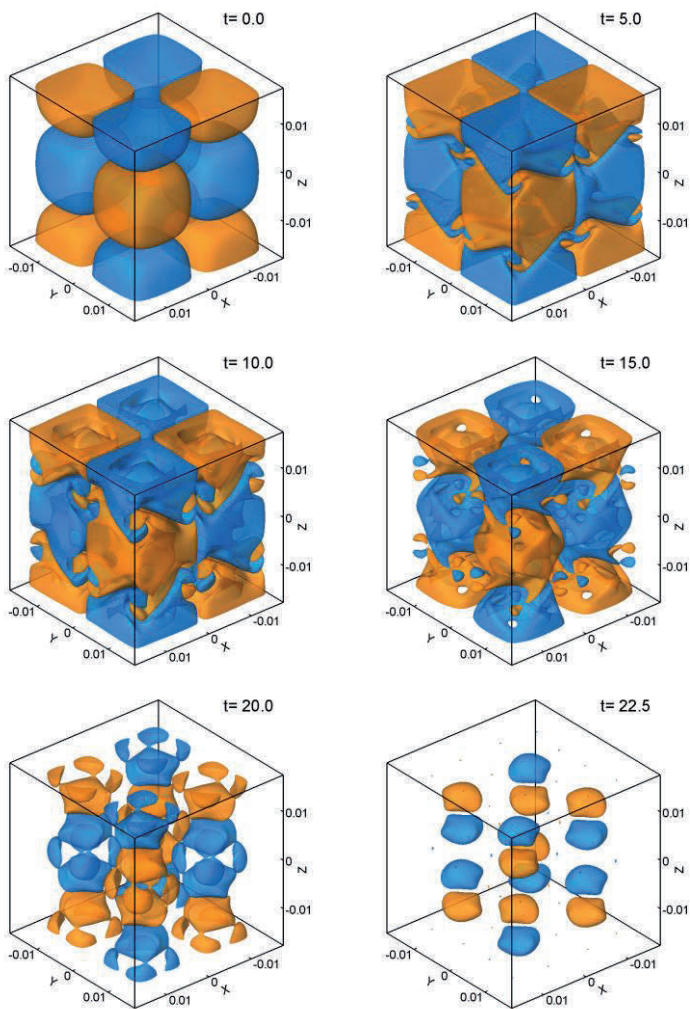


Рис. 31. Эволюция поверхностей уровня z -компоненты завихренности поля скорости для $Re = 100$

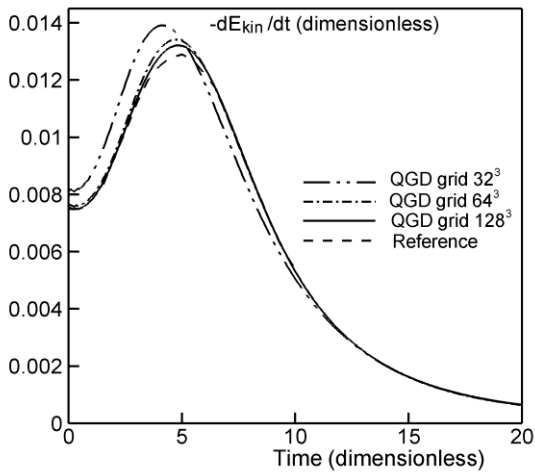
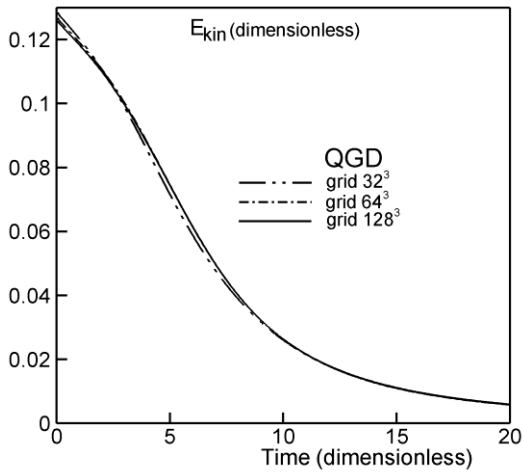


Рис. 32. Профили кинетической энергии и скорости ее диссипации для $Re = 100$, сходимость по сетке

На рис. 32 (вверху) представлена зависимость средней по рассматриваемому объему V_0 удельной кинетической энергии газа E_{kin} от времени:

$$E_{kin} = \frac{1}{\rho_0 U_0^2 V_0} \int (1/2) \rho (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) dx dy dz \quad (3.28)$$

Кинетическая энергия и время представлены в безразмерном виде. Использованы три пространственные сетки: 32^3 (с шагом $h=10^{-3}$ м), 64^3 (с шагом $h=5 \cdot 10^{-4}$ м) и 128^3 (с шагом $h=2.5 \cdot 10^{-4}$ м), $\alpha=0.1$.

Рис. 32 (внизу) демонстрирует зависимость скорости диссипации кинетической энергии $= -dE_{kin}/dt$ от времени и сходимость результатов по сетке для сеток 32^3 , 64^3 и 128^3 . Пунктирная кривая взята из работы [4], авторы которой использовали различные варианты разрывного метода Галеркина для несжимаемой жидкости. Видно, что полученные авторами графики зависимости скорости диссипации энергии для сеток 64^3 и 128^3 находятся в хорошем согласии с эталонными результатами из [4]

Максимальное значение $= -dE_{kin}/dt$ для $Re=100$ соответствует времени $t=4.5$. Этот момент времени разделяет две стадии эволюции вихря Тейлора–Грина. При $t < 4.5$ течение является ламинарным для всех значений числа Рейнольдса. При $t > 4.5$ течение остается ламинарным для малых значений числа Рейнольдса, и становится турбулентным с его увеличением.

К моменту $t=4.5$ течение еще сохраняет «память» о начальном распределении скорости и имеет анизотропный характер (рис. 31). В дальнейшем картина течения также остается анизотропной. Таким образом, при распаде одиночного вихря для $Re=100$ на протяжении всего процесса эволюции течение носит ламинарный характер.

При этом не образуется хаотичное поле мелких вихрей, характерное больших чисел Рейнольдса. Описанный характер затухания

вихря Тейлора–Грина соответствует данным, изложенным в [4] для ламинарных течений, соответствующих $Re < 500$.

На рис. 33 представлены профили зависимости средней по объему удельной кинетической энергии E_{kin} (вверху) и скорости ее диссипации (внизу) от параметра регуляризации α . Для $Re = 100$ изменение коэффициента α мало влияет на результаты расчетов. Тем не менее, увеличение α дает возможность пропорционально увеличить число Куранта. Сильное уменьшение α может привести к нефизичным осцилляциям, и оптимальное значение α связано с желаемым числом Куранта. Эти выводы соответствуют опыту использования КГД алгоритма в расчетах ламинарных нестационарных течений [73].

3.4. Результаты расчетов для $Re = 280$

На рис. 34 представлена эволюция поверхностей уровня z -компоненты безразмерной завихренности поля скорости (3.27) для $Re = 280$. Желтый цвет соответствует $V_z = 0.2$, голубой $V_z = -0.2$. Параметры расчета следующие: размер сетки 128^3 , шаг сетки $h = 2.5 \cdot 10^{-4}$ м, $\alpha = 0.1$, число Куранта $\beta = 0.1$. Поверхности уровня приведены для тех же моментов безразмерного времени, что и для $Re = 100$.

На рис. 35 представлены профили зависимости от времени средней по объему удельной кинетической энергии E_{kin} (27) и скорости ее диссипации $-dE_{kin}/dt$ для $Re = 280$.

Сплошные и штрих-пунктирные профили получены авторами, а пунктирные – эталонные результаты из [8], полученные посредством спектрального метода (Fergus pseudo-spectral code) и разрывного метода Галеркина с 96^3 степенями свободы. Размерности разностных сеток 64^3 (с шагом $h = 5 \cdot 10^{-4}$ м, штрих-пунктирная кривая) и 128^3 (с шагом $h = 2.5 \cdot 10^{-4}$ м, сплошная кривая), $\alpha = 0.1$ в обоих случаях. Результаты расчета на сетке 128^3 близки к эталонным данным.

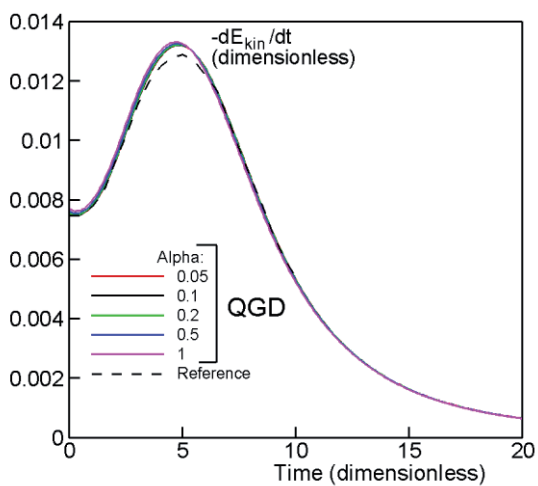
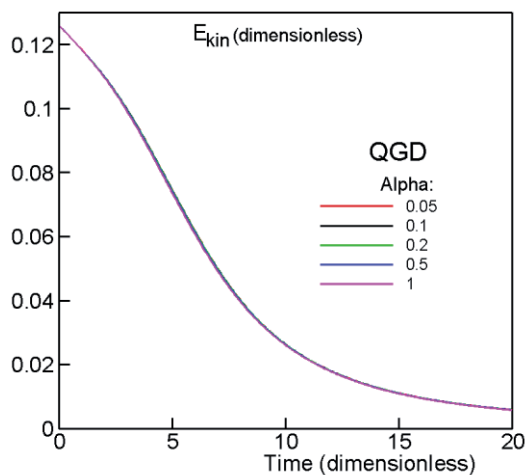


Рис. 33. Профили кинетической энергии и скорости ее диссипации для $Re = 100$, сходимость по параметру регуляризации

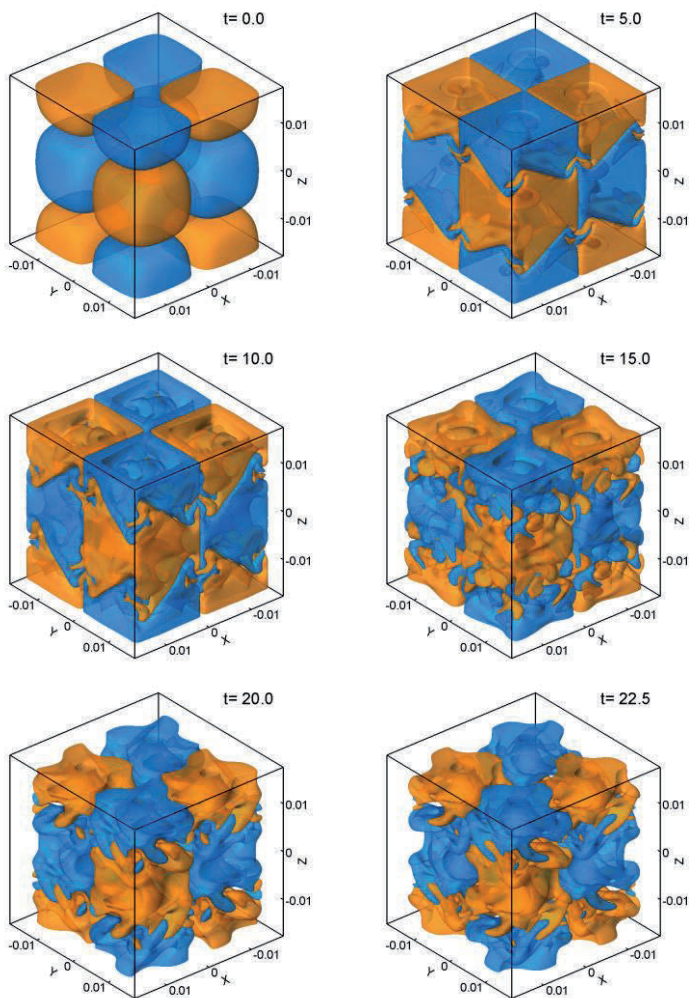


Рис. 34. Эволюция поверхностей уровня z -компоненты завихренности поля скорости для $Re = 280$

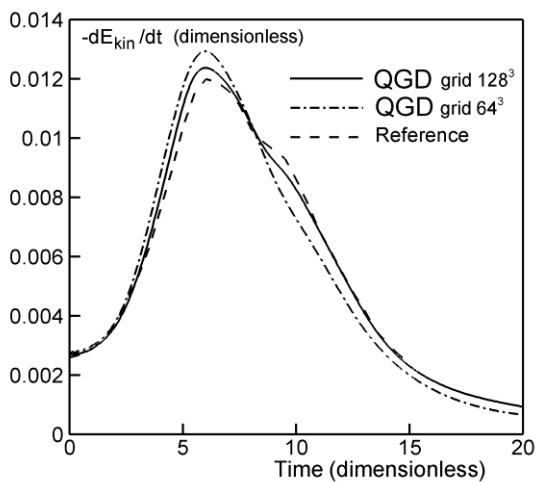
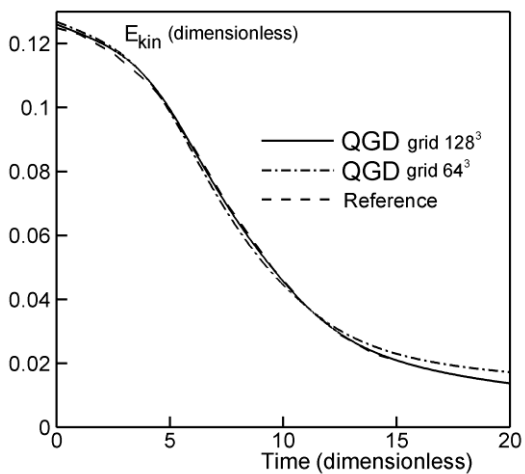


Рис. 35. Профили кинетической энергии и скорости ее диссипации для $Re = 280$, сходимость по сетке

3.5. Результаты расчетов для $Re = 1600$

На рис. 36 представлена эволюция поверхностей уровня z -компоненты завихренности поля скорости (3.27) для $Re = 1600$. Красный цвет соответствует $V_z = 0.7$, синий $V_z = -0.7$. Поверхности уровня приведены для тех же моментов безразмерного времени, что и для $Re = 100$ и $Re = 280$. Параметры расчета, представленного на рис. 1, следующие: размер сетки 128^3 , шаг сетки $h = 2.5 \cdot 10^{-4}$ м, $\alpha = 0.1$.

Из рис. 36 видно, что регулярное в начальный момент времени распределение скорости (3.1) распадается на мелкие структуры. При $t = 5$ и 10 эти мелкие структуры еще сохраняют анизотропию начального распределения вихря Тейлора–Грина, но позже течение становится хаотическим, и возникает почти изотропная вихревая турбулентная структура. К этому моменту течение можно считать турбулентным. Наблюдаемые здесь особенности эволюции течения хорошо согласуются с анализом эволюции вихря Тейлора–Грина, приведенным в [4] для $Re > 500$, в [41] для $Re = 1600$ и в [12] для $Re = 1500$.

На рис. 37 (вверху) представлены зависимости средней по объему удельной кинетической энергии газа E_{kin} (3.27) от времени для $Re = 1600$ в безразмерном виде.

Сплошные кривые соответствуют расчетам, проведенным авторами. При этом размерности разностных сеток 64^3 с шагом $h = 5 \cdot 10^{-4}$ м и 128^3 с шагом $h = 2.5 \cdot 10^{-4}$ м, $\alpha = 0.1$. Пунктирная кривая представляет эталонный результат из [41], также представленный в цифровом виде в [17], полученный с использованием спектрального метода, а также различных вариантов разрывного метода Галеркина.

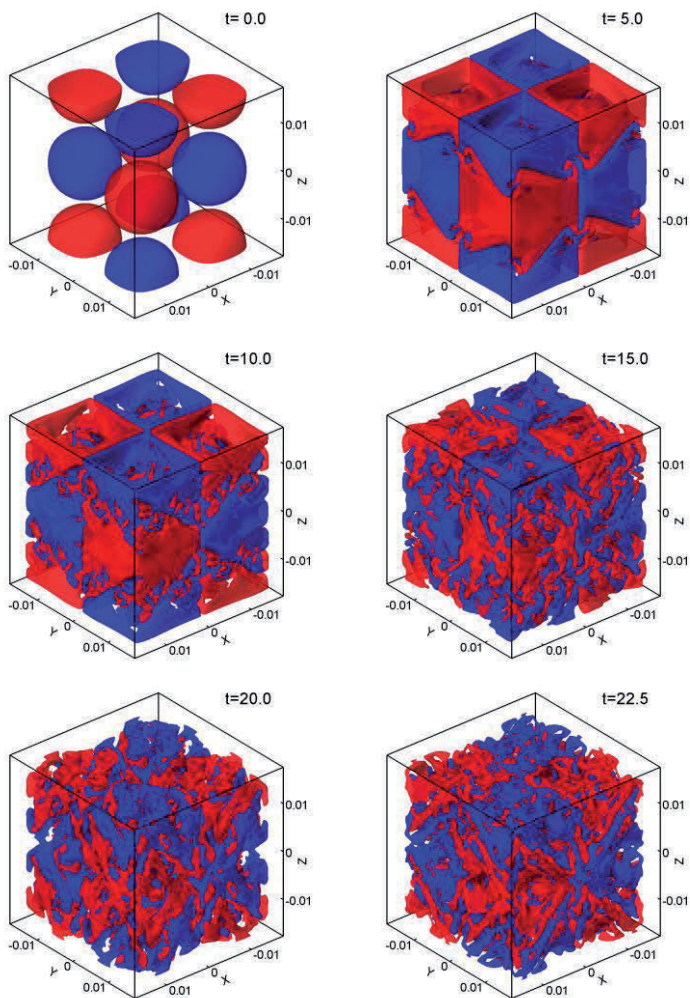


Рис. 36. Эволюция поверхностей уровня z -компоненты завихренности поля скорости для $Re = 1600$

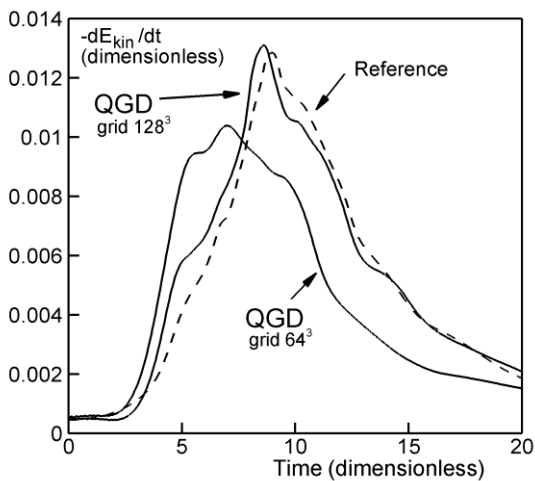
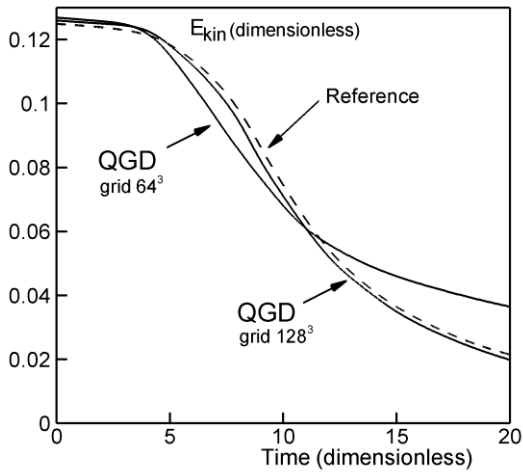


Рис. 37. Профили кинетической энергии и скорости ее диссипации для $Re = 1600$, сходимость по сетке

Рис. 37 (внизу) демонстрирует зависимость скорости диссипации кинетической энергии от времени $-dE_{kin}/dt$. Как и на рис. 37 сле-

ва, сплошные кривые получены авторами, а пунктирная взята из [41] и [17]. Видно, что результаты расчета на подробной пространственной сетке находятся в хорошем согласии с эталонными данными [41] и [17].

Прямое численное моделирование (DNS) распада вихря Тейлора–Грина представлено во многих работах, например в [4, 5, 41, 17, 8, 12]. В частности, в [12] вычисления проводились для $Re = 1500$ на сетке 256^3 с использованием методов аппроксимации высокого порядка точности по пространству и времени. В [12] указано, что моделирование DNS для $Re = 1500$ может иметь достаточную точность на сетках не менее чем 242^3 , при использовании равномерных сеток в декартовых координатах.

Для этого случая авторы [4] оценивают ошибку прямого численного моделирования в несколько процентов. С ростом числа Рейнольдса, для корректного получения закона диссипации Колмогорова-Обухова необходимое число точек сетки следует увеличивать как $N^3 \sim R^2$.

Результаты моделирования с использованием КГД-алгоритма на сетке 128^3 находятся в очень хорошем согласии с результатами DNS из [4] и [12], полученными на сетках 256^3 .

Методы крупных вихрей (LES) позволяют использовать сетки меньшей размерности по сравнению с DNS. Результаты LES-моделирования для $Re = 1500$ с использованием модели Смагоринского на сетке 64^3 приведены в [12]. При этом применен динамический вариант модели Смагоринского, в котором величина подсеточной диссипации автоматически адаптируется к масштабам течения.

В этих расчетах максимальное значение скорости диссипации кинетической энергии $-dE_{kin}/dt$ оказывается равным 0.006 (см. рис. 8.9 из [12]). КГД алгоритм на сетке 64^3 дает значение максимума 0.01, в то время как эталонное значение 0.012 (см. рис. 4). Таким образом, при моделировании вихря Тейлора–Грина, LES

метод оказывается менее точным, чем КГД алгоритм и приводит к излишней диссипации.

3.6. Влияние параметров расчета

Зависимость численного решения от шага пространственной сетки h можно видеть на рис. 37 для $\alpha = 0.1$. Увеличение шага приводит к сглаживанию кривых и смещает максимум скорости диссипации энергии в сторону меньших значений времени. Таким образом, увеличение шага сетки в некотором смысле аналогично уменьшению числа Рейнольдса.

Сходимость численного решения в турбулентном случае – более сложная проблема, нежели в ламинарном. При моделировании ламинарных течений уменьшение пространственного шага и параметра α приводит к пропорциональному увеличению точности решения. В турбулентном случае уменьшение пространственного шага позволяет разрешать на сетке мелкие вихревые структуры, невидимые на грубой сетке. При этом могут возникнуть нелинейные эффекты в процессе сходимости решения.

КГД алгоритм, используемый авторами, имеет только один настроечный параметр α (3.26). При моделировании турбулентного течения оптимальное значение α может зависеть от шага сетки и числа Рейнольдса. Влияние параметра α на результаты расчетов на сетке 128^3 для $Re = 1600$ показано на рис. 38.

Увеличение α от 0.05 to 1 делает кривые более гладкими, и меняет форму профилей скорости диссипации энергии в окрестности максимума. Подобный эффект наблюдается при уменьшении размерности сетки: $\alpha = 1$ на сетке 128^3 аналогично значению $\alpha = 0.1$ на сетке 64^3 (рис. 13, справа). Как видно, оптимальное значение α для $Re = 1600$ на сетке 128^3 оказывается равным $\alpha = 0.1$.

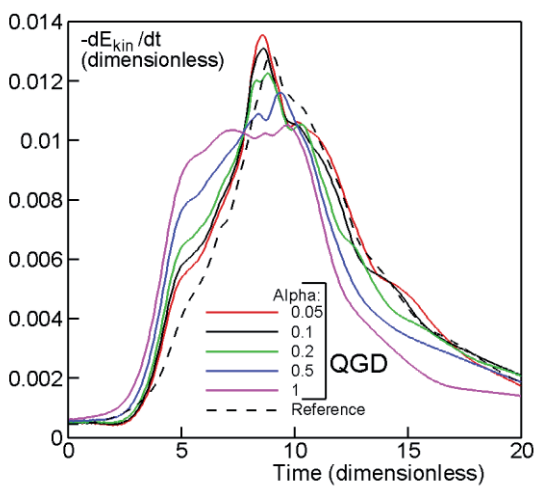
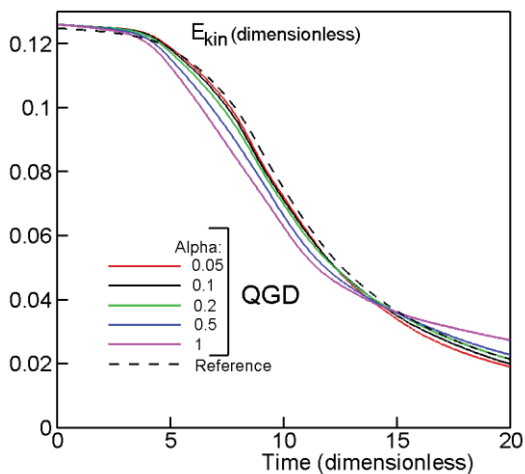


Рис. 38. Профили кинетической энергии и скорости ее диссипации для $Re=1600$, сходимость по параметру регуляризации

3.7. Энергетический спектр

Максимальное значение скорости диссипации энергии определяет зону ламинарно-турбулентного перехода и формирование спектра Колмогорова–Обухова с показателем $-5/3$.

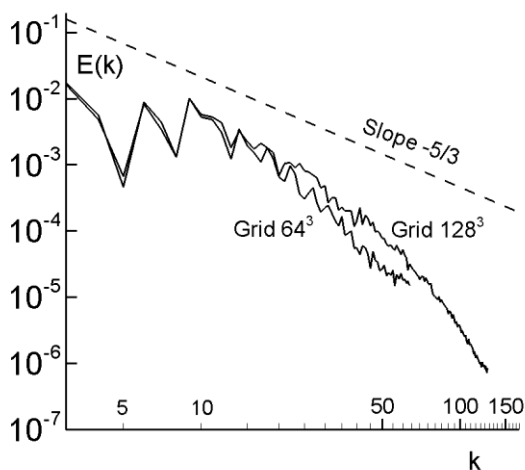


Рис. 39. Спектр кинетической энергии для $Re = 1600$

Профиль спектральной плотности кинетической энергии $E(k)$ изображен на рис. 39 для $Re = 1600$. Также для сравнения на рис. 39 изображена прямая с угловым коэффициентом $-5/3$.

Как и в [12], энергетический спектр вычисляется в момент времени $t = 8.5$, когда профиль диссипации энергии достигает максимума (рис. 37 справа). На рис. 39 показан энергетический спектр на сетках 64^3 и 128^3 . Кривые похожи друг на друга, что доказывает сходимость решения по сетке. Наклон спектральных кривых для обеих сеток хорошо аппроксимируется законом Колмогорова–Обухова. Это говорит о существовании инерционного интервала в процессе эволюции течения. Увеличение числа точек сетки делает спектральную кривую более гладкой и близкой к прямой с угловым коэффициентом $-5/3$.

Полученные спектральные кривые очень похожи на результаты для $Re=1600$, показанные на рис. 4 из [8], а также на кривую для $Re=1500$, представленную на рис. 8.3 из [12].

Алгоритм вычисления энергетического спектра детально описан в [83]. В настоящей работе использована кубическая расчётная область, и вычисление коэффициентов Фурье выглядит следующим образом:

$$a_x^{lmn} = 8 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} C_i C_j C_k \sqrt{\frac{\rho_{ijk}}{2}} u_{xijk} \cos\left(\frac{l\pi i}{N-1}\right) \cos\left(\frac{m\pi j}{N-1}\right) \cos\left(\frac{n\pi k}{N-1}\right) \quad (3.29)$$

Величина $C_i = 1$ при $i \neq 0$ и $i \neq N-1$, $C_i = 1/2$ при $i=0$ или $i=N-1$. Аналогично определяются C_j и C_k . Индексы l, m, n принимают значения от 0 до $N-2$. Заменяя в (3.7) u_{xijk} на u_{yijk} и u_{zijk} , получим формулы для a_y^{lmn} и a_z^{lmn} .

Введем a^{lmn} :

$$a^{lmn} = C_l C_m C_n ((a_x^{lmn})^2 + (a_y^{lmn})^2 + (a_z^{lmn})^2),$$

где $C_l = 1$ при $l \neq 0$, $C_l = 1/2$ при $l=0$. Аналогично определяются C_m и C_n .

Введем энергетический спектр следующим образом:

$$E(k) = (N-1)^{-6} \sum_{l,m,n} a^{lmn}, \quad k-1/2 \leq (l^2 + m^2 + n^2)^{1/2} < k+1/2.$$

Здесь k – целое волновое число, $0 \leq k \leq N-2$. Исходя из равенства Парсеваля, нетрудно показать:

$$\int_0^{N-1} E(k) dk \approx \frac{1}{V_0} \int_{V_0} (1/2) \rho(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) dx dy dz$$

Это приближенное равенство использовалось для проверки корректности вычисления спектра с использованием метода трапеций при численном интегрировании. При этом последнее равенство удовлетворялось с относительной точностью порядка 10^{-3} .

3.8. Общие замечания

При численном моделировании турбулентных течений важно использовать метод, сохраняющий симметрию течения. Чем лучше численный метод сохраняет симметрию, тем лучше воспроизводятся мелкомасштабные структуры течения [39, 54]. Симметрия численного решения при использовании КГД алгоритма обеспечивается использованием только центральных разностей при аппроксимации пространственных производных.

Поскольку вычисления в настоящей работе проводятся в полной расчётной области, можно продемонстрировать сохранение симметрии при использовании КГД алгоритма. На рис. 40 изображены линии тока и контуры завихренности V_z (3.27) в сечении $z = 0.008$ м для $Re = 1600$ (вверху) и $Re = 100$ (внизу) при $t = 20$.

При $Re = 1600$ наблюдается развитая вихревая структура течения, в то время как при $Re = 100$ мелкие вихри отсутствуют. Кроме того, величина завихренности для $Re = 1600$ значительно выше, чем для $Re = 100$. Рис. 40 демонстрирует такую же симметрию вычисленного решения относительно точки $x = 0$, $y = 0$, как и симметрия начальных условий (1). Например, для $Re = 1600$ в симметрично расположенных точках с координатами $(-0.008125, -0.008125, -0.008125)$ и $(0.008125, 0.008125, 0.008125)$ значения V_z одинаковы и равны 0.229425. Это говорит о корректности и сохранении симметрии при численном моделировании.

Для сравнения результатов моделирования, полученных при различных числах Рейнольдса, на рис. 41 приведены профили скорости диссипации кинетической энергии в зависимости от времени для трех значений числа Рейнольдса: 100, 280 и 1600. При этом $\alpha = 0.1$, использована сетка 128^3 . Также на рис. 41 приведены эталонные данные из [4], [8] и [17], относящиеся к случаю несжимаемой жидкости.

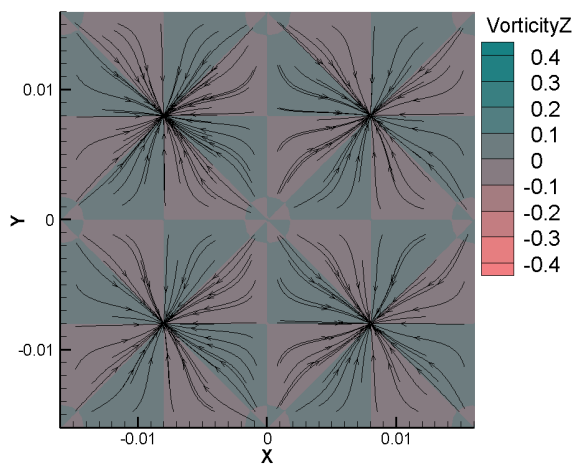
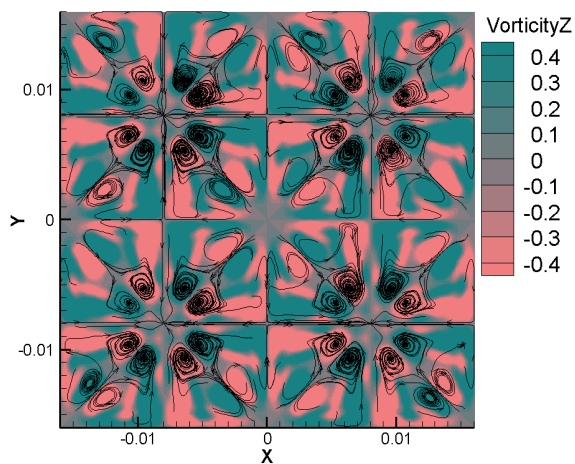


Рис. 40. Симметрия численного решения, $Re = 1600$ (вверху),
 $Re = 100$ (внизу)

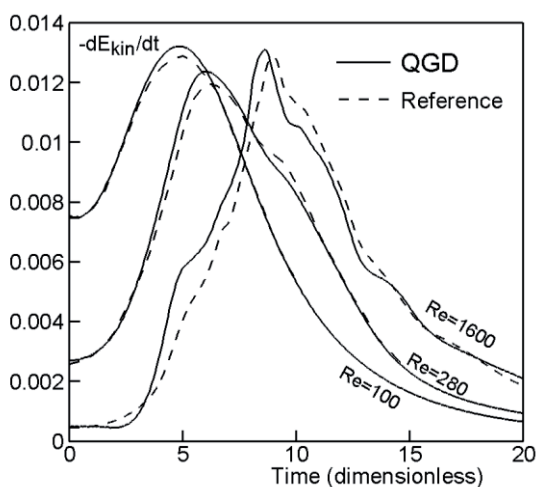


Рис. 41. Скорость диссипации энергии для $Re = 100$, $Re = 280$ и $Re = 1600$

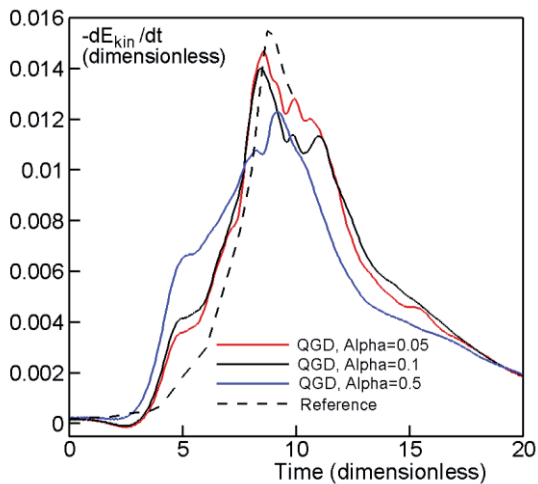


Рис. 42. Скорость диссипации энергии для $Re = 5000$, зависимость от параметра регуляризации

Положение максимума скорости диссипации сдвигается вправо при увеличении числа Рейнольдса (моменты времени 4.5, 6 and 8.5, соответственно трем рассмотренным числам Рейнольдса).

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса до 3000 и 5000 значение максимума скорости диссипации и его положение стабилизируются (момент времени 9) [5, 10, 19]. К такому выводу приводят результаты моделирования методами DNS, LES и неявными вариантами LES для несжимаемых течений. Можно считать, что при $Re > 3000$ достигается невязкий предел.

Результаты моделирования на основе КГД алгоритма для $Re = 5000$ и сравнение с эталонными данными величины скорости диссипации энергии представлены на рис. 42 для $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.1$ и $\alpha = 0.05$.

При этом число Куранта $\beta = 0.1$, размер сетки 128^3 . Эталонные данные взяты из работ [5] и [10], вычисления велись до момента времени 10.

Как видно из рис. 42, оптимальный результат при моделировании на основе КГД алгоритма достигается при $\alpha = 0.05$. Расхождения с эталонными данными вблизи максимума могут быть объяснены тем, что КГД уравнения описывают вязкий сжимаемый газ. Вклад сжимаемости может быть оценен величиной [8, 17]

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{\rho_0 U_0^3 V_0} \int_{V_0} p \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dx dy dz$$

Анализ зависимости величины ε_3 от времени показывает, что она не равна нулю в интервале $5 < t < 12$. При этом может изменяться характер обмена энергией в турбулентном течении. Максимальные значения ε_3 следующие: при $Re = 280$ $\varepsilon_3 = 3 \cdot 10^{-5}$, при $Re = 1600$ $\varepsilon_3 = 5 \cdot 10^{-5}$, при $Re = 5000$ $\varepsilon_3 = 1.3 \cdot 10^{-4}$.

Отметим, что моделирование распада однородной изотропной турбулентности на основе КГД алгоритма проводилось для $Re = 50000$ до момента времени 20 на сетках 32^3 и 64^3 при

$\alpha = 0.1$ и $\beta = 0.1$ [83]. При этом при $t > 9$ получен спектральный закон Колмогорова–Обухова.

Использование изложенного в этой главе алгоритма для численного моделирования свободного турбулентного течения для межзвездной газовой среды изложено в [92]. Рассмотрены случаи затухания вихря со сверхзвуковыми начальными скоростями, а также вариант незатухающего турбулентного движения с подпиткой энергии. При этом параметры газа соответствуют параметрам межзвездного газа.

Глава 4. Пристеночные турбулентные течения

4.1. Введение

В предыдущей главе рассматривались свободные течения вдали от стенок. В данной главе на примере течения Куэтта излагаются результаты моделирования течений сжимаемого газа вблизи твердой стенки.

Известно, что турбулентные газодинамические течения вблизи стенки в области как вязкого, так и логарифмического подслоя, могут быть описаны путем прямого численного моделирования (Direct Numerical Simulation, DNS) на основе уравнений Навье–Стокса в сжимаемой или несжимаемой формулировке [46, 30, 45]. Однако DNS методы требуют довольно высокого пространственного разрешения, при котором обеспечивается наличие нескольких точек сетки в вязком подслое. С увеличением числа Рейнольдса (Re) вычислительные затраты при прямом численном моделировании пристеночных потоков, по разным оценкам, возрастают пропорционально $Re^{2.4}-Re^3$ [45, 36]. Это неприемлемо для численного моделирования высокоскоростных потоков, даже с использованием современных многопроцессорных вычислительных систем.

Число точек сетки в пристеночной области может быть уменьшено при использовании метода крупных вихрей (Large-Eddy Simulation, LES) [30, 45]. Однако в непосредственной близости от стенки поведение подсеточной диссипации, обычно используемой в LES моделях, имеет нефизический характер. Для того, чтобы закон стенки выполнялся, должны быть введены так называемые пристеночные функции [45, 55].

Использование пристеночных функций дает возможность расположить первую расчетную точку сетки внутри логарифмического подслоя.

Это снижает требования к разрешению в пограничном слое, и вычислительные затраты растут пропорционально $Re^{0.5}$ [45]. Однако моделям пристеночных функций не хватает физического обосно-

вания, и они должны быть тщательно откалиброваны в зависимости от используемого численного алгоритма и характера течения. Тем не менее, метод пристеночных функций успешно применялся для численного моделирования безотрывных течений и был расширен для моделирования отрывных течений [45].

Благодаря простоте постановки задачи и большому количеству опубликованных экспериментальных результатов и результатов численного моделирования, течение Куэтта часто служит тестом при исследовании численных алгоритмов, предназначенных для моделирования безотрывных пристеночных течений. В качестве эталонных данных используются профили скорости и пульсаций скорости в вязком и логарифмическом подслое, полученные в экспериментах. Так, профили осредненной скорости в турбулентном течении Куэтта, зависимость коэффициента трения от числа Рейнольдса, и эмпирическая формула, выражающая эту зависимость, приведены в [42] и [50]. Профили среднеквадратичных пульсаций вблизи стенки показаны в [9, 20, 51, 44]. В работах [51, 2, 25] на основе изучения детального профиля осредненной скорости вблизи стенки определены численные коэффициенты в двухслойной модели пристеночной турбулентности.

Численное моделирование турбулентного течения Куэтта на основе DNS моделей проведено в работах [36, 44, 53, 48, 1]. Результаты, полученные в [44], хорошо согласуются с экспериментальными данными из [42, 50, 9, 20, 51]. Результаты, приведенные в [36, 53, 48, 1], также разумно согласуются с данными экспериментов. Однако значения констант двухслойной модели турбулентности, полученные в [36, 53, 48, 1], несколько меньше экспериментальных значений из [42, 50, 9, 20, 51].

Для моделирования пристеночных турбулентных течений мы используем конечно-разностный КГД алгоритм на основе уравнений (1.8)–(1.13), (1.5)–(1.7) в трехмерной постановке. В качестве примера используется каноническое плоское течение Куэтта между двумя бесконечными плоскостями, при этом рассматривается азот при температуре нормальных условий.

Результаты этого раздела основаны на данных, приведенных в [88, 90].

4.2. Постановка задачи о течении Куэтта и математическая модель

Рассмотрим трехмерную расчетную область в декартовых координатах: $0 \leq x \leq L_x$, $0 \leq y \leq L_y$, $-L_z/2 \leq z \leq L_z/2$ (рис. 43).

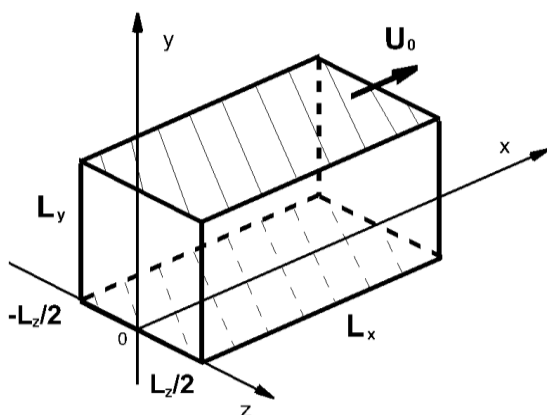


Рис. 43. Общий вид расчетной области

Граница $y = 0$ представляет собой неподвижную твердую стенку. Противоположная граница $y = L_y$ является твердой стенкой, которая движется с постоянной скоростью U_0 в направлении положительных значений x . Область заполнена азотом. Состояние газа описывается плотностью $\rho(x, y, z, t)$, компонентами макроскопической скорости $u_x(x, y, z, t)$, $u_y(x, y, z, t)$, $u_z(x, y, z, t)$, и давлением $p(x, y, z, t)$. Предполагаем газ идеальным: $p = \rho RT$. Значения параметров газа указаны в табл. 2.

Начальная температура постоянна во всей области: $T = T_0 = 273$ К. Начальные давление и плотность тоже постоянны и определяются уравнением состояния.

Граничные условия являются периодическими вдоль осей x и z . На твердых стенках ставятся условия прилипания ($u_x = u_y = u_z = 0$ при $y = 0$; $u_x = U_0$, $u_y = u_z = 0$ при $y = L_y$), а также условия $\partial T / \partial n = 0$, $\partial p / \partial n = 0$ и $\partial \rho / \partial n = 0$, поскольку стенки считаем адиабатическими.

В качестве начального условия для продольной скорости используем ламинарный профиль для несжимаемого течения:

$$u_x = U_0 y / L_y. \quad (4.1)$$

При малых значениях начального числа Рейнольдса $Re = \rho_0 (U_0 / 2) (L_y / 2) / \mu_0$ течение будет ламинарным. При увеличении Re происходит переход к турбулентному течению.

Инициирование турбулентного течения (выбор начального возмущения, развитие которого скорейшим образом приводит к формированию неустановившегося колебательного процесса) является сложной математической задачей. В данной работе для поперечных компонент скорости мы вводим простое начальное возмущение следующего вида:

$$u_y = u_z = 0.2 U_0 \sin(8\pi x / L_x).$$

Кроме того, вводятся дополнительные малые возмущения скорости (турбулизаторы) вдоль ребер расчетной области. А именно, компоненты скорости на четырех ребрах, параллельных скорости течения, не равны скорости стенки, а берутся из соседней ячейки разностной сетки.

$R = 297 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}).$	Газовая постоянная азота
$\gamma = 7/5$	Показатель адиабаты азота
$Pr = 14/19$	Число Прандтля азота
$T_0 = 273 \text{ К}$	Температура начальных условий
$\mu = \mu_0 (T / T_0)^\omega$	Вязкость азота в зависимости от температуры
$\mu_0 = 1.67 \cdot 10^{-5} \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$	Вязкость азота при $T_0 = 273 \text{ К}$
$\omega = 0.74$	Показатель межмолекулярного взаимодействия
$U_0 = 168.5 \text{ м/с}$	Скорость движения стенки канала
$c_s = \sqrt{\gamma RT}$	Скорость звука
$c_{s0} = \sqrt{\gamma RT_0} = 337 \text{ м/с}$	Скорость звука при начальных условиях
$Ma = U_0 / c_{s0} = 0.5$	Начальное число Маха

Табл. 2. Газодинамические параметры

Введем в расчетной области равномерную по пространству и по времени сетку: $\Omega_{xyz} = \omega_x \times \omega_y \times \omega_z \times \omega_t$, $\omega_x = \{x_i, i = \overline{0, N_x - 1}, x_i = -h/2 + hi\}$, $\omega_y = \{y_j, j = \overline{0, N_y - 1}, y_j = -h/2 + hj\}$, $\omega_z = \{z_k, k = \overline{0, N_z - 1}, z_k = -L_z/2 - h/2 + hk\}$, $\omega_t = \{t, n_t = \overline{0, N_t}, t = h n_t\}$. Число шагов по времени N_t заранее не определено. Границы области располагаются в полуцелых точках.

Как и в предыдущих главах, численный алгоритм основан на КГД уравнениях в предположении отсутствия внешних сил и источников тепла. КГД система в трехмерном виде в декартовых координатах приведена выше: (3.13)–(3.26). В данной главе мы используем этот же вид системы за одним исключением: величину коэффициента второй (объемной) вязкости (3.25) не будем полагать равной нулю, а определим через соотношение [70, 73]:

$$\zeta = \mu (5/3 - \gamma). \quad (4.2)$$

Величина релаксационного параметра τ вычисляется согласно (3.26). Для большинства течений, подходящие значения настроенного параметра α лежат в интервале $0 < \alpha < 1$. В предыдущей главе было исследовано влияние коэффициента α на моделирование свободных турбулентных течений. На примере вихря Тейлора–Грина было показано, что значение $\alpha = 0.1$ является оптимальным для моделирования турбулентных течений вдали от стенок. Результаты, полученные в данной главе, позволяют сделать вывод, что для моделирования пристеночных турбулентных течений можно взять такое же значение $\alpha = 0.1$.

Стационарное ламинарное течение Куэтта является одним из примеров, для которого известно точное решение уравнений Навье–Стокса при любых значениях чисел Маха и Рейнольдса. Это решение для сжимаемого теплопроводного газа было предложено и исследовано Иллингвортом [31]. Следуя [66], покажем, что решение Иллингворта является также точным решением КГД системы.

Аналитическое решение для течения Куэтта может быть построено в предположении, что газодинамические параметры зависят только от нормальной координаты y :

$$u_x = u_x(y), \quad u_y = 0, \quad u_z = 0, \quad p = p(y), \quad \rho = \rho(y).$$

Предполагая $p = \rho RT$, получим $T = T(y)$. Подстановка этих выражений в уравнения (3.13)–(3.26) приводит к упрощенной форме компонентов:

$$j_{mx} = \rho u_x, \quad j_{my} = -\tau \frac{dp}{dy}, \quad j_{mz} = 0,$$

$$\Pi_{xx} = \Pi_{yy} = \Pi_{zz} = 0, \quad \Pi_{xz} = \Pi_{zx} = \Pi_{yz} = \Pi_{zy} = 0,$$

$$\Pi_{yx} = \mu \frac{du_x}{dy}, \quad \Pi_{xy} = \mu \frac{du_x}{dy} + \pi_x \frac{dp}{dy},$$

$$R_q = 0, \quad q_x = q_z = 0, \quad q_y = -\kappa \frac{dT}{dy}.$$

Таким образом, КГД уравнения приводятся к виду

$$\frac{d}{dy} \left(\tau \frac{dp}{dy} \right) = 0, \quad \frac{d}{dy} \left(\mu \frac{du_x}{dy} \right) + \frac{d}{dy} \left(\pi_x \frac{dp}{dy} \right) = 0,$$

$$\frac{d}{dy} \left(\mu_x \frac{du_x}{dy} \right) + \frac{d}{dy} \left(\kappa \frac{dT}{dy} \right) + \frac{d}{dy} \left(\pi_H \frac{dp}{dy} \right) = 0, \quad \frac{dp}{dy} = 0.$$

Принимая во внимание последнее уравнение, можно сделать вывод, что давление в потоке является постоянным. Отсюда следует, что все τ -слагаемые равны нулю. Таким образом, вышеприведенная система принимает вид

$$\frac{d}{dy} \left(\mu \frac{du_x}{dy} \right) = 0, \quad \frac{d}{dy} \left(\mu_x \frac{du_x}{dy} \right) + \frac{d}{dy} \left(\kappa \frac{dT}{dy} \right) = 0.$$

Эти уравнения совпадают с системой, полученной для стационарного течения Куэтта, исходя из уравнений Навье–Стокса [31]. Таким образом, аналитическое решение системы Навье–Стокса для течения Куэтта является также точным решением КГД системы. Это аналитическое решение было получено в неявном виде для газа макросвелловских молекул ($\omega = 1$) и специального вида граничных условий (условие прилипания для скорости, изотермические и адиабатические условия для верхней и нижней стенки, соответственно). Для небольших значений числа Маха, решение Иллингворта почти совпадает с выражением для случая несжимаемой жидкости (4.1).

Можно показать, что для течения Пуазейля и многих других известных задач, точные решения стационарных уравнений Навье–Стокса являются также и точными решениями КГД уравнений [66].

Как в предыдущее главе, для численного решения начально-краевой задачи для КГД уравнений (3.13)–(3.24), (3.26), (4.2) с указанными выше начальными и граничными условиями для

течения Куэтта, пространственные производные аппроксимируются центральными разностями со вторым порядком, а для производных по времени используется явный метод Эйлера. Расчеты проводятся в размерных переменных.

Алгоритм и реализация разностной схемы в такие же, как и в предыдущей главе.

Расчет по явной схеме соответствует эволюции газодинамического течения по времени. Шаг по времени определим из условия Куранта [70, 73]: $h_t = \beta h / c_{s0}$, где β – число Куранта, $c_{s0} = \sqrt{\gamma R T_0}$ – скорость звука при начальных условиях.

Как и в предыдущей главе, расчеты проводились на многопроцессорном вычислительном комплексе К-100 [28] с использованием такого же алгоритма распараллеливания.

Значения расчетных параметров указаны в табл. 3. Моделирование течения Куэтта проведено для трех значений начального числа Рейнольдса $Re = 3000, 4250$ и 300 . За исключением начальных значений плотности и давления (которые определяют значение Re), все параметры расчетов одинаковы для трех случаев. Процедура задания начальных значений параметров газа на основе заданных чисел Маха и Рейнольдса такая же, как в [85].

При $Re = 3000$ и $Re = 4250$, начальное возмущение (2) приводит к развитию турбулентного течения Куэтта. При $Re = 300$ начальное возмущение быстро сглаживается за счет вязкой диссипации, и образуется ламинарное течение Куэтта.

В табл. 4 определяются динамические параметры течения.

$L_x = 0.16$ м	Длина канала
$L_y = 0.08$ м	Расстояние между твердыми стенками (высота канала)
$L_z = 0.08$ м	Ширина канала
$N_x = 162, N_y = 82, N_z = 82$	Размер разностной сетки
$h = 0.001$ м	Шаг разностной сетки
$h_t = \beta h / c_{s0} = 5.936 \cdot 10^{-7}$ с	Шаг по времени
$\beta = 0.2$	Число Куранта
$\tau = \alpha h / c_s$	Релаксационный параметр
$\alpha = 0.1$	Настроечный параметр

Табл. 3. Параметры расчетов

$Re = \rho_0 (U_0 / 2) (L_y / 2) / \mu_0$	Начальное число Рейнольдса
$Re^m = (\rho^m (U_0 / 2) (L_y / 2) / \mu^m) _{y=0}$	Осредненное число Рейнольдса
$Re_\tau = (\rho^m u_\tau (L_y / 2) / \mu^m) _{y=0}$	Динамическое число Рейнольдса
u_x^m, μ^m, ρ^m	Осредненные по времени скорость, динамическая вязкость и плотность
$u_\tau = ((\tau_w / \rho^m)^{1/2}) _{y=0}$	Динамическая скорость
$l_\tau = (\mu^m / (\rho^m u_\tau)) _{y=0}$	Динамическая длина
$\tau_w = (\mu^m (du_x^m / dy)) _{y=0}$	Касательное напряжение на стенке
$u_+ = u_x^m / u_\tau$	Безразмерная скорость
$y_+ = y / l_\tau$	Безразмерная координата
$C_f = 2\tau_w / (\rho^m (U_0 / 2)^2)$	Коэффициент трения

Табл. 4. Динамические параметры

Здесь μ^m, ρ^m являются осредненными по времени значениями μ и ρ в точке $x = L_x / 2, y = 0, z = 0$ (в середине нижней стенки). Величина u_x^m – это осредненная по времени продольная компонента скорости u_x в сечении $x = L_x / 2, z = 0$. Осреднение величин по времени проводится согласно формуле (записанной на примере компоненты скорости u_x):

$$u_x^m = \frac{1}{n_{t2} - n_{t1} + 1} \left(\sum_{n_t = n_{t1}}^{n_{t2}} u_x \right).$$

Номера шагов по времени n_{t1} и n_{t2} являются границами интервала осреднения. Последняя формула может быть записана в рекуррентном виде, удобном для программной реализации:

$$u_x^m|_{n_{t2}+1} = \frac{n_{t2}-n_{t1}+1}{n_{t2}-n_{t1}+2} u_x^m|_{n_{t2}} + \frac{1}{n_{t2}-n_{t1}+2} u_x^m|_{n_{t2}+1}.$$

Здесь значение средней скорости на шаге $n_{t2} + 1$ вычисляется через значение средней скорости на предыдущем шаге n_{t2} .

Для случаев $Re = 3000$ и $Re = 4250$ осреднение проводится от $n_{t1} = 3 \cdot 10^5$ до $n_{t2} = 8 \cdot 10^5$. Отметим, что полное число шагов по времени $n_{t2} = 8 \cdot 10^5$ соответствует $t = 0.475$ с и требует около 160 часов машинного времени при использовании 32 процессоров комплекса К-100 (Intel Xeon X5670) [28]. Время осреднения $T^m = h_t(n_{t2} - n_{t1}) = 0.297$ с можно выразить через полувысоту канала $L_y/2$ и осевую скорость течения $U_0/2$: $T^m = 625((L_y/2)/(U_0/2))$.

Диссипация энергии начальных условий (2) приводит к повышению температуры газа относительно начальной T_0 . При этом в турбулентном течении температура максимальна вблизи стенок, а в ламинарном течении температура практически постоянна в расчетной области. Поскольку вязкость газа зависит от температуры согласно (3.24), в установившемся течении вязкость также превышает начальное значение μ_0 .

Для учета этого эффекта мы вводим осредненное число Рейнольдса Re^m , вычисляемое на основе осредненных значений μ^m и ρ^m . Значение Re^m оказывается несколько меньшим начального Re . Значения динамических параметров, полученных в расчетах, указаны в табл. 5. Отметим, что общепринятые модели для вязких несжимаемых течений не учитывают нагревание за счёт диссипации кинетической энергии.

Режим	Re	Re^m	Re_τ	C_f
Ламинарный	300	286	17	0.007
Турбулентный	3000	2804	153	0.0059
Турбулентный	4250	3994	198	0.0049

Табл. 5. Значения динамических параметров

Кинетическая энергия газа в расчетной области определяется формулой

$$E_{kin}(t) = \sum_{i=1}^{N_x-2} \sum_{j=1}^{N_y-2} \sum_{k=1}^{N_z-2} \frac{1}{2} \rho_{ijk}(t) (u_{x_{ijk}}^2(t) + u_{y_{ijk}}^2(t) + u_{z_{ijk}}^2(t)) \cdot h^3, \quad (4.3)$$

где суммирование проводится по точкам пространственной сетки.

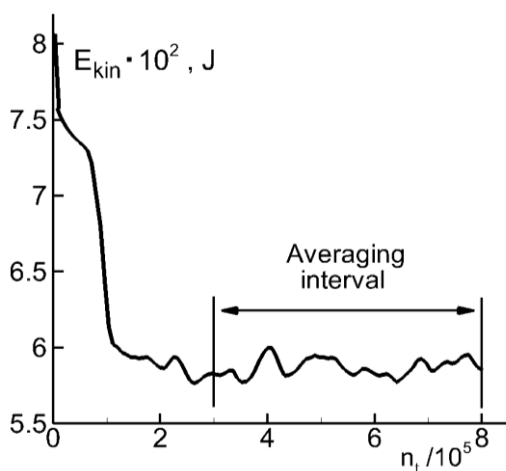


Рис. 44. Зависимость кинетической энергии газа от текущего числа шагов по времени для $Re = 3000$

4.3. Результаты расчетов для $Re = 3000$

На рис. 44 показана зависимость кинетической энергии газа в расчетной области (4.3) от текущего числа шагов по времени n_t (при этом $t = h_t n_t$). После $n_t = 2 \cdot 10^5$ устанавливается турбулентный режим, и профиль кинетической энергии становится квазипериодическим.

На рис. 45 представлен вычисленный профиль осредненной по времени продольной компоненты скорости u_x^m в зависимости от координаты y (кривая 1). Скорость u_x^m нормирована на скорость стенки U_0 , координата y нормирована на высоту канала L_y .

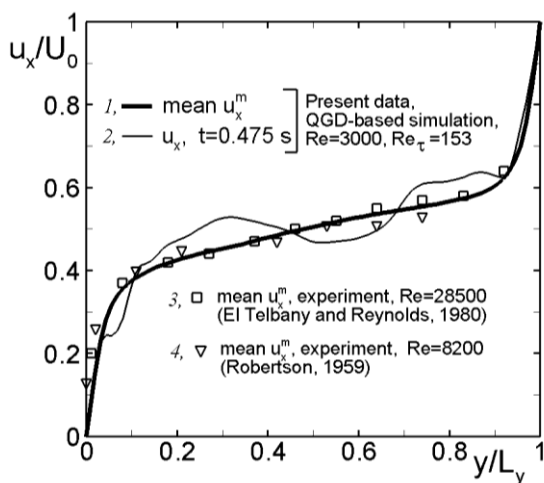


Рис. 45. Распределение продольной компоненты скорости

На рис. 45 экспериментальные профили средней продольной скорости в течении Куэтта при $Re = 28500$ [50, 44] и $Re = 8200$ [42, 44] обозначены символами 3, 4, соответственно. Результаты для различных чисел Рейнольдса мало отличаются друг от друга. Видно, что моделирование на основе КГД алгоритма хорошо передает характерный профиль средней скорости в течении Куэтта.

Кроме профиля средней скорости u_x^m , на рис. 45 приведен график мгновенной скорости u_x (кривая 2) в момент времени $t = 0.475$ с. В то время как профиль средней скорости имеет характерный вид для турбулентного течения в канале, мгновенная скорость испытывает случайные колебания. Характер этих колебаний описан ниже (рис. 47 – рис. 49).

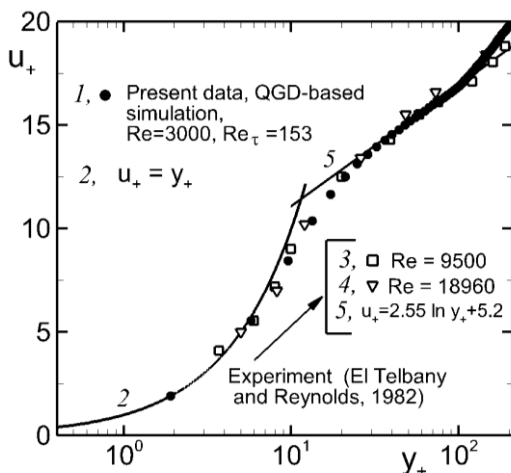


Рис. 46. Распределение осредненной продольной компоненты скорости в безразмерных переменных

На рис. 46 показан вычисленный профиль средней скорости u_x^m в безразмерных переменных (символы 1), а также данные, полученные при экспериментальном исследовании течения Куэтта [51]. Данные для $Re = 9500$ и $Re = 18960$ обозначены символами 3 и 4 соответственно. Как видно, данные расчета по КГД алгоритму и экспериментальные значения для разных чисел Рейнольдса почти не отличаются. Здесь и далее расположение символов 1 соответствует расчетной сетке КГД алгоритма.

Согласно двухслойной модели пристеночной турбулентности, профиль средней скорости в вязком подслое $y_+ < 5$ является линей-

ным: $u_+ = y_+$ (кривая 2), а при $y_+ > 11$ – логарифмическим: $u_+ = A \ln y_+ + B$ (прямая 5). В работе [51]. получены следующие значения постоянных: $A = 2.55$, $B = 5.2$.

На рис. 4 видно, что в интервале $30 < y_+ < 100$ результаты моделирования на основе КГД-модели практически совпадают с прямой $u_+ = 2.55 \ln y_+ + 5.2$. Таким образом, результаты расчета по КГД алгоритму очень хорошо описывают особенности пристеночной турбулентности. Прямая $u_+ = 2.55 \ln y_+ + 5.2$ также хорошо соответствует результатам численного моделирования течения Куэтта, проведенного в [44].

В работах, посвященных исследованию турбулентного течения Куэтта, получены различные значения постоянных A и B . Так, результаты численного моделирования из [53] показывают заниженное значение $A = 2.44$ по сравнению $A = 2.55$ из [51], при этом $B = 5.2$, как и в [51]. Значения $A = 2.44$ и $B = 5.0$ из [36], [48], $A = 2.44$ и $B = 5.1$ из [1] несколько ниже по сравнению со значениями из [51]. Что касается экспериментальных работ, авторы [2] находят $A = 2.55$ и $B = 4.7$, в то время как в [25] получены $A = 2.50$ и $B = 5.5$ для $Re_\tau \approx 200$.

На рис. 46 видно, что результаты расчета по КГД алгоритму соответствуют экспериментальным данным из [51] не только на линейном ($y_+ < 7$) и логарифмическом ($y_+ > 12$) участках, но и в переходной зоне $7 < y_+ < 12$.

На рис. 47 приведены профили среднеквадратичных пульсаций компонент скорости u'_x и u'_y в зависимости от координаты y , нормированной на L_y . Символами 1 обозначены данные настоящей работы.

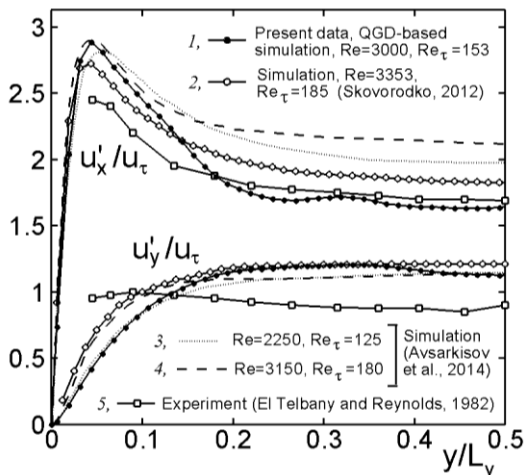


Рис. 47. Распределение среднеквадратичных пульсаций u'_x и u'_y

Пульсации u'_x вычисляются по формуле

$$u'_x = \left[\frac{1}{n_{t2} - n_{t1} + 1} \left(\sum_{n_t = n_{t1}}^{n_{t2}} u_x^2 \right) - (u_x^m)^2 \right]^{1/2}$$

и нормируются на динамическую скорость u_τ . Значения пульсаций u'_y и u'_z определяются аналогично.

Для сравнения на рис. 47 приведены значения среднеквадратичных пульсаций, полученные в [48] и [1] при моделировании течения Куэтта при близких значениях Re и Re_τ (символы 2–4), а также экспериментальные значения пульсаций из [51] (символы 5).

Максимальные значения u'_x , полученные экспериментально в [25] для течения Куэтта при числах Рейнольдса от 2500 до 5000, лежат в диапазоне 2.8–2.9.

Эти значения очень близки к полученному в настоящей работе максимальному значению u'_x при $Re = 3000$ (2.89) и к результатам численного моделирования при $Re = 3150$ [1]. В экспериментах

[51] максимальное значение u'_x оказывается равным 2.75 (рис. 7) и не зависит от числа Рейнольдса.

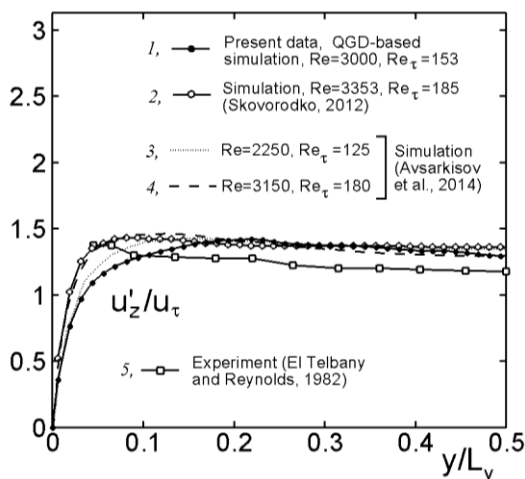


Рис. 48. Распределение среднеквадратичных пульсаций u'_z

Рис. 48 изображает значения среднеквадратичных пульсаций u'_z . Обозначения такие же, как и на рис. 47. Данные u'_z расчетов и эксперимента находятся в хорошем согласии.

На рис. 49 значения пульсаций u'_x , вычисленных в настоящей работе (символы 1) и полученных экспериментально (символы 2, 3, 4), изображены в зависимости от безразмерной координаты y_+ .

Символы 2 объединяют данные из [51] для чисел Рейнольдса в диапазоне 9500–18960. Данные из [20] для $Re = 13800$ и данные из [9] для $Re = 15200$ обозначены символами 3 и 4, соответственно.

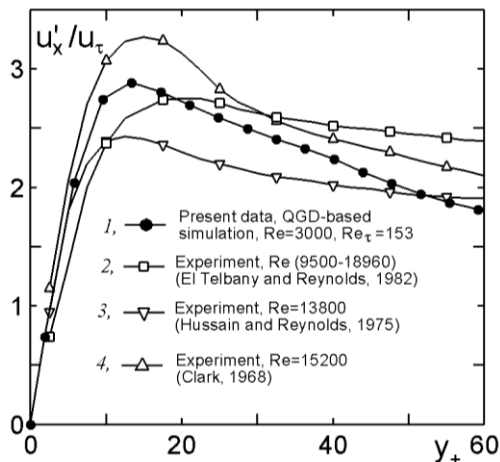


Рис. 49. Распределение среднеквадратичных пульсаций u'_x в зависимости от безразмерной координаты

Видно, что экспериментальные данные заметно различаются, при этом не наблюдается зависимости от числа Рейнольдса. С учетом разброса данных экспериментов, результаты моделирования на основе КГД алгоритма разумно соответствуют экспериментальным результатам.

В настоящей работе используется весьма грубая равномерная пространственная сетка. Для $Re = 3000$ первые четыре от стенки расчетные точки имеют координаты $y_+ = 1.91, 5.73, 9.54, 13.36$. В [45] для расчётов пристеночной турбулентности методом DNS рекомендовано, чтобы минимальное значение шага составляло $\Delta y_+ = 1$ и число точек в области $0 < y_+ < 10$ было не меньше 3. Видно, что в настоящей работе удовлетворяется только второе условие. Несмотря на большую величину шага $\Delta y_+ = 1.91$, результаты моделирования на основе КГД алгоритма хорошо соответствуют экспериментальным данным для течения Куэтта.

Для проверки зависимости численного решения от шага пространственной сетки, было проведено моделирование для

$Re = 3000$ с использованием загрубленной сетки (пространственный шаг $h=0.00125$ м и размер $N_x=130$, $N_y=66$, $N_z=66$). Полученные результаты практически совпадают с данными, представленными на рис. 46, при этом $\Delta u_+ = 2.26$. При расчетах на еще более грубых сетках, турбулентное течение не формируется.

Отметим, что в большинстве работ по прямому численному моделированию турбулентных течений в каналах используется намного более подробная пространственная сетка. Например, вязкий подслоя содержит 11 точек сетки в работе [24], и 7 точек в работе [40]. Таким образом, для достижения результатов, сравнимых с данными прямого численного моделирования, в случае использования КГД алгоритма, можно выбирать пространственную сетку в 3–5 раз грубее.

На рис. 50 изображены поверхности уровня температуры $T = 299.7$ К в расчетной области. Заметно повышение температуры от начального значения $T_0 = 273$ К, а также волнообразный характер распределения температуры. На поверхности уровня температуры нанесены контуры мгновенной продольной скорости u_x . Кроме того, на рис. 50 изображены пространственные линии тока. Поскольку турбулентное течение имеет вихревой характер, пространственные линии тока не являются прямыми.

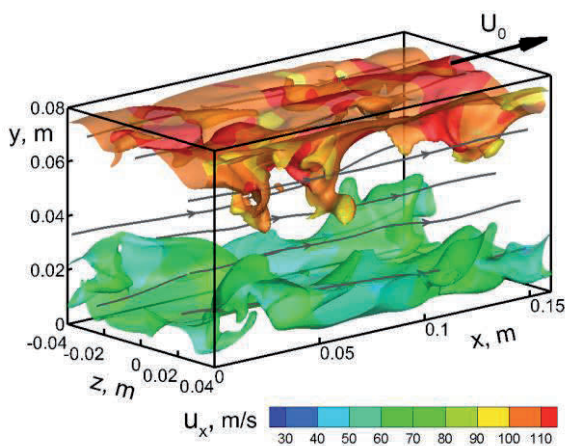


Рис. 50. Изоповерхности температуры и контуры продольной скорости

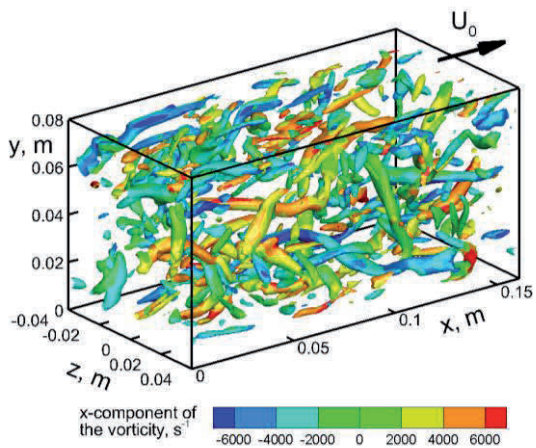


Рис. 51. Изоповерхности Q-критерия и контуры x -компоненты завихренности

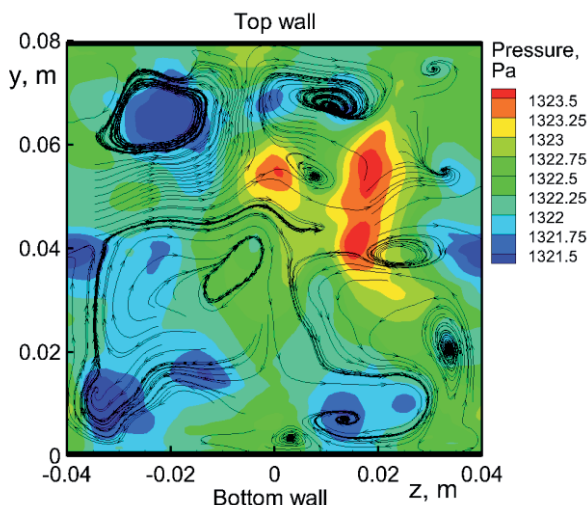


Рис. 52. Контурные линии давления и линии тока поперечных компонент скорости в сечении $x=0.08$

На рис. 51 показаны поверхности уровня Q-критерия:

$$Q = (\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij})/2,$$

$$\text{где } S_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2$$

$$\text{и } \Omega_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j - \partial u_j / \partial x_i) / 2$$

являются симметричными и антисимметричными частями тензора градиентов скоростей. Известно, что эти изоповерхности характеризуют когерентные вихревые структуры в поле течения [30, 21, 11]. На поверхности уровня Q-критерия нанесены контуры x -компоненты завихренности $V_x = \partial u_z / \partial y - \partial u_y / \partial z$. Можно видеть многочисленные вихри, что является обычным для турбулентных газодинамических течений.

На рис. 52 изображены контуры давления в сечении $x=0.08$, а также линии тока поперечных компонент скорости u_y , u_z в этом же сечении. Хорошо заметна вихревая структура турбулентного потока. Можно увидеть пространственную корреляцию между областями пониженного давления и расположением вихрей.

4.4. Результаты расчетов для $Re = 4250$

Моделирование на основе КГД алгоритма для $Re = 4250$ проводилось так же, как и для $Re = 3000$, но с изменением начальных значений плотности и давления. На рис. 53 изображен профиль продольной компоненты скорости. Обозначения и экспериментальные данные такие же, как на рис. 45. Вид профиля усредненной скорости для $Re = 4250$ мало отличается от профиля для $Re = 3000$ (рис. 3) и так же хорошо соответствует экспериментальным значениям.

Детальный анализ распределения осредненной продольной скорости для $Re = 4250$ (рис. 54, обозначения соответствуют рис. 46) показывает несколько завышенные значения скорости по сравнению с данными экспериментов, а также по сравнению с результатами моделирования для $Re = 3000$ (рис. 46).

Такое несоответствие, возможно, возникает из-за слишком грубой расчетной сетки вблизи стенки. Для $Re = 4250$ первые три от стенки расчетные точки имеют координаты $y_+ = 2.47, 7.41, 12.36$. Таким образом, размер ячеек пространственной сетки не соответствует критериям из [45]. Тем не менее, результаты моделирования с использованием даже такой грубой сетки демонстрируют качественное согласие с экспериментальными данными. Для моделирования течений при больших числах Рейнольдса шаг пространственной сетки необходимо уменьшать.

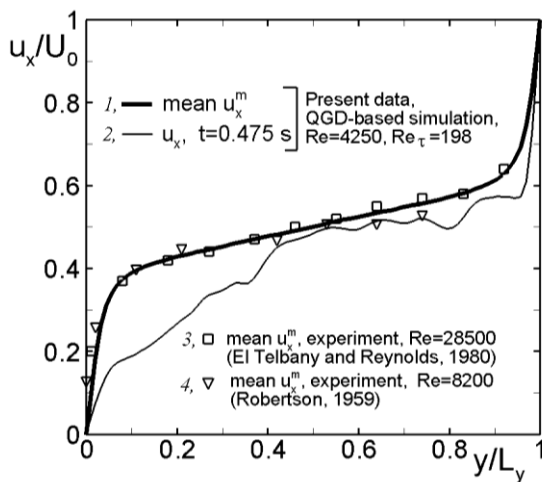


Рис. 53. Распределение продольной компоненты скорости

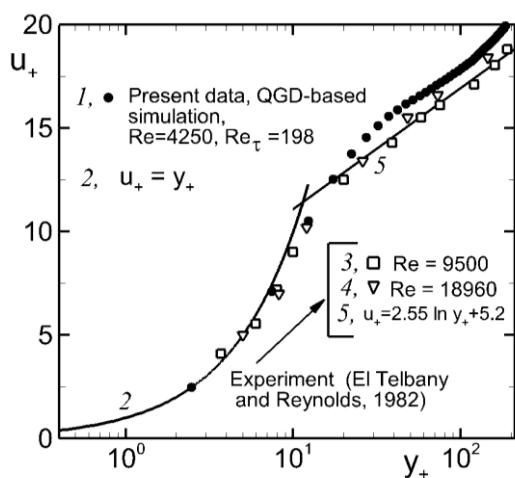


Рис. 54. Распределение продольной компоненты скорости
в безразмерных переменных

4.5. Результаты расчетов для $Re = 300$

При $Re = 300$ течение Куэтта является ламинарным (рис. 5 из [51]). КГД алгоритм позволяет единообразно проводить моделирование как ламинарных, так и турбулентных режимов течения, как было показано в [85]. При этом не требуется менять какие-либо параметры алгоритма, достаточно изменить только начальное число Рейнольдса.

В данной работе подтверждено это свойство КГД алгоритма в применении к пристеночной турбулентности. А именно, моделирование при $Re = 300$ приводит к диссипации начального возмущения (1)–(2) и к установлению ламинарного режима течения Куэтта. Соответствующая зависимость кинетической энергии от текущего числа шагов по времени показана на рис. 55.

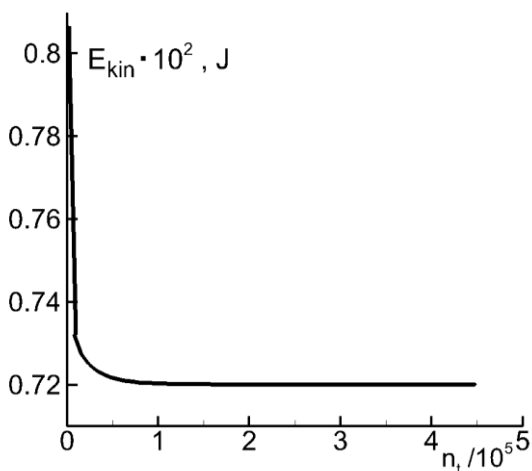


Рис. 55. Зависимость кинетической энергии газа от текущего числа шагов по времени для $Re = 300$

Из рис. 55 видно, что при $Re = 300$ кинетическая энергия газа в расчетной области становится постоянной при $n_t > 1.5 \cdot 10^5$. Профиль продольной скорости u_x при этом становится линейным, как и в начальный момент времени (1). Начальное возмущение (4.2) практически

ски полностью исчезает, так что поперечные компоненты скорости не превышают 10^{-4} м/с. Диссипация энергии начальных условий приводит к повышению температуры газа в области до 292 К.

Отметим, что одно и то же значение настроенного параметра КГД алгоритма $\alpha = 0.1$ применимо к ламинарным и турбулентным режимам течений как вдали от твердых стенок (вихрь Тейлора–Грина), так и в пристеночной области (течение Куэтта).

Адекватное численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода в задаче о течении за обратным уступом в плоском канале для двумерного случая обеспечивалось при $0.05 < \alpha \leq 0.3$ [69, 71].

4.6 Зависимость коэффициента трения от числа Рейнольдса

В ламинарном течении Куэтта коэффициент трения C_f (определяется в табл. 3) выражается формулой

$$C_f = 2/\text{Re}^m. \quad (4.4)$$

Выражение (4.6) можно получить из линейного распределения продольной компоненты скорости в ламинарном течении (1) и определения осредненного числа Рейнольдса Re^m (табл. 3).

В случае турбулентного течения Куэтта коэффициент трения может быть аппроксимирован следующим образом [42, 51]:

$$\sqrt{C_f/2} = G/\log_{10} \text{Re}^m. \quad (4.5)$$

Отметим, что в настоящей работе зависимости (4.4) и (4.5) записаны с помощью осредненного числа Рейнольдса Re^m вместо начального Re . Выражение Re^m учитывает увеличение динамической вязкости вследствие повышения температуры в процессе диссипации энергии начального возмущения в сжимаемом течении. Значения чисел Рейнольдса и коэффициента трения для трех вариантов моделирования на основе КГД алгоритма приведены в табл. 4.

Значения постоянной G в (4.5) несколько различаются в разных работах. В [9] получено $G = 0.19$, в [51] $G = 0.182$.

На рис. 56 показаны зависимости (4.4) (кривая 1) и (4.5) (кривая 2) для $G = 0.182$, а также данные расчетов настоящей работы из табл.

4 (символы 3). Видно, что значение $G = 0.182$ из работы [51] хорошо соответствует результатам настоящей работы. Отметим, что экспериментальные данные исследований течения Куэтта в различных постановках имеют заметный разброс относительно зависимости (4.5) (рис. 5 из [51]).

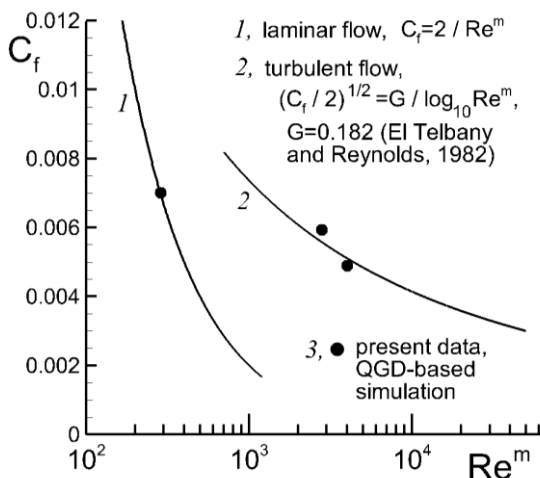


Рис. 56. Зависимость коэффициента трения от числа Рейнольдса

4.7. Общие замечания

Приведенные результаты демонстрируют возможности КГД алгоритма для моделирования пристеночных турбулентных течений при невысоких числах Рейнольдса. Для этого проведено моделирование турбулентного ($Re = 3000$ и 4250 , $Re_\tau = 153$ и 198) и ламинарного ($Re = 300$) дозвукового течения Куэтта в азоте.

Было показано, что с помощью КГД алгоритма адекватно воспроизводится пристеночный профиль скорости, при этом число точек в пограничном слое меньше, чем при использовании DNS методов высокого порядка. А именно, для $Re_\tau = 153$ шаг равномерной сетки составлял $\Delta y_+ = 1.91$ и в вязком подслое находилось 3 расчетных точки.

Исходя из практики расчетов и оценок [45], шаг пространственной сетки в нормальном к стенке направлении должен быть меньше $\Delta y_+ = 1$ вблизи стенки, и число расчетных точек в вязком подслое не должно быть меньше 7. Несмотря на это, значения продольной скорости, полученные при использовании КГД алгоритма, почти совпадают с экспериментальными данными из [51] и данными расчетов из [44].

Распределение пульсаций продольной скорости показывает лучшее согласие с экспериментом, чем данные DNS из [48, 1]. Пульсации нормальной и поперечной скорости совпадают с данными из [48, 1]. Поверхности уровня Q-критерия показывают вихревой характер турбулентного течения во всей расчетной области.

КГД алгоритм позволяет единообразно проводить моделирование как турбулентных, так и ламинарных пристеночных течений. Ламинарно-турбулентный переход реализуется путем изменения числа Рейнольдса, при этом модификация алгоритма не требуется.

Исходя из полученных результатов, а также результатов моделирования вихря Тейлора–Грина из [85], можно сделать вывод, что КГД алгоритм является весьма перспективным для моделирования как ламинарных, так и турбулентных течений при умеренных числах Рейнольдса, как вдали от стенок, так и пристеночных. Кроме того, КГД алгоритм описывает течения, содержащие ударные волны, и эффективен при распараллеливании. Таким образом, КГД алгоритм может быть использован при моделировании взаимодействия ударных волн с турбулентными потоками, в том числе пристеночными.

Глава 5. Ламинарно-турбулентный переход при обтекании гиперзвукового летательного аппарата

5.1. Введение

Задача, представленная в этой главе, включает в себя основные особенности течений вязкого сжимаемого газа, проанализированных в предыдущих главах: ударные волны, нестационарные свободные течения, и взаимодействие потока со стенкой.

Прямое численное моделирование зарождения колебательных режимов при сверхзвуковом или гиперзвуковом обтекании поверхностей вязким сжимаемым газом является актуальной проблемой вычислительной аэродинамики как с теоретической точки зрения, так и в практическом аспекте. В частности эта задача была поставлена при проектировании летательных аппаратов с гиперзвуковым воздушно-реактивным двигателем [14, 35, 13].

В настоящей главе излагаются результаты численного моделирования ламинарно-турбулентного перехода в течении, которое возникает в окрестности фюзеляжа летательного аппарата. Моделирование проводится на основе КГД уравнений (1.8)–(1.13), (1.5)–(1.7).

С целью адаптации расчетной области к конфигурации скачка уплотнения, возникающего при сверхзвуковом обтекании, в данной главе используется преобразование координат. Кроме того, предложен оригинальный метод введения дополнительной диссипации, позволяющий сглаживать неустойчивость в области скачка уплотнения. При этом введенная диссипация не препятствует моделированию турбулентного режима течения, возникающего вблизи твердой стенки. Спектральные характеристики колебательного течения в области турбулентности соответствуют колмогоровскому закону убывания энергии колебаний с ростом их частоты [29].

Результаты данной главы обобщают исследования, изложенные в [78, 81, 82].

5.2. Постановка задачи и расчетная область

На рис. 57 изображена носовая часть летательного аппарата, а также расчетная область, рассматриваемая в настоящей работе, имеющая форму усеченной пирамиды. Плоскость $z = -0.0075$ м (в декартовых координатах) соответствует поверхности фюзеляжа на участке перед воздухозаборником [14, 35, 13]. Конфигурация расчетной области изображена на рис. 57 в виде сечений плоскостями $z = -0.0115$ м и $y = 0$. Дополнительно изображена расчетная область **A** с криволинейными границами, использованная в работах [14, 35, 13]. Штриховкой обозначена область, использованная авторами (**B**).

В сечении $y = 0$ (рис. 57 внизу) показаны обе области **A** и **B**, но в этом сечении они почти не различаются (граница области **B** расположена снаружи).

Обтекающий поток на рис. 57 направлен слева направо, вдоль оси X . При сверхзвуковом обтекании летательного аппарата образуется скачок уплотнения, изображенный на рис. 57 пунктиром (**CD**). Форма обеих областей **A** и **B** адаптирована к конфигурации скачка уплотнения. Видно, что скачок уплотнения, расположенный под углом к поверхности фюзеляжа, выходит за границу расчетной области на задней грани, через которую вытекает газ (**D**).

Если не адаптировать расчетную область к скачку уплотнения, то возможна ситуация, когда скачок уплотнения пересекает нижнюю грань. Опыт расчетов показал, что при этом происходит фиктивное отражение ударной волны от границы, что искажает картину течения [35, 13]. Отметим, что фиктивное отражение скачка уплотнения от границы расчетной области сходно с взаимодействием ударной волны с твердой стенкой.

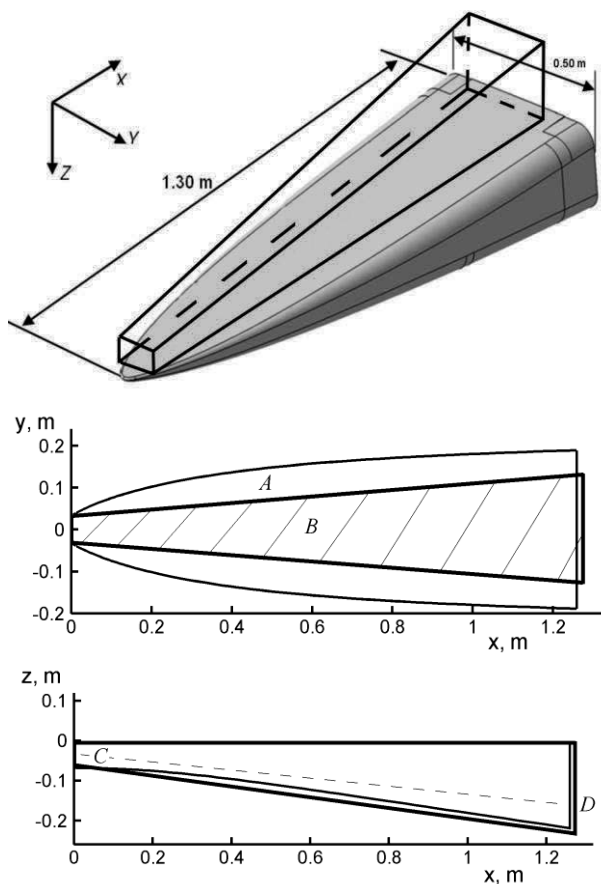


Рис. 57. Конфигурация расчетной области

5.3. Преобразование координат и построение сетки

Расчетная область, адаптированная к расположению скачка уплотнения в окрестности фюзеляжа летательного аппарата, представляет собой усеченную пирамиду (рис. 57, область **B**). Для построения разностной схемы в подобной области удобно ввести следующее преобразование координат:

$$x = x^*, \quad y = y^* (1 + xzero \cdot x^*), \quad z = z^* (1 + xzero \cdot x^*).$$

Здесь (x, y, z) являются декартовыми координатами, а (x^*, y^*, z^*) – координаты, удобные для построения разностной схемы в расчетной области. Величина $xzero$ является постоянным параметром.

Как и в предыдущих главах, численный алгоритм основан на КГД уравнениях в предположениях отсутствия внешних сил и источников тепла. Чтобы записать КГД уравнения (1.8)–(1.13), (1.5)–(1.7) в координатах (x^*, y^*, z^*) , выпишем выражения для пространственных производных некоторой функции $f = f(x, y, z, t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x^*} - k_y \frac{\partial f}{\partial y^*} - k_z \frac{\partial f}{\partial z^*}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = k_x \frac{\partial f}{\partial y^*}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = k_x \frac{\partial f}{\partial z^*},$$

$$k_x = \frac{x_{000}}{x^* + x_{000}} = \frac{1}{1 + xzero \cdot x^*}, \quad k_y = \frac{y^*}{x^* + x_{000}} = \frac{xzero \cdot y^*}{1 + xzero \cdot x^*},$$

$$k_z = \frac{z^*}{x^* + x_{000}} = \frac{xzero \cdot z^*}{1 + xzero \cdot x^*}, \quad \text{где} \quad x_{000} = 1/xzero.$$

Используя эти формулы, выпишем уравнение для плотности из (1.8):

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x^*} j_{mx} - k_y \frac{\partial}{\partial y^*} j_{mx} - k_z \frac{\partial}{\partial z^*} j_{mx} + k_x \frac{\partial}{\partial y^*} j_{my} + k_x \frac{\partial}{\partial z^*} j_{mz} = 0. \quad (5.1)$$

Вектор потока массы j_m^i содержит пространственные производные. Запишем его компоненты детально:

$$j_{mx} = \rho u_x - \tau \left[\frac{\partial}{\partial x^*} (\rho u_x^2 + p) - k_y \frac{\partial}{\partial y^*} (\rho u_x^2 + p) - k_z \frac{\partial}{\partial z^*} (\rho u_x^2 + p) \right] -$$

$$- \tau k_x \frac{\partial}{\partial y^*} \rho u_x u_y - \tau k_x \frac{\partial}{\partial z^*} \rho u_x u_z,$$

$$j_{my} = \rho u_y - \tau \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \rho u_x u_y - k_y \frac{\partial}{\partial y^*} \rho u_x u_y - k_z \frac{\partial}{\partial z^*} \rho u_x u_y \right] - \\ - \tau k_x \frac{\partial}{\partial y^*} (\rho u_y^2 + p) - \tau k_x \frac{\partial}{\partial z^*} \rho u_y u_z, \quad (5.2)$$

$$j_{mz} = \rho u_z - \tau \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \rho u_x u_z - k_y \frac{\partial}{\partial y^*} \rho u_x u_z - k_z \frac{\partial}{\partial z^*} \rho u_x u_z \right] - \\ - \tau k_x \frac{\partial}{\partial y^*} \rho u_y u_z - \tau k_x \frac{\partial}{\partial z^*} (\rho u_z^2 + p).$$

Таким образом, первое из уравнений (1.8) записано в координатах (x^*, y^*, z^*) . Расчетная область, имеющая форму усеченной пирамиды в декартовых координатах (x, y, z) (рис. 57, область **B**), будет иметь форму прямоугольного параллелепипеда в координатах (x^*, y^*, z^*) (рис. 58).

Аналогично преобразуем уравнение для импульса из (1.8). Поскольку оно записано для трех компонент вектора ρu^j , требуется рассмотреть каждую компоненту отдельно, что приводит к следующим выражениям.

Уравнение для X – компоненты импульса.

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_x = \frac{\partial}{\partial x^*} (\Pi_{xx} - j_{mx} u_x - p) - k_y \frac{\partial}{\partial y^*} (\Pi_{xx} - j_{mx} u_x - p) - \\ - k_z \frac{\partial}{\partial z^*} (\Pi_{xx} - j_{mx} u_x - p) + k_x \frac{\partial}{\partial y^*} (\Pi_{yx} - j_{my} u_x) + k_x \frac{\partial}{\partial z^*} (\Pi_{zx} - j_{mz} u_x) \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{xx} = & \left(\left[\frac{4}{3} \mu + \zeta \right] + \tau \rho p + \tau \rho u_x^2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} * u_x - k_y \frac{\partial}{\partial y} * u_x - k_z \frac{\partial}{\partial z} * u_x \right) + \\
& + 2 \tau u_x \left(\frac{\partial}{\partial x} * p - k_y \frac{\partial}{\partial y} * p - k_z \frac{\partial}{\partial z} * p \right) \\
& + \left(-\frac{2}{3} \mu + \zeta + \tau \rho \right) k_x \frac{\partial}{\partial y} * u_y + \tau u_y k_x \frac{\partial}{\partial y} * p + \tau \rho u_x u_y k_x \frac{\partial}{\partial y} * u_x + \\
& + \left(-\frac{2}{3} \mu + \zeta + \tau \rho \right) k_x \frac{\partial}{\partial z} * u_z + \tau u_z k_x \frac{\partial}{\partial z} * p + \tau \rho u_x u_z k_x \frac{\partial}{\partial z} * u_x.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{yx} = & (\mu + \tau \rho u_y^2) k_x \frac{\partial}{\partial y} * u_x + \mu \frac{\partial}{\partial x} * u_y - \mu k_y \frac{\partial}{\partial y} * u_y - \mu k_z \frac{\partial}{\partial z} * u_y + \\
& + \tau \rho u_y u_x \frac{\partial}{\partial x} * u_x - \tau \rho u_y u_x k_y \frac{\partial}{\partial y} * u_x - \tau \rho u_y u_x k_z \frac{\partial}{\partial z} * u_x + \\
& + \tau \rho u_y u_z k_x \frac{\partial}{\partial z} * u_x + \tau u_y \frac{\partial}{\partial x} * p - \tau u_y k_y \frac{\partial}{\partial y} * p - \tau u_y k_z \frac{\partial}{\partial z} * p.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{zx} = & (\mu + \tau \rho u_z^2) k_x \frac{\partial}{\partial z} * u_x + \mu \frac{\partial}{\partial x} * u_z - \mu k_y \frac{\partial}{\partial y} * u_z - \mu k_z \frac{\partial}{\partial z} * u_z + \\
& + \tau \rho u_z u_x \frac{\partial}{\partial x} * u_x - \tau \rho u_z u_x k_y \frac{\partial}{\partial y} * u_x - \tau \rho u_z u_x k_z \frac{\partial}{\partial z} * u_x + \tau \rho u_z u_y k_x \frac{\partial}{\partial y} * u_x + \\
& + \tau u_z \frac{\partial}{\partial x} * p - \tau u_z k_y \frac{\partial}{\partial y} * p - \tau u_z k_z \frac{\partial}{\partial z} * p.
\end{aligned}$$

Уравнение для Y – компоненты импульса.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_y) = & \frac{\partial}{\partial x} * (\Pi_{xy} - j_{mx} u_y) - k_y \frac{\partial}{\partial y} * (\Pi_{xy} - j_{mx} u_y) - k_z \frac{\partial}{\partial z} * (\Pi_{xy} - j_{mx} u_y) + \\
& + k_x \frac{\partial}{\partial y} * (\Pi_{yy} - j_{my} u_y - p) + k_x \frac{\partial}{\partial z} * (\Pi_{zy} - j_{mz} u_y). \\
\Pi_{xy} = & (\mu + \tau \rho u_x^2) \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} * - k_y \frac{\partial u_y}{\partial y} * - k_z \frac{\partial u_y}{\partial z} * \right) + \mu k_x \frac{\partial u_x}{\partial y} * + \\
& + \tau \rho u_x u_y k_x \frac{\partial u_y}{\partial y} * + \tau \rho u_x u_z k_x \frac{\partial u_y}{\partial z} * + \tau u_x k_x \frac{\partial p}{\partial y} *.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{yy} = & \left(\frac{4}{3} \mu + \zeta + \tau \rho p + \tau \rho u_y^2 \right) k_x \frac{\partial u_y}{\partial y^*} + 2 \tau u_y k_x \frac{\partial p}{\partial y^*} + \\
& + \left(-\frac{2}{3} \mu + \zeta + \tau \rho p \right) \left(\frac{\partial u_x}{\partial x^*} - k_y \frac{\partial u_x}{\partial y^*} - k_z \frac{\partial u_x}{\partial z^*} \right) + \\
& + \tau \rho u_y u_x \left(\frac{\partial u_y}{\partial x^*} - k_y \frac{\partial u_y}{\partial y^*} - k_z \frac{\partial u_y}{\partial z^*} \right) + \tau u_x \left(\frac{\partial p}{\partial x^*} - k_y \frac{\partial p}{\partial y^*} - k_z \frac{\partial p}{\partial z^*} \right) + \\
& + \left(-\frac{2}{3} \mu + \zeta + \tau \rho p \right) k_x \frac{\partial u_z}{\partial z^*} + \tau \rho u_y u_z k_x \frac{\partial u_y}{\partial z^*} + \tau u_z k_x \frac{\partial p}{\partial z^*}.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{zy} = & (\mu + \tau \rho u_z^2) k_x \frac{\partial u_y}{\partial z^*} + \mu k_x \frac{\partial u_z}{\partial y^*} + \tau \rho u_z u_x \left(\frac{\partial u_y}{\partial x^*} - k_y \frac{\partial u_y}{\partial y^*} - k_z \frac{\partial u_y}{\partial z^*} \right) + \\
& + \tau \rho u_z u_y k_x \frac{\partial u_y}{\partial y^*} + \tau u_z k_x \frac{\partial p}{\partial y^*}.
\end{aligned}$$

Уравнение для Z – компоненты импульса.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_z) = & \frac{\partial}{\partial x^*}(\Pi_{xz} - j_{mx} u_z) - k_y \frac{\partial}{\partial y^*}(\Pi_{xz} - j_{mx} u_z) - k_z \frac{\partial}{\partial z^*}(\Pi_{xz} - j_{mx} u_z) + \\
& + k_x \frac{\partial}{\partial y^*}(\Pi_{yz} - j_{my} u_z) + k_x \frac{\partial}{\partial z^*}(\Pi_{zz} - j_{mz} u_z - p). \\
\Pi_{xz} = & (\mu + \tau \rho u_x^2) \left(\frac{\partial u_z}{\partial x^*} - k_y \frac{\partial u_z}{\partial y^*} - k_z \frac{\partial u_z}{\partial z^*} \right) + \mu k_x \frac{\partial u_x}{\partial z^*} + \\
& + \tau \rho u_x u_y k_x \frac{\partial u_z}{\partial y^*} + \tau \rho u_x u_z k_x \frac{\partial u_z}{\partial z^*} + \tau u_x k_x \frac{\partial p}{\partial z^*}. \\
\Pi_{yz} = & (\mu + \tau \rho u_y^2) k_x \frac{\partial u_z}{\partial y^*} + \mu k_x \frac{\partial u_y}{\partial z^*} + \tau \rho u_y u_x \left(\frac{\partial u_z}{\partial x^*} - k_y \frac{\partial u_z}{\partial y^*} - k_z \frac{\partial u_z}{\partial z^*} \right) + \\
& + \tau \rho u_y u_z k_x \frac{\partial u_z}{\partial z^*} + \tau u_y k_x \frac{\partial p}{\partial z^*}.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{zz} = & \left(\frac{4}{3} \mu + \zeta + \tau \rho + \tau \rho u_z^2 \right) k_x \frac{\partial u_z}{\partial z^*} + 2 \tau u_z k_x \frac{\partial p}{\partial z^*} + \\
& + \left(-\frac{2}{3} \mu + \zeta + \tau \rho \right) \left(\frac{\partial u_x}{\partial x^*} - k_y \frac{\partial u_x}{\partial y^*} - k_z \frac{\partial u_x}{\partial z^*} \right) + \\
& + \tau \rho u_z u_x \left(\frac{\partial u_z}{\partial x^*} - k_y \frac{\partial u_z}{\partial y^*} - k_z \frac{\partial u_z}{\partial z^*} \right) + \tau u_x \left(\frac{\partial p}{\partial x^*} - k_y \frac{\partial p}{\partial y^*} - k_z \frac{\partial p}{\partial z^*} \right) + \\
& + \left(-\frac{2}{3} \mu + \zeta + \tau \rho \right) k_x \frac{\partial u_y}{\partial y^*} + \tau \rho u_z u_y k_x \frac{\partial u_z}{\partial y^*} + \tau u_y k_x \frac{\partial p}{\partial y^*}.
\end{aligned}$$

Аналогично, получим уравнение для энергии.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} E = & \frac{\partial}{\partial x^*} (\Pi_{xx} u_x + \Pi_{xy} u_y + \Pi_{xz} u_z - j_{mx} H - q_x) - k_y \frac{\partial}{\partial y^*} (\Pi_{xx} u_x + \\
& + \Pi_{xy} u_y + \Pi_{xz} u_z - j_{mx} H - q_x) - k_z \frac{\partial}{\partial z^*} (\Pi_{xx} u_x + \Pi_{xy} u_y + \Pi_{xz} u_z - j_{mx} H - q_x) + \\
& + k_x \frac{\partial}{\partial y^*} (\Pi_{yx} u_x + \Pi_{yy} u_y + \Pi_{yz} u_z - j_{my} H - q_y) +
\end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned}
& + k_x \frac{\partial}{\partial z^*} (\Pi_{zx} u_x + \Pi_{zy} u_y + \Pi_{zz} u_z - j_{mz} H - q_z), \\
H = & \frac{1}{2} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}, \quad q_x = -\kappa \left(\frac{\partial T}{\partial x^*} - k_y \frac{\partial T}{\partial y^*} - k_z \frac{\partial T}{\partial z^*} \right) - u_x R_q, \\
q_y = & -\kappa k_x \frac{\partial T}{\partial y^*} - u_y R_q, \quad q_z = -\kappa k_x \frac{\partial T}{\partial z^*} - u_z R_q.
\end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned}
R_q = & \tau \rho \frac{1}{\gamma - 1} \left\{ u_x \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{p}{\rho} \right) - k_y \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{p}{\rho} \right) - k_z \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{p}{\rho} \right) \right] + u_y k_x \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \right. \\
& + u_z k_x \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{p}{\rho} \right) \left. \right\} + \tau \rho p \left\{ u_x \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{1}{\rho} \right) - k_y \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{1}{\rho} \right) - k_z \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] + \right. \\
& + u_y k_x \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{1}{\rho} \right) + u_z k_x \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{1}{\rho} \right) \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Выражения для компонент тензора вязких напряжений Π^{ij} и вектора потока массы j_m^i , входящие в (5.9), были выписаны в (5.2)–(5.8).

Запишем соотношения, сохраняющие вид в обеих системах координат:

$$p = \rho RT, \quad E = \rho u^2 / 2 + p / (\gamma - 1), \quad H = (E + p) / \rho, \\ \mu = \mu^0 (T / T^0)^\omega, \quad \kappa = \frac{\mu \gamma R}{Pr(\gamma - 1)}, \quad \zeta = \mu (5/3 - \gamma). \quad (5.10)$$

Итак, КГД система записана в координатах (x^*, y^*, z^*) в виде (5.1)–(5.10).

Отметим, что при $xzero = 0$ координаты (x^*, y^*, z^*) превращаются в декартовы (x, y, z) . При этом система (5.1)–(5.10) приобретает вид, который исходная КГД система имеет в декартовых координатах (3.13)–(3.22), поскольку при $xzero = 0$ $k_x = 1$, $k_y = 0$, $k_z = 0$.

Опишем построение расчетной области и разностной сетки. Прямоугольник с вершинами в точках $(0, -0.033, 0)$, $(0, 0.033, 0)$, $(0, -0.033, -0.059)$, $(0, 0.033, -0.059)$ будем называть входной границей, поскольку через нее в направлении оси X втекает поток газа с фиксированными параметрами. Тройки чисел соответствуют координатам (x, y, z) декартовой системы в метрах.

На входной границе (при $x = 0$) построим двумерную сетку: $\Omega_{yz} = \omega_y \times \omega_z$, $\omega_y = \{y_j, j = \overline{0, N_y - 1}, y_j = y_0 + hj, y_0 = -0.33\}$, $\omega_z = \{z_k, k = \overline{0, N_z - 1}, z_k = z_0 + hk, z_0 = -0.059\}$, $N_y = 67$, $N_z = 60$, $h = 0.001$ м. Отметим, что $y_{33} = 0$. Кроме того, построим одномерную сетку на оси X :

$$\omega_x = \{x_i, i = \overline{0, N_x - 1}, x_i = hi\}, \quad N_x = 1262.$$

Точку $(x_{000}, 0, 0)$, $x_{000} < 0$, будем считать вершиной пирамиды. Построим семейство расходящихся лучей, каждый из которых проходит через вершину пирамиды и какой-либо узел сетки Ω_{yz} на входной границе при $x = 0$. На этих лучах построим узлы трехмерной пространственной сетки. Таким образом, мы получим расходящуюся трехмерную сетку. Ее границы, соответствующие границам расчетной области, образуются лучами, проходящими

через угловые точки сетки Ω_{yz} на входной границе при $x=0$. Каждая ячейка построенной сетки является усеченной пирамидой.

Выпишем координаты узлов в зависимости от индексов: $x_i = hi$, $y_{ij} = y_j(1 + x_i/x_{000})$, $z_{ik} = z_k(1 + x_i/x_{000})$. Поскольку $xzero = 1/x_{000}$, заметим, что эти выражения аналогичны формулами преобразования координат (12). В настоящей работе величина $xzero = 2.5$ 1/м, тогда $x_{000} = -0.4$ м. Подставив значения $h = 0.001$ м, $y_0 = -0.033$ м и $z_0 = -0.059$ м, перепишем координаты узлов сетки в другом виде (координаты указаны в метрах):

$$\begin{aligned} x_i &= 0.001 \cdot i, \quad y_{ij} = (1 + 0.001 \cdot i \cdot 2.5) \cdot (-0.033 + 0.001 \cdot j), \\ z_{ik} &= (1 + 0.001 \cdot i \cdot 2.5) \cdot (-0.059 + 0.001 \cdot k). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Таким образом, построенная расчетная область (рис. 57) представляет собой усеченную пирамиду с основанием, перпендикулярным оси X . Основание пирамиды является выходной границей, через которую в направлении оси X вытекает поток газа, и расположено при $x = 1.261$ м. Координаты угловых точек на выходной границе области можно вычислить, подставив в (39) $i = N_x - 1 = 1261$, $j = 0$ и $j = N_y - 1 = 66$, $k = 0$ и $k = N_z - 1 = 59$. Получим, что выходная граница является прямоугольником с вершинами в точках $(1.261, -0.1370325, 0)$, $(1.261, 0.1370325, 0)$, $(1.261, -0.1370325, -0.2449975)$, $(1.261, 0.1370325, -0.2449975)$. Верхняя граница области $z=0$ соответствует твердой стенке.

В координатах (x^*, y^*, z^*) расчетная область является прямоугольным параллелепипедом с вершинами в точках $(0, -0.033, 0)$, $(0, 0.033, 0)$, $(0, -0.033, -0.059)$, $(0, 0.033, -0.059)$ (входная граница) и $(1.261, -0.033, 0)$, $(1.261, 0.033, 0)$, $(1.261, -0.033, -0.059)$, $(1.261, 0.033, -0.059)$

(выходная граница). Верхняя граница при $z = 0$ также соответствует твердой стенке. Разностная сетка в координатах (x^*, y^*, z^*) имеет кубические ячейки со стороной $h = 0.001$ м, ее размерность $N_x = 1262$, $N_y = 67$, $N_z = 60$. Расчетная область и сетка схематически изображены на рис. 58 в декартовых координатах (вверху) и координатах (x^*, y^*, z^*) (внизу).

Записанная в координатах (x^*, y^*, z^*) КГД система (5.1)–(5.10) представлена в консервативной форме, что позволяет эффективно реализовать явную разностную схему. Поскольку в координатах (x^*, y^*, z^*) расчетная область является прямоугольным параллелепипедом, возможно использовать ранее разработанные численные алгоритмы, описанные в главах 2–4, в том числе алгоритм декомпозиции области для проведения расчета на многопроцессорных системах.

5.4. Начальные и граничные условия

Картина течения внутри области определяется фиксированным по времени распределением параметров газа на входной границе при $x = 0$. Эти параметры получены в [14, 35, 13] при расчете стационарного обтекания летательного аппарата в целом. Отметим, что во входном распределении скоростей присутствует вихревое движение газа, что приводит к образованию вихревых трубок внутри расчетной области. Плоскость $z = 0$ является поверхностью фюзеляжа (твердой стенкой). На твердой стенке значение макроскопической скорости газа полагаем равным нулю. Кроме того, поверхность фюзеляжа считаем адиабатической.

Отметим, что входной поток газа направлен на поверхность фюзеляжа, при этом угол атаки летательного аппарата равен 4° . Число Маха во входном потоке $Ma = 6$, что соответствует высоте полета 25 км. Торможение газа вблизи поверхности приводит к возникновению колебательных процессов, прямое численное моделирование которых является предметом исследования авторов.

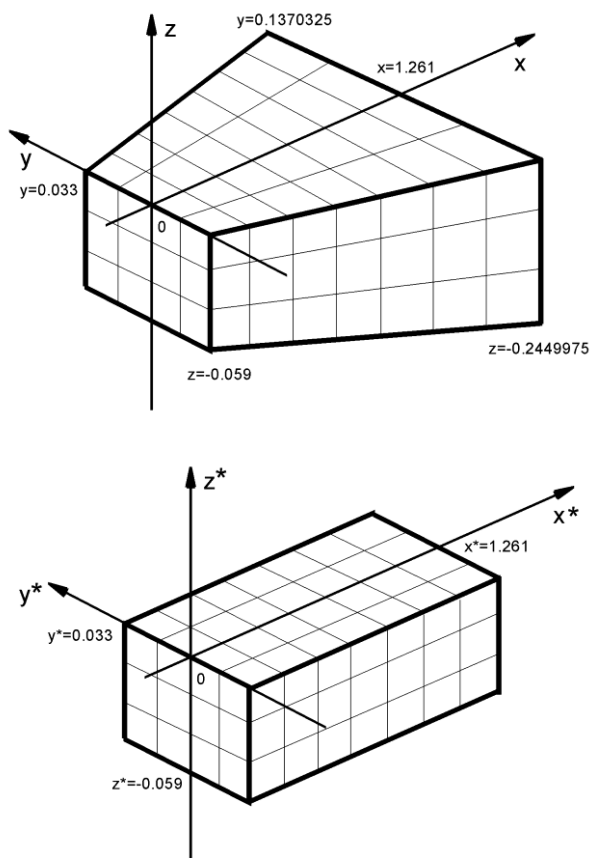


Рис. 58. Схема расчетной области и разностная сетка в декартовых (вверху) и преобразованных координатах (внизу)

На выходном сечении ставились «мягкие» граничные условия – условия сноса потока. На боковых гранях (кроме твердой стенки $z = 0$) также ставятся условия сноса, которые хорошо применимы в данной постановке, когда сверхзвуковой поток движется вдоль границы расчетной области. Полученная картина течения

показывает, что условия сноса на нижней границе (противоположной твердой стенке) не нарушают условие постоянства угла атаки.

Изложим постановку начальных и граничных условий более подробно. На входной границе при $x=0$ будем поддерживать постоянные значения ρ , u_x , u_y , u_z , p . Поскольку граница располагается в полуцелых точках сетки, необходимо поддерживать постоянной полусумму значений параметров газа в крайней и следующей ячейке. Такой же способ будем применять и на других границах.

Граница $z=0$ является адиабатической твердой стенкой. На этой границе $u_x=0$, $u_y=0$, $u_z=0$, $\partial p / \partial n = 0$. Это дополнительное условие на твердой стенке для КГД-системы вытекает из условия равенства нулю потока массы [73, с. 108]. Из условий для давления и температуры на адиабатической стенке $\partial T / \partial n = 0$ следует $\partial \rho / \partial n = 0$.

На остальных границах области используем «мягкие» граничные условия: $\partial \rho / \partial n = 0$, $\partial u_x / \partial n = 0$, $\partial u_y / \partial n = 0$, $\partial u_z / \partial n = 0$, $\partial p / \partial n = 0$.

Границы расчетной области располагаются в середине граничных ячеек сетки. Это удобно при постановке граничных условий с использованием фиктивных ячеек. Заметим, что для упрощения численного алгоритма нормалью в приведенных формулах считается направление вдоль ребра ячейки расчетной области.

Различные варианты расчетов рассматриваемой задачи показали, что полученная в результате картина течения практически не зависит от начальных условий внутри области. Поэтому в качестве начальных условий мы используем входное распределение при $x=0$, распространенное для всех значений x внутри расчетной области.

5.5. Искусственная диссипация

Определим значение релаксационного параметра τ , входящего в (5.1)–(5.10). Коэффициент динамической вязкости μ связан с τ соотношением $\mu = \tau \rho S c$, где $S c$ – число Шмидта, $S c = 5/(7 - \omega)$ [66, 73]. Как и в главах 3 и 4, определим релаксационный параметр τ как

$$\tau = \alpha h / c_s, \quad (5.12)$$

где $c_s = \sqrt{\gamma R T}$ – локальная скорость звука, h – величина шага пространственной сетки, настроечный параметр КГД алгоритма $\alpha = 0.1$. Как было сказано в предыдущих главах, искусственная вязкость является подсеточной диссипацией, которая сглаживает пульсации газодинамических величин на масштабах порядка шага сетки.

Однако введенная диссипация недостаточна для подавления численной неустойчивости в области скачка уплотнения, что приводит к заметным искажениям картины течения в сверхзвуковой области [35, 13]. С целью введения дополнительного сглаживания авторы вводят демпфирующее слагаемое в выражения для коэффициента вязкости μ , т.е. вместо выражения для μ в (38) используют следующее выражение:

$$\mu = \mu^0 (T / T^0)^\omega + \alpha_2 \tau. \quad (5.13)$$

Здесь релаксационный параметр τ вычисляется посредством (40). Это выражение содержит дополнительный эмпирический коэффициент $\alpha_2 > 0$. Отметим, что в выражениях для коэффициента теплопроводности K и объемной вязкости ζ (5.10) также используется выражение (5.13).

Введенная диссипация хорошо сглаживает вычислительную неустойчивость, которая возникает на скачке уплотнения внутри расчетной области. С другой стороны, предметом интересов авторов является не расчет структуры скачка уплотнения, а колебательные процессы вблизи твердой стенки, которые происходят в дозвуковой

области, и здесь дополнительное сглаживание может искажать физическую картину течения. Чтобы избежать таких искажений, авторы вводят зависимость коэффициента α_2 от локального числа Маха.

Зависимость является кусочно-линейной функцией: при $Ma \leq Ma_{low}$ $\alpha_2 = 0$; при $Ma_{low} < Ma \leq Ma_{high}$ $\alpha_2 = \alpha_2^0 (Ma - Ma_{low}) / (Ma_{high} - Ma_{low})$; при $Ma > Ma_{high}$ $\alpha_2 = \alpha_2^0$ (рис. 59). Локальное число Маха определяется как $Ma = |u| / c_s$, причем $c_s = \sqrt{\gamma R T}$ – локальная скорость звука. Значения Ma_{low} , Ma_{high} и α_2^0 являются постоянными: $Ma_{low} = 3.5$, $Ma_{high} = 4.5$, $\alpha_2^0 = 6$.

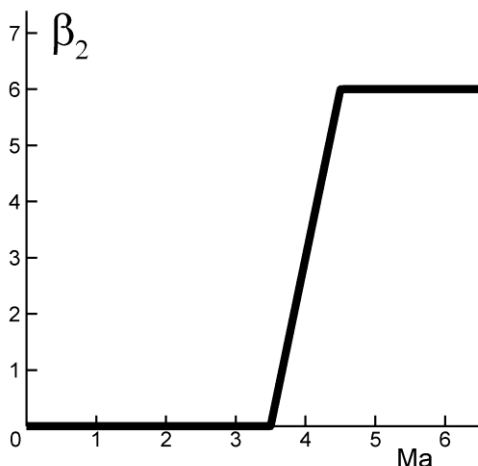


Рис. 59. Выбранная зависимость коэффициента дополнительной диссипации от локального числа Маха

Указанные величины выбраны в ходе численных экспериментов и оптимальны для данной задачи. Отметим, что при этом имеет

место соотношение $\alpha \cdot \alpha_2 \approx 0.5$, что обеспечивает устойчивость расчета сверхзвуковых течений [66, 73].

Введенная зависимость обеспечивает сглаживание численного решения в области скачка уплотнения. При этом вблизи твердой стенки, где $Ma < 3.5$, дополнительное сглаживание не оказывает влияние на колебательные процессы.

5.6. Параметры расчетов

Задача моделирования газодинамического течения сводится к численному решению начально-краевой задачи для КГД уравнений (1.8)–(1.13), (1.5)–(1.7), записанных в конечно-разностном виде (5.10)–(5.13) в координатах (x^*, y^*, z^*) на кубической сетке со стороной $h = 0.001$ м и размерностью $N_x = 1262$, $N_y = 67$, $N_z = 60$ с указанными выше начальными и граничными условиями. Как и в предыдущих главах, авторы используют явную по времени разностную схему с аппроксимацией всех пространственных производных со вторым порядком, а производных по времени с первым порядком.

Расчет по явной схеме соответствует эволюции физического течения по времени. Шаг по времени определим из условия Куранта [70, 73]. Запишем его в виде

$$h_t = \beta h / c_0,$$

где h_t – постоянное значение шага по времени, β – число Куранта, h – величина шага сетки, $c_0 = \sqrt{\gamma R T_0}$ – скорость звука в набегающем потоке, T_0 – температура в набегающем потоке. В нашем случае $h = 0.001$ м, $T_0 = 221.6$ К, тогда $c_0 = 298.63$ м/с [35]. Опыт показывает, что устойчивость расчета достигается при $\beta = 0.6$. Таким образом, получаем $h_t = 2 \cdot 10^{-7}$ с.

Как и в главах 3 и 4, расчеты проводились на многопроцессорном вычислительном комплексе К-100 [28] с использованием такого же алгоритма распараллеливания.

После начала счета происходит процесс установления (около 7 мс), после чего картина эволюции параметров во времени приобретает вид турбулентных колебаний. Для вычисления спектральных характеристик авторы провели расчет примерно до 20 мс. Для моделирования эволюции во времени нестационарного решения до 20 мс потребовалось около 40 часов машинного времени при использовании 160 процессоров комплекса К-100 (Intel Xeon X5670) [28].

5.7. Результаты расчетов

Все результаты представлены в декартовой системе координат, при этом используется дополнительный сдвиг исходной системы (x, y, z) по оси X на 0.0015 м в сторону положительных значений и по оси Z на 0.0075 м в сторону отрицательных значений. Это сделано для сопоставления полученных результатов с данными из [14, 35, 13].

На рис. 60 показаны линии уровня плотности, давления, температуры и числа Маха в сечении $x = 0.5$ м. Там же изображены линии, касательные к проекциям макроскопической скорости газа на плоскость сечения. При этом для рис. 60 – рис. 63 время $t = 0.0182$ с. Рис. 61 аналогичен рис. 60, но на рис. 61 взято сечение $x = 1.2$ м. На указанных рисунках хорошо видна система вихрей, которая остается почти неизменной с течением времени. Турбулентность сосредоточена в области около $y = 0$ вблизи твердой стенки (стенка соответствует нижней границе). В этой области структура течения хаотически меняется.

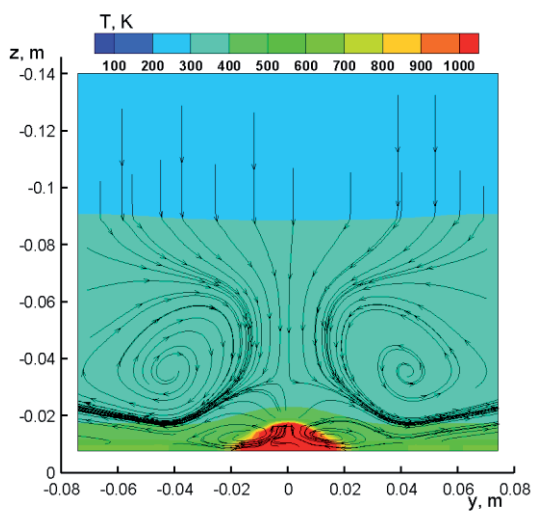
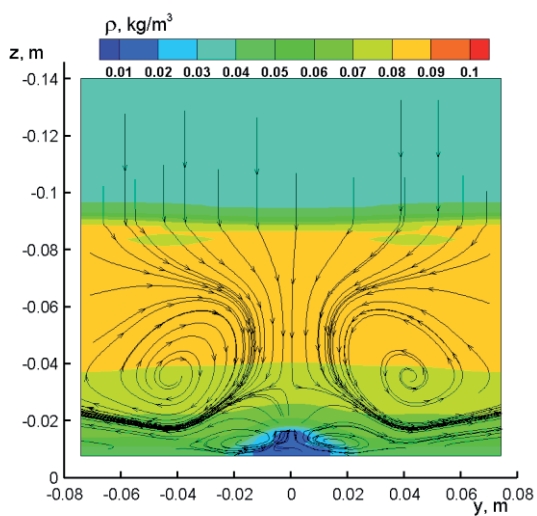


Рис. 60. Линии уровня в сечении $x = 0.5$ м

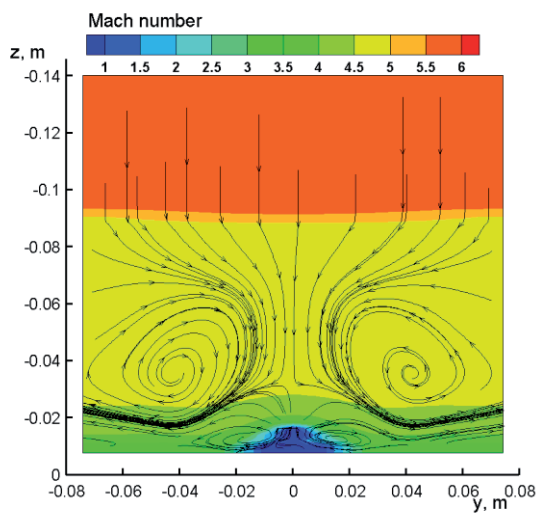
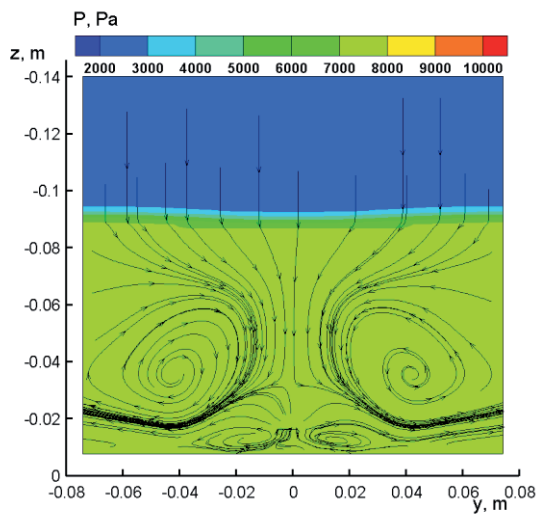


Рис. 60 (продолжение). Линии уровня в сечении $x = 0.5$ м

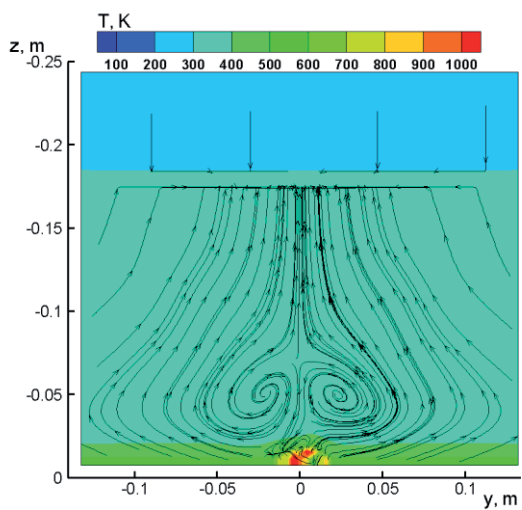
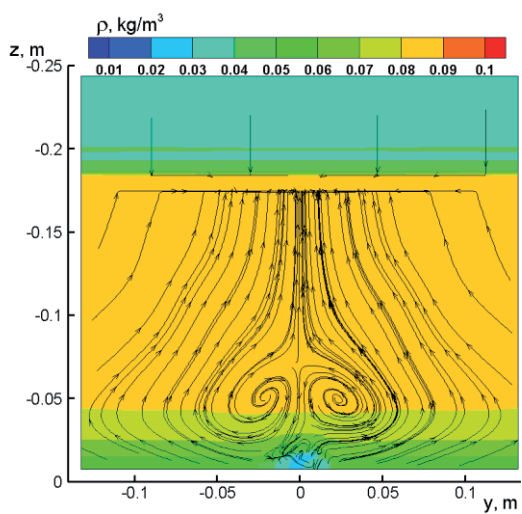


Рис. 61. Линии уровня в сечении $x = 1.2$ м

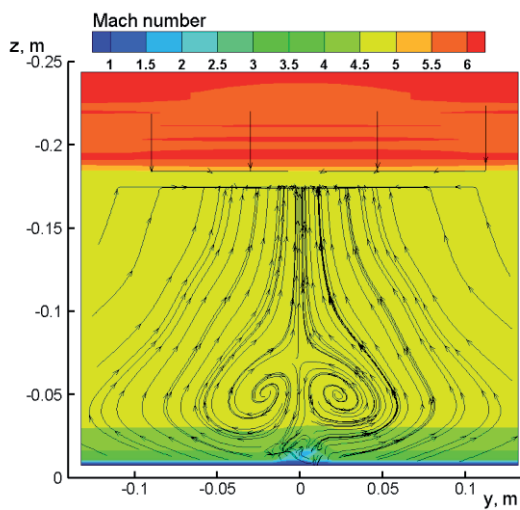
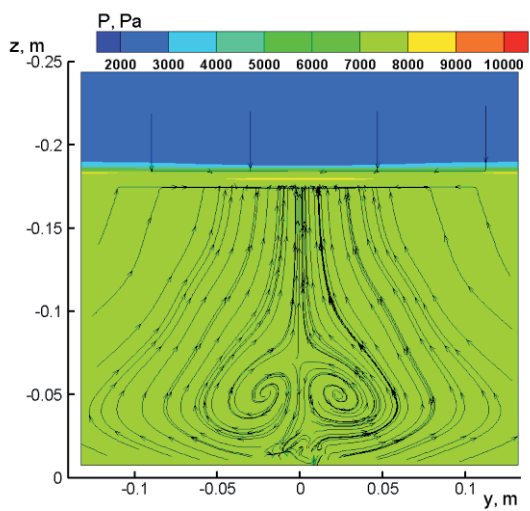


Рис. 61 (продолжение). Линии уровня в сечении $x = 1.2$ м

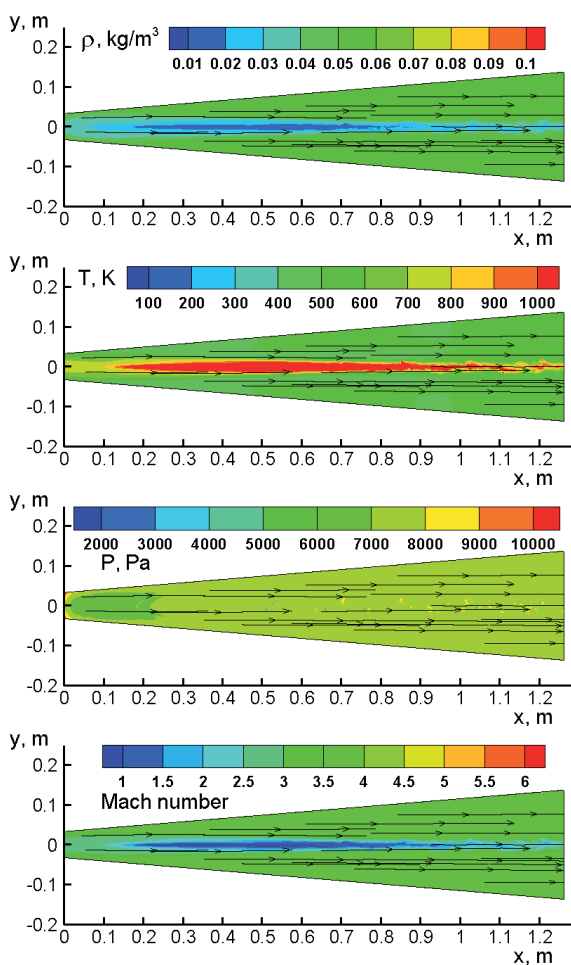


Рис. 62. Линии уровня в сечении $z = -0.0115$ м

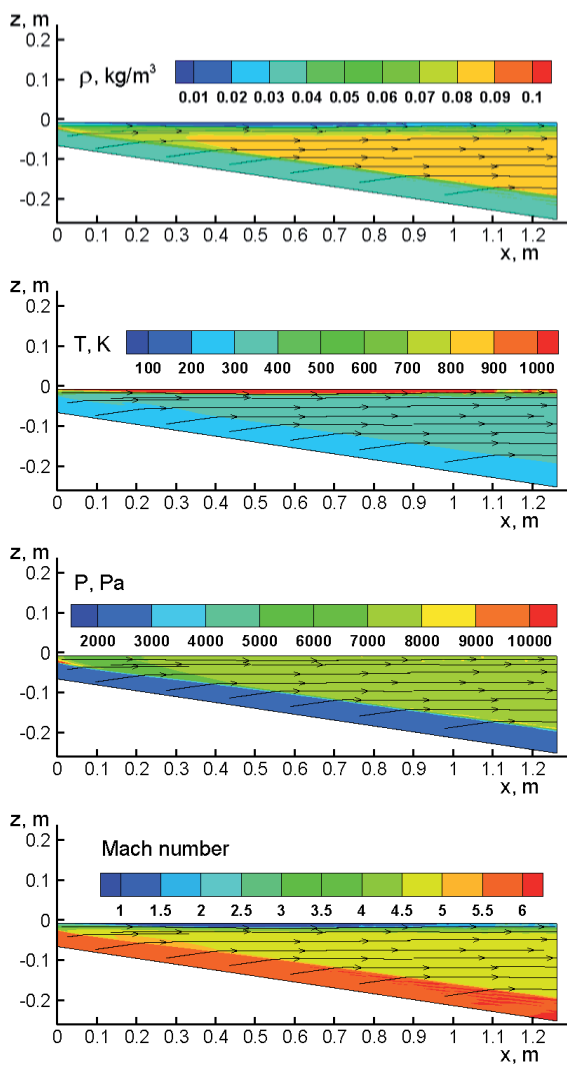


Рис. 63. Линии уровня в сечении $y = 0$

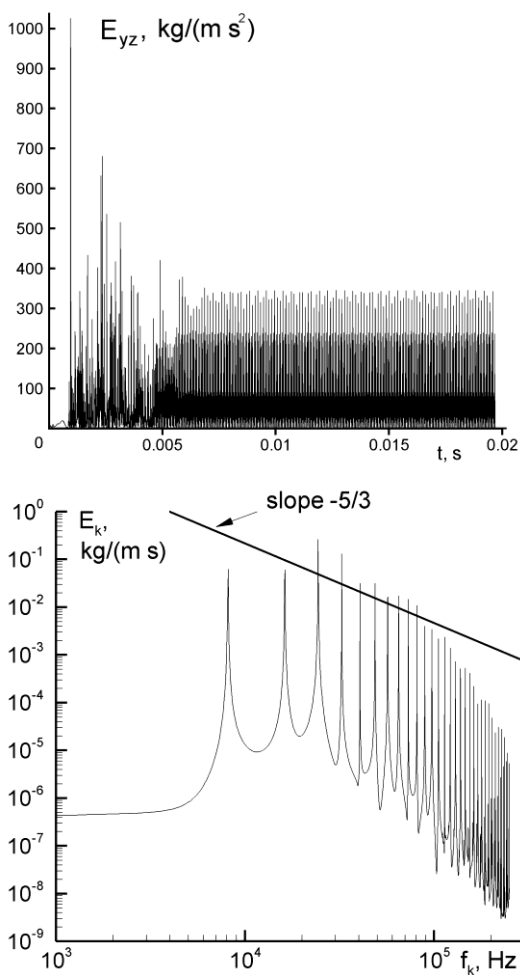


Рис. 64. Эволюция энергии газа и спектральная плотность энергии колебаний

Рис. 62 и рис. 63 аналогичны рис. 60, но относятся к сечениям $z = -0.0115$ м и $y = 0$ соответственно. На рис. 63 направление оси Z противоположно ее направлению на рис. 60 и рис. 61. Отметим, что рис. 60 – рис. 63 соответствуют времени $t = 0.0182$ с. На приве-

денных рисунках хорошо видно, что в результате введения дополнительной диссипации (41) вокруг скачка уплотнения не образуется характерная пилообразная неустойчивость (такая неустойчивость заметна на рисунках в [35, 13]).

Для изучения колебательных процессов в нестационарном течении рассмотрим эволюцию во времени кинетической энергии макроскопического движения газа в направлении, перпендикулярном оси X : $E_{yz} = \rho(u_y^2 + u_z^2)/2$. Рис. 64 (вверху) изображает зависимость E_{yz} в фиксированной точке пространства ($x = 1.2$ м, $y = -0.004$ м, $z = -0.008$ м) от времени. Виден начальный переходный процесс примерно до $t = 0.007$ с, после чего течение приобретает колебательный характер.

Текущие значения вычисленных параметров газа записываются в файл один раз из десяти итераций по времени, так что параметры определяются в точках следующей сетки по времени: $\omega_l = \{t_l, l = \overline{0, M_t - 1}, t_l = t_0 + d_t l\}$, $d_t = 2 \cdot 10^{-6}$ с.

5.8. Энергетический спектр

Вычислим спектральную плотность энергии кинетической энергии E_{yz} после завершения переходного процесса установления колебаний, а именно положим $t_0 = 0.007$ с. Промежуток времени, на котором проводится спектральное разложение, определяется как $T_0 = d_t (M_t - 1)$. Для упрощения алгоритма возьмем нечетное число точек по времени M_t . В нашем случае $M_t = 6341$, тогда $T_0 = 0.01268$ с.

Проведем спектральное разложение для величины $u_y \sqrt{\rho/2}$. Для этого вычислим коэффициенты Фурье для сеточной функции $u_y(t_l) \sqrt{\rho(t_l)/2}$:

$$\begin{aligned} ay_0 &= \frac{2}{M_t - 1} \cdot \sum_{l=0}^{M_t-1} C_l u_y(t_l) \sqrt{\rho(t_l)/2}, & by_0 &= 0, \\ ay_k &= \frac{2(-1)^k}{M_t - 1} \cdot \sum_{l=0}^{M_t-1} C_l u_y(t_l) \sqrt{\rho(t_l)/2} \cos \frac{2\pi k l}{M_t - 1}, \\ by_k &= \frac{2(-1)^k}{M_t - 1} \cdot \sum_{l=0}^{M_t-1} C_l u_y(t_l) \sqrt{\rho(t_l)/2} \sin \frac{2\pi k l}{M_t - 1} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Величина $C_l = 1$, если $1 \leq l \leq M_t - 2$, и $C_l = 1/2$, если $l = 0$ или $l = M_t - 1$. Поскольку спектр вычисляется для функции, заданной на сетке, значения волнового числа ограничены сверху: $k = \overline{1, K_{\max} - 1}$. Используя теорему Котельникова, можно получить: $K_{\max} = (M_t - 1)/2$. В нашем случае $K_{\max} = 3170$. Формулы (5.10) являются разностными аналогами интегральных выражений для коэффициентов Фурье произвольной кусочно-гладкой функции g [7, с. 455]:

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(\xi) \cos\left(\frac{k\pi\xi}{L}\right) d\xi, \quad b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(\xi) \sin\left(\frac{k\pi\xi}{L}\right) d\xi,$$

при этом интегралы вычисляются методом трапеций. Заменяя в (5.10) u_y на u_z , получим аналогичные формулы для коэффициентов Фурье az_k, bz_k .

Каждому значению волнового числа k соответствуют определенные период T_k и частота колебаний f_k : $T_k = T_0 / k = d_t(M_t - 1)/k$; $f_k = k/T_0 = k/(d_t(M_t - 1))$.

Определим шаг по оси частот: $\Delta f = 1/T_0 = 1/(d_t(M_t - 1))$. В нашем случае $\Delta f = 78.86$ Гц. Используя общий вид равенства Парсеваля для функции g [7, с. 479, 497]

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g^2(\xi) d\xi,$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{(ay_0)^2}{4} + \frac{(az_0)^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K_{\max}-1} [(ay_k)^2 + (by_k)^2 + (az_k)^2 + (bz_k)^2] \approx \\ \approx \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} \frac{\rho(t)}{2} (u_y^2(t) + u_z^2(t)) dt \end{aligned} \quad (5.11)$$

Равенство (5.11) является приближенным, поскольку коэффициенты Фурье определяются путем численного интегрирования; кроме того, число членов ряда ограничено. Введем энергетический спектр турбулентности E_k :

$$E_0 = \frac{1}{4\Delta f} [(ay_0)^2 + (az_0)^2], \text{ если } k = 0;$$

$$E_k = \frac{1}{2\Delta f} [(ay_k)^2 + (by_k)^2 + (az_k)^2 + (bz_k)^2], \text{ если } k \geq 1. \quad (5.12)$$

Учитывая, что $\frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} \frac{\rho(t)}{2} (u_y^2(t) + u_z^2(t)) dt = E_{yz}^{av}$ – усредненная

на интервале T_0 объемная кинетическая энергия движения газа в направлении, перпендикулярном оси X , из (5.11) получим:

$$\sum_{k=0}^{K_{\max}-1} E_k \Delta f \approx E_{yz}^{av}. \quad (5.13)$$

Из (5.13) следует, что $E_k \Delta f$ можно рассматривать как объемную кинетическую энергию турбулентных колебаний с

частотами, которые лежат в интервале от $f_k = k/T_0$ до $f_k + \Delta f = f_{k+1} = (k+1)/T_0$.

Равенству (5.13) можно придать интегральный вид:

$$\int_0^{f_{\max}} E_k df \approx E_{yz}^{av}, \quad (5.14)$$

Здесь E_k надо считать функцией частоты f , при этом $k = fT_0 = f / \Delta f$. Верхняя граница построенного спектра определяется неравенством $f < f_{\max} = K_{\max} / T_0 = 2.5 \cdot 10^5$ Гц. Зависимость E_k (5.12) от частоты f приведена на рис. 64, б в логарифмическом масштабе по обеим осям. Равенство (46) означает, что площадь под кривой E_k приблизительно равняется усредненной на интервале T_0 объемной кинетической энергии газа E_{yz} . Отметим, что в нашем случае левая часть (5.14) равняется 74.7427 кг/(м·с), а правая 74.7402 кг/(м·с), что говорит о корректности алгоритма спектрального разложения.

На рис. 64(б) дополнительно изображена прямая с угловым коэффициентом $-5/3$, что соответствует колмогоровскому закону уменьшения энергии турбулентных колебаний с увеличением их частоты [29, с. 192]. Видно, что в интервале частот от 10^4 Гц до 10^5 Гц рассчитанный спектр соответствует этому закону.

На рис. 64 (б) заметны дискретные пики интенсивности колебаний, лежащие в интервале 10–100 кГц. Как указано в [14, 35, 13], наиболее интенсивные колебания могут развиваться на частоте порядка 10 кГц. Таким образом, результат анализа возможных частот колебаний в поле течения соответствует оценкам, полученным на основе линейного анализа устойчивости [14, 35, 13].

Литература

1. V. Avsarkisov, S. Hoyas, M. Oberlack and J. P. Garcia-Galache. Turbulent plane Couette flow at moderately high Reynolds number. *J. Fluid Mech.* 751 (2014), R1.
2. K. Bech, N. Tillmark, P. Alfredsson, and H. Andersson. An investigation of turbulent plane Couette flow at low Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* 286 (1995), pp. 291–325.
3. G.A. Bird. *Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows*. Clarendon Press, Oxford (1998).
4. M. Brachet, D. Meiron, S. Orszag, B. Nickel, R. Morf, and U. Frisch. Small-scale structure of the Taylor–Green vortex. *J. Fluid Mech.* 130 (1983), pp. 411–452.
5. M.E. Brachet, Direct simulation of three-dimensional turbulence in Taylor–Green vortex. *Fluid Dyn. Res.* 8 (1991), pp. 1–8.
6. П. В. Бреславский, В. И. Мажукин. Моделирование взаимодействия ударных волн на динамически адаптирующихся сетках. *Матем. моделирование*, 19:11 (2007), сс. 83–95. Translation: P. V. Breslavskii and V. I. Mazhukin. Modeling of shock waves interaction on dynamically adapting grids. *Math. Models Comput. Simul.* 19:11 (2007), pp. 83–95.
7. Б.М. Будаг, С. В. Фомин. *Кратные интегралы и ряды*. Москва: Наука. 1967. 608 с.
8. J.B. Chapelier, M. De La Llave Plata, F. Renac, and E. Martin. Final Abstract for ONERA Taylor-Green DG Participation. *Proceedings of 1st International Workshop on High-Order CFD Methods at the 50th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, January 7–8, Nashville, TN (2012).
9. J.A. Clark. A study of incompressible turbulent boundary layers in channel flow. *J. of Basic Engineering*, 90 (1968), p. 455.
10. D. Drikakis, C. Fureby, F. Grinstein, and D. Youngs. Simulation of transition and turbulence decay in the Taylor–Green vortex. *J. Turbul.* 8 :20, (2007).
11. J. Fang, Y. Yao, Z. Li, and L. Lu. Investigation of low-dissipation monotonicity-preserving scheme for direct numerical simulation of compressible turbulent flows. *Computers & Fluids*, 104 (2014), pp. 55–72.

12. D. Fauconnier. Development of a dynamic finite difference method for large-eddy simulation. Ph.D. thesis, Ghent University, 2008. ISBN 978-90-8578-235-3. NUR 978,928. Wettelijk depot: D/2008/10.500/55.
13. I. Fedioun, E. Orlik, F. Falempin. Boundary layer transition on the LEA hypersonic vehicle forebody. 18th AIAA International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference, 24–28 September (2012), Tours, France.
14. M. Ferrier, I. Fedioun, E. Orlik, D. Davidenko. Modal linear stability of the near-wall flow on a hypersonic forebody. *J. Of Spacecraft And Rockets*, 46:1 (2008), pp. 51–66.
15. В.А. Гаврилин, А.А. Злотник. О пространственной дискретизации одномерной квазигазодинамической системы уравнений с общими уравнениями состояния и балансе энтропии. *ЖВМиМФ*, 55:2 (2015), сс. 267–284.
16. E. Garnier, M. Mossi, P. Sagaut, P. Comte, and M. Deville. On the use of shock-capturing schemes for large-eddy simulation. *J. Comput. Phys.* 153 (1999), pp. 273–311.
17. German Aerospace Center. Available at <http://www.dlr.de/as/>
18. И. А. Граур. Разностные схемы расщепления для решения уравнений Эйлера, построенные на основе квазигазодинамических уравнений. *ЖВМиМФ*, 44:1 (2004), сс. 166–178. Translation: I. A. Graur. Splitting Finite-Difference Schemes for the Euler Equations Based on Quasi-Gasdynamical Equations. *Comput. Math. and Math. Phys.* 44:1 (2004), pp. 155–166.
19. F.F. Grinstein, L.G. Margolin, and W.J. Rider, *Implicit Large- Eddy Simulation*. Cambridge University Press. Cambridge, UK (2007).
20. A. K. M. F. Hussain and W.C. Reynolds. Measurements in fully developed turbulent channel flow. *J. of Fluids Engineering*, 97 (1975), pp. 568–578.
21. J. Jeong and F. Hussain. On the identification of a vortex. *J. Fluid Mech*, 285 (1995), pp. 69–94.
22. И.А. Квасников. Термодинамика и статистическая физика. Т.1. Теория равновесных систем. Термодинамика. Изд. 2-е. М.: Едиториал УРСС (2002).

23. Таблица физических величин. Справочник под ред. акад. И.К. Ки-коина. М.: Атомиздат (1976), 1008 с.
24. J. Kim, P. Moin, and R. Moser. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.* 177 (1987), pp. 133–166.
25. O. Kitoh, K. Nakabyashi, and F. Nishimura. Experimental study on mean velocity and turbulence characteristics of plane Couette flow: low-Reynolds-number effects and large longitudinal vortical structure. *J. Fluid Mech.* 539 (2005), pp. 199–227.
26. А. Н. Кудрявцев, Т. В. Поплавская, Д. В. Хотяновский. Применение схем высокого порядка точности при моделировании нестационарных сверхзвуковых течений. *Матем. моделирование*, 19:7 (2007), сс. 39–55. Translation: A. N. Kudryavtsev, T. V. Poplavskaya, and D. V. Khotyanovskii. Application of Higher Order Accurate Schemes in Simulation of Unsteady Supersonic Flows. *Math. Models Comput. Simul.* 19:7 (2007), pp. 39–55.
27. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит (2001).
28. K-100 System, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow; Available at <http://www.kiam.ru/MVS/resources/k100.htm>
29. Л.Д. Ландау, В.М. Лившиц. Гидродинамика. Москва: Наука (1988). 736 с.
30. M. Lesieur. *Turbulence in Fluids*. Springer (2008).
31. H.W.Liepmann, A Roshko. *Elements of gasdynamics*. California Institute of Technology. John Willey and Sons, New York (1957).
32. R. Liska and B. Wendroff. Comparison of Several Difference Schemes on 1D and 2D Test Problems for Euler Equations. Technical Report LA-UR-01-6225, LANL, Los Alamos (2001).
33. R. Liska and B. Wendroff. Comparison of Several Difference Schemes on 1D and 2D Test Problems for the Euler Equations. *SIAM J. Sci. Comput.* 25 (2003), pp. 995–1017.
34. W. F. Noh. Errors for Calculations of Strong Shocks Using An Artificial Viscosity and Artificial Heat Flux. *J. Comput. Phys.* 72, (1987), pp. 78–120.

35. E. Orlik, V. Kornilov, M. Ferrier, I. Fedioun, D. Davidenko. Hypersonic laminar/turbulent transition: computations and experiments. 3rd European Conference for AeroSpace Sciences (EUCASS), 6–9 July 2009, Versailles, France.
36. S. Pirozzoli, M. Bernardini and P. Orlandi. Turbulence statistics in Couette flow at high Reynolds number. *J. Fluid Mech.* 758 (2014), pp. 327–343.
37. С.В. Поляков, Т.А. Кудряшова, А. А. Свердлин. Расчет параметров течения газа вокруг спускаемого аппарата. Матем. моделирование. 20:7 (2008), сс. 13–22. Translation: Т. А. Kudryashova, S. V. Polyakov, A. A. Sverdlin. Calculation of gas flow parameters around reentry vehicle. *Math. Models Comput. Simul.* 1:4 (2009), pp. 445–452.
38. S.V. Polyakov, T.A. Kudryashova, E.M. Kononov, A.A. Sverdlin, 3D Numerical Simulation Of Gas Flow Around Reentry Vehicles. *Parallel computational fluid dynamics* (2008). Springer (2010), pp. 410–416.
39. A. Pouquet and P.D. Mininni. The interplay between helicity and rotation in turbulence: implications for scaling laws and small-scale dynamics. *Phil. Trans. R. Soc. A* 368 (2010), pp. 1635–1662.
40. В. Г. Приймак. Моделирование когерентных структур и волновых движений в турбулентных сдвиговых течениях. Требования к численному методу. Матем. моделирование, 20:12 (2008), сс. 27–43. Translation: V. G. Priimak. Direct numerical simulation of spatially localized structures and wave motions in turbulent shear flows. *Numerical requirements. Math. Models Comput. Simul.* 20: 12 (2008), pp. 27–43.
41. W.M. van Rees, A. Leonard, D.I. Pullin, and P. Koumoutsakos. A comparison of vortex and pseudo-spectral methods for the simulation of periodic vortical flows at high Reynolds numbers. *J. Comput. Phys.* 230 (2011), pp. 2794–2805.
42. J.M. Robertson. On turbulent plane Couette flow. *Proc. 6th Midwestern Conf. Fluid Mech., Univ. Texas, Austin* (1959), pp. 169–182.
43. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука (1978).
44. Б.Л. Рождественский, И.Н. Симакин, М.И. Стойнов. Моделирование турбулентного течения Куэтта в плоском канале. Журнал прикладной механики и технической физики (1989), 174:2, сс. 60–68. Translation: B.L.

Rozhdestvenskii, I.N. Simakin, and M.I. Stoinov. Modeling turbulent Couette flow in a plane channel. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 30:2 (1989), pp. 223–229.

45. P. Sagaut. Theoretical background: large-eddy simulation. In: C. Wagner, T. Huttli, P. Sagaut, editors. *Large-eddy simulation for acoustics*. Cambridge: Cambridge University Press (2007), pp. 89–127.

46. H. Schlichting. *Boundary-layer theory*. McGraw-Hill, New York (1968).

47. C. Shu and S. Osher. Efficient Implementation of Essentially Non-Oscillatory Shook-Capturing Schemes II. *J. Comput. Phys.* 83 (1989), pp. 32–78.

48. P. A. Skovorodko. Slip effects in compressible turbulent channel flow. 28th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics (2012). *AIP Conf. Proc.* 1501 (2012), pp. 457–464.

49. Tang H., Liu T. A note on the conservative schemes for Euler equations. *J. of Comput. Physics*, 218 (2006), pp. 451–459.

50. M.M.M. El Telbany and A.J. Reynolds. Velocity distributions in plane turbulent channel flows. *J. Fluid Mech.* 100 part 1 (1980), pp. 1–29.

51. M.M.M. El Telbany and A.J. Reynolds. The structure of turbulent plane Couette flow. *J. of Fluids Engineering*, 104 (1982), pp. 367–372.

52. E. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, Berlin (1997).

53. T. Tsukahara, H. Kawamura, and K. Shingai. DNS of turbulent Couette flow with emphasis on the large-scale structure in the core region. *J. of Turbulence*, 7:19 (2006).

54. R.W.C.P. Verstappen and A.E.P. Veldman. Symmetry-preserving discretization of turbulent flow. *J. Comput. Phys.* 187 (2003), pp. 343–368.

55. К. Н. Волков. Формулировка граничных условий на стенке в расчетах турбулентных течений на неструктурированных сетках. *ЖВМиМФ*, 54:2 (2014), сс. 336–351. Translation: K. N. Volkov, Formulation of wall boundary conditions in turbulent flow computations on unstructured meshes, *Comput. Math. and Math. Phys.* 54:2 (2014), pp. 353–367.

56. A.J. Wachtor, F.F. Grinstein, C.R. DeVore, J.R. Ristorcelli, and L.G. Margolin. Implicit large-eddy simulation of passive scalar mixing in statistically stationary isotropic turbulence. *Phys. Fluids* 25 (2013), 025101-1–025101-19.
57. P. Woodward and P. Colella. The Numerical Simulation of Two-Dimensional Fluid Flow with Strong Shocks. *J. Comput. Phys.* 54 (1984), pp. 115–173.
58. А. А. Злотник, Б. Н. Четверушкин. О параболичности квазигазодинамической системы уравнений, ее гиперболической 2-го порядка модификации и устойчивости малых возмущений для них. *ЖВМиМФ*, 48:3 (2008), сс. 345–472. Translation: А. А. Zlotnik, В. N. Chetverushkin. Parabolicity of the Quasi-Gasdynamical System of Equations, Its Hyperbolic Second-Order Modification, and the Stability of Small Perturbations for Them. *Comput. Math. and Math. Phys.* 48:3 (2008), pp. 420–446.
59. А. А. Злотник. Линеаризованная устойчивость равновесных решений квазигазодинамической системы уравнений. Доклады академии наук. 2010, 434:5, сс. 599–603. Translation: A.A. Zlotnik. Linearized stability of equilibrium solutions to the quasi-gasdynamical system of equations. *Dokl. Math.* (2010) 82:2 (2010), pp. 811–815.
60. А.А. Злотник. Квазигазодинамическая система уравнений с общими уравнениями состояния. Доклады Академии наук, 2010, 431:5, сс. 605–609. Translation: A.A. Zlotnik. Quasi-gasdynamical system of equations with general equations of state. *Dokl. Math.* 81:2 (2010), pp. 312–316.
61. А.А. Злотник. О квазигазодинамической системе уравнений с общими уравнениями состояния и источником тепла. Матем. моделирование. 22:7 (2010). сс. 53–64. Translation: A.A. Zlotnik. On the quasi-gasdynamical system of equations with general equations of state and a heat source. *Math. Models Comput. Simul.* 22:7 (2010), pp. 53–64.
62. A. Zlotnik and V. Gavrilin, On quasi-gasdynamical system of equations with general equations of state and its application, *Math. Model. Anal.* 16:4 (2011), pp. 509–526.
63. Б.Н. Четверушкин. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. Москва, МАКС Пресс (2004).
64. B.N. Chetverushkin, Kinetic Schemes and Quasi-Gas Dynamic System of Equations, CIMNE, Barselona (2008).

65. Chetverushkin B., Shilnikov E., Davydov A. Numerical simulation of continuous media problems on hybrid computer systems. *Advances in Engineering Software*, 60–61 (2013), pp. 42–47.
66. Ю.В. Шеретов. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. Москва–Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» (2009).
67. Ю.В. Шеретов. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверской государственный университет, Тверь (2016).
68. Е.В. Шильников Моделирование течений вязкого газа на основе КГД системы уравнений на неортогональных индексных сетках. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 33 (2014), 20 с.
69. Т.Г. Елизарова, П.Н. Никольский. Численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода в течении за обратным уступом. *Вестник Московского Университета. Серия 3: Физика. Астрономия*. 4 (2007), сс. 14–17. Translation: T. G. Elizarova and P. N. Nikolskii, Numerical simulation of the laminar–turbulent transition in the flow over a backward-facing step. *Moscow Univ. Phys.* 62:216 (2007).
70. Т.Г. Елизарова. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир (2007).
71. T.G. Elizarova, P.N. Nikolskii, and J.C. Lengrand. A New Variant of Subgrid Dissipation for LES Method and Simulation of Laminar-Turbulent Transition in Subsonic Gas Flows. *Advances in Hybrid RANS-LES Modeling*, Shia-Hui Peng and Werner Haase, eds., Springer-Verlag, Berlin (2008), pp. 289–298.
72. T.G. Elizarova, A.A. Khokhlov, and Yu.V. Sheretov. Quasi-gas-dynamic numerical algorithm for gas flow simulations. *Int. J. Numer. Method Fluids* 56:8 (2008), pp. 1209–1215.
73. T.G. Elizarova, *Quasi-Gas Dynamic Equations*. Springer, Dordrecht (2009). ISBN 978-3-642-0029-5.
74. T.G. Elizarova and V.V. Seregin, Filtered simulation method for turbulent heat and mass transfer in gas dynamic flows. *Proceedings of the 6th International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer, Rome*. K. Hanjalic, Y. Nagano, S. Jakirlic, eds., Begell House Inc., (2009), pp. 383–386.

75. Т.Г. Елизарова, Е.В. Шильников. Возможности квазигазодинамического алгоритма для численного моделирования невязкого газа. ЖВМиМФ, 49:3 (2009), сс. 549–566. Translation: T.G. Elizarova and E.V. Shil'nikov. Capabilities of a quasi-gas-dynamic algorithm as applied to inviscid gas flow simulation. Comput. Math. and Math. Phys. 49 (2009), pp. 532–548. Erratum. Comput. Math. and Math. Phys. 50:4 (2010), pp. 747–748. <http://dx.doi.org/10.1134/S0965542509110050>

76. Т.Г. Елизарова, Е.В. Шильников. Анализ вычислительных свойств квазигазодинамического алгоритма на примере решения уравнений Эйлера. ЖВМиМФ, 49:11 (2009), сс. 1953–1969. Translation: T.G. Elizarova and E.V. Shil'nikov. Numerical analysis of a quasi-gasdynamic algorithm as applied to the Euler equations. Comput. Math. and Math. Phys. 49:1869 (2009), pp. 1869–1884. <http://dx.doi.org/10.1134/S0965542509110050>

77. Т. Г. Елизарова. Осреднение по времени как приближенный способ построения квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений. ЖВМиМФ, 51:11 (2011), сс. 2096–2105. Translation: T.G. Elizarova. Time averaging as an approximate technique for constructing quasi-gasdynamic and quasi-hydrodynamic equations. Comput. Math. and Math. Phys. 51:11 (2011), pp. 1973–1982. <http://dx.doi.org/10.1134/S0965542511110078>

78. I. A. Shirokov, T.G. Elizarova, I. Fedioun, J.-C. Lengrand. Numerical simulation of the laminar-turbulent boundary-layer transition on a hypersonic forebody using the quasi-gas dynamic equations. 4th European Conference for Aerospace Sciences (EUCASS), 4–10 July 2011, St-Petersburg.

79. О.В. Булатов, Т.Г. Елизарова. Регуляризованные уравнения мелкой воды и эффективный метод численного моделирования течений в неглубоких водоемах. ЖВМиМФ, 51:1 (2011), сс. 170–184. Translation: O.V. Bulatov, T.G. Elizarova. Regularized Shallow Water Equations and an Efficient Method for Numerical Simulation of Shallow Water Flows. Comput. Math. and Math. Phys. 51:1 (2011), pp. 160–173.

80. T.G. Elizarova and O.V. Bulatov. Regularized shallow water equations and a new method of simulation of the open channel flows. Comput. Fluids. 46: 1 (2011), pp. 206–211.

81. T.G. Elizarova and I.A. Shirokov. Numerical simulation of a nonstationary flow in the vicinity of a hypersonic vehicle. Math. Model Comput. Simul. 4:4 (2012), pp. 410–418.

82. T.G. Elizarova and I.A. Shirokov. Direct simulation of laminar-turbulent transition in a viscous compressible gas layer. *Comput. Math. Model.* 25:1 (2012), pp. 27–48.

83. Т.Г. Елизарова, И.А. Широков. Тестирование КГД алгоритма на примере задачи о распаде однородной изотропной турбулентности. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 35 (2013), 19 с. T.G. Elizarova and I.A. Shirokov. Testing of the QGD algorithm by a homogeneous isotropic gasdynamic turbulence decay. Preprint 35 (2013), Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Science, 19 p. Available at <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-35>.

84. Т.Г. Елизарова, И.А. Широков. Ламинарный и турбулентный режимы распада вихря Тейлора–Грина. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 63 (2013), 16 с. T.G. Elizarova and I.A. Shirokov. Laminar and turbulent regimes of Taylor–Green vortex decay. Preprint 63 (2013), Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Science, 16 p. Available at <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-63>.

85. I. A. Shirokov and T. G. Elizarova. Simulation of laminar–turbulent transition in compressible Taylor–Green flow basing on quasi-gas dynamic equations. *J. of Turbulence*, 15:10 (2014), pp. 707–730. <http://dx.doi.org/10.1080/14685248.2014.927581>

86. Т.Г.Елизарова, М.В. Попов. Численное моделирование трехмерных течений квазинейтрального газа на основе сглаженных уравнений магнитной гидродинамики. *ЖВМиМФ.* 55:8 (2015), сс.1363–1379. Translation: T.G. Elizarova, M.V. Popov. Numerical Simulation of Three_Dimensional Quasi_Neutral Gas Flows Based on Smoothed Magnetohydrodynamics Equations. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 55:8 (2015), pp. 1330–1345.

87. M.V. Popov, T.G. Elizarova. Smoothed MHD equations for numerical simulations of ideal quasi-neutral gas dynamic flows, *Computer Physics Communications*, 196 (2015), pp. 348–361. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cpc.2015.07.003>

88. Т.Г. Елизарова, И.А. Широков. Моделирование турбулентного течения Куэтта на основе КГД уравнений. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 11 (2015), 26 с. T. G. Elizarova, I. A. Shirokov. Numerical simulation of the turbulent Couette flow based on the quasi-gasdynamic equations. Preprint 11

(2015), Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Science, 26 p. Available at <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-11>

89. О.В. Булатов, Т.Г.Елизарова. Регуляризованные уравнения мелкой воды для численного моделирования течений с подвижной береговой линией. ЖВМиМФ, 56:4 (2016), сс. 158–177. Translation: O.V. Bulatov, T.G. Elizarova. Regularized Shallow Water Equations for Numerical Simulation of Flows with a Moving Shoreline. Comput. Math. and Math. Phys. 56: 4 (2016), pp. 661–679.

90. И. А. Широков, Т.Г. Елизарова. Применение квазигазодинамических уравнений к моделированию пристеночных турбулентных течений. Труды ф-та ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова. Прикладная математика и информатика. Под ред. В.И. Дмитриева, 51. М.: МАКС Пресс, (2016), сс. 52–80. Translation: I.A. Shirokov, T.G. Elizarova. Application of Quasi-Gas Dynamic Equations to Numerical Simulation of Near-Wall Turbulent Flows. Comput. Math. and Model. 28:37 (2016), pp. 1–23. <http://dx.doi.org/10.1007/s10598-016-9344-z>

91. Т.Г. Елизарова, Д.С. Сабулин. Применение регуляризованных уравнений мелкой воды к моделированию сейшевых колебаний уровня Азовского моря. Матем. Моделирование, 29:1, (2017), сс. 45–62. Translation: T.G. Elizarova, D.S. Saburin. Application of the regularized shallow water equations for numerical simulations of casavie fluctuations in the Azov sea. Math. Models and Comp. Simul. 29:1 (2017), pp. 45–62.

92. Т.Г. Елизарова, И.А. Широков, М.В. Попов. О возможностях квазигазодинамической модели для численного анализа сверхзвукового турбулентного течения межзвездного газа. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 9 (2017), 21 с. T. G. Elizarova, I. A. Shirokov, M.V. Popov. For the capabilities of the quasi-gasdynamic algorithm for the numerical simulation of supersonic turbulent flows of interstellar gas. Preprint 9 (2017), Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Science, 21 p. Available at <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-9>

Авторы:

Татьяна Геннадьевна Елизарова, профессор, главный научный
сотрудник Института прикладной математики им. М.В. Келдыша;

Иван Анатольевич Широков, кандидат физико-математических наук,
младший научный сотрудник факультета ВМК
МГУ имени М.В. Ломоносова

Научное издание

ЕЛИЗАРОВА Татьяна Геннадьевна
ШИРОКОВ Иван Анатольевич
РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ
И ПРИМЕРЫ ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ
ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ
ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ
Монография

Подписано в печать 26.05.2017 г.

Формат 60х90 1/16. Усл.печ.л. 8,5. Тираж 200 экз. Изд. № 142.

Издательство ООО «МАКС Пресс». Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова,
2-й учебный корпус, 527 к.

Тел. 8(495)939-3890/91. Тел./Факс 8(495)939-3891.

Отпечатано с готового оригинал-макета
в АО «Первая Образцовая типография»
Филиал «Чеховский Печатный Двор»

142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1
Сайт: www.chpk.ru, E-mail: sales@chpk.ru, тел. 8 (499)270-73-59.

Заказ №