

УДК 519.63:531.332

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ СПИРАЛЬНО-ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ ГАЗОВЫХ ДИСКАХ

© 2018 г. Т. Г. Елизарова^{1*}, А. А. Злотник^{2**}, М. А. Истомина¹

¹Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша, Москва, Россия

²Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

Поступила в редакцию 24.05.2017 г.; принята в печать 05.09.2017 г.

Работа посвящена численному моделированию спирально-вихревых структур во вращающихся газовых дисках в рамках простой модели двумерных нестационарных баротропных уравнений Эйлера с массовой силой и указывает на возможность чисто гидродинамической основы формирования и эволюции таких структур. Выводятся новые аксиально симметричные стационарные решения уравнений, модифицирующие известные приближенные решения. Эти решения с малыми возмущениями используются как начальные данные в нестационарной задаче, для решения которой демонстрируется образование рукавов плотности с их раздвоением и анализируется перераспределение углового момента. Дополнительно подтверждается корректность лабораторных экспериментов с мелкой водой для описания формирования крупных вихревых структур в тонких газовых дисках. Расчеты основаны на специальной квазигазодинамической регуляризации уравнений Эйлера в полярных координатах.

DOI: 10.7868/S0004629918010012

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение эволюционных процессов, протекающих в аккреционных дисках различной природы, является одной из активно исследуемых задач астрофизики (см., в частности, [1–8]). Согласно [4, 5] спиральная структура туманностей впервые была замечена в наблюдениях лорда Росса в 1845 г. Позднее спиральные рукава и гигантские вихри — циклоны и антициклоны — были обнаружены в двумерном поле скоростей газовых дисков ряда галактик. Спирали характеризуются своей формой. Наиболее часто встречаются отстающие спирали, которые вращаются концами назад и имеют естественную аэродинамическую форму. Распространенным явлением является ветвление спиралей, при котором рукава раздваиваются в направлении их концов. Наблюдаются галактические диски в виде концентрических колец.

В [2, 4, 5] обсуждались механизмы возникновения спирально-вихревых структур в астрофизических объектах — галактиках и аккреционных дисках. В частности, генерация спиральных волн плотности связывалась с нелинейным взаимодействием гравитационной и гидродинамической неустойчивости, которая в реальных галактиках может быть

вызвана быстрыми локальными падениями скорости вращения газа. Последние хорошо заметны на кривых вращения галактик, полученных ранее в наблюдениях на телескопах.

Для экспериментального моделирования генерации спиральной структуры в газовом галактическом диске, вызванной развитием гидродинамической неустойчивости из-за наличия градиента скорости вращения, использовалась вращающаяся мелкая вода. В частности, на установке “Спираль” была подтверждена правильность гравитационно-гидродинамической теории генерации спиральной структуры. Наблюдалось ветвление рукавов и были обнаружены антициклонические вихри [2].

Теоретическое исследование устойчивости астрофизических газовых и галактических дисков ведется начиная с 1940-х годов. Полученные результаты и обширная библиография представлены в [4, 7, 9]. В основном изучены различные аспекты развития малых возмущений в рамках линейной теории и спектральных разложений.

Аккреционные диски представляют собой вращающиеся газовые образования в окрестности компактных притягивающих центров. Такие среды можно описывать на основе уравнений Эйлера газовой динамики с использованием пространственного разрешения, в котором шаг сетки существенно

*E-mail: telizar@mail.ru

**E-mail: azlotnik@hse.ru

превышает характерные длины свободного пробега молекул в газовом диске.

Численное моделирование гравитационных неустойчивостей в аккреционных дисках проводилось, в частности, в работах [10–13]. Поскольку согласно [4] при генерации спиральных рукавов в реальных галактиках роль вязкости пренебрежимо мала, то расчеты были выполнены именно на основе решения уравнений Эйлера (без учета вязких слагаемых). Математическое моделирование газодинамических течений в аккреционном диске с использованием новых вычислительных подходов может как подтвердить закономерности, полученные ранее, так и выявить новые особенности эволюции таких течений.

В дополнение к уже проведенным исследованиям представляет большой интерес использование аппарата прямого численного моделирования для проверки гипотез о чисто гидродинамической природе формирования рукавов в газовых дисках и аналогии между гравитационной неустойчивостью в газовых дисках и в течениях мелкой воды. Целью данной работы является анализ этих вопросов в рамках простой модели двумерных нестационарных баротропных уравнений Эйлера с массовой силой с использованием полярной системы координат. Такая постановка задачи отнюдь не претендует на полноту описания физики аккреционных дисков, но в целом находится в соответствии с достаточно общепринятым подходом [12].

В выполняемых расчетах исходным является начальное распределение плотности и скорости, выведенное для стационарной трехмерной конфигурации в баротропном приближении в [10]. В отличие от [1–12] для редуцирования трехмерной задачи к двумерной применяется не приближенное, а *точное* усреднение исходных уравнений по вертикальной координате. Решающую роль играет усреднение энтальпии вместо плотности. При этом стационарные решения построены не только для изэнтропического течения (для показателя адиабаты $\gamma > 1$), но и для часто обсуждаемого в литературе изотермического течения ($\gamma = 1$).

Эти новые аксиально симметричные стационарные решения используются в качестве начального распределения (с внесением малого возмущения) для нестационарных уравнений. Устойчивость начальных распределений к малым возмущениям аналитически в данной работе не исследовалась, однако из физических соображений известно, что баротропные течения газа в поле гравитационных сил являются неустойчивыми [3, 4].

В настоящей работе в отличие от [10–12] задача решается в рамках уравнений Эйлера в баротропном приближении, что достаточно естественно при построении начальных распределений именно в его рамках. Применяемый в расчетах численный

алгоритм основан на разностной аппроксимации предварительно регуляризованных (квазигазодинамических, КГД) уравнений, адаптированных для описания данной задачи. Уравнения и их разностный аналог записываются в естественной полярной системе координат. КГД алгоритмы ранее использовались для расчета широкого круга газодинамических течений [14–16], в том числе для модели мелкой воды [17].

Содержание работы таково. В разделе 2 выписаны уравнения газовой динамики в баротропном приближении в полярной системе координат. Выполнено построение новых стационарных решений. В разделе 3 приведены регуляризованные (КГД) уравнения и в общих чертах описан численный алгоритм. Результаты численного моделирования приведены в разделе 4. Основные результаты подытожены в разделе 5. Отметим, что дополнительные детали и первые результаты данного исследования даны в [18].

2. БАРОТРОПНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ И ИХ СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

Система уравнений Эйлера в баротропном случае в полярной системе координат (r, φ) включает следующие уравнения баланса массы и импульса

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u_r)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u_r \mathbf{u}) + \frac{\partial p(\rho)}{\partial r} - \frac{\rho u_\varphi^2}{r} = \rho f_r, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho u_\varphi)}{\partial t} + \frac{1}{r} \operatorname{div}(r \rho u_\varphi \mathbf{u}) + \frac{1}{r} \frac{\partial p(\rho)}{\partial \varphi} = \rho f_\varphi, \quad (3)$$

где $\rho(r, \varphi, t)$ — плотность, $\mathbf{u} = (u_r, u_\varphi)$ — вектор скорости, $u_r(r, \varphi, t)$ и $u_\varphi(r, \varphi, t)$ — его радиальный и азимутальный компоненты и $\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$ — дивергенция вектор-функции $\mathbf{v} = (v_r, v_\varphi)$. Кроме того, $p(\rho) = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma = k\rho^\gamma$ — давление газа, где $\gamma = \operatorname{const} \geq 1$ — показатель адиабаты, а коэффициент $k = p_0/\rho_0^\gamma > 0$ определяется постоянной удельной энтропией течения при $\gamma > 1$ (изэнтропический случай) или постоянной температурой при $\gamma = 1$ (изотермический случай). При этом скорость звука — это $c_s = \sqrt{\gamma p(\rho)/\rho}$. Также f_r и f_φ — радиальный и азимутальный компоненты внешней массовой силы.

В работе [10] изучены стационарные уравнения газовой динамики с учетом силы гравитации в (r, φ, z) -геометрии

$$\frac{\partial p(\rho)}{\partial r} - \frac{\rho u_\varphi^2}{r} = -\frac{\rho r}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (4a)$$

$$\frac{\partial p(\rho)}{\partial z} = -\frac{\rho z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (4b)$$

записанные в предположении, что $\rho = \rho(r, z)$, $u_\varphi = u_\varphi(r)$ и $u_r = u_z = 0$.

Пусть $p(\rho) = k\rho^\gamma$ с $k > 0$, $\gamma \geq 1$ и задана функция

$$\zeta \in C^1(\bar{\Omega}_r), \\ \zeta(r) > 0, \quad r + \zeta(r)\zeta'(r) > 0 \quad \text{на } \bar{\Omega}_r,$$

где $\Omega_r := (r_1, r_2)$ с $r_1 > 0$.

1. Для уравнений (4) в области $\{(r, z); r \in \bar{\Omega}_r, |z| \leq \zeta(r)\}$ найдено решение

$$\rho(r, z) = \left[\frac{1}{k\gamma'} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + \zeta^2(r)}} \right) \right]^{1/(\gamma-1)}, \quad (5)$$

$$u_\varphi(r) = \left[r \frac{r + \zeta(r)\zeta'(r)}{(r^2 + \zeta^2(r))^{3/2}} \right]^{1/2}, \quad (6)$$

при $\gamma > 1$, где $\gamma' = \gamma/(\gamma - 1)$. Оно обладает свойством

$$\rho(r, \pm\zeta(r)) = 0 \quad \text{на } \bar{\Omega}_r. \quad (7)$$

Эти формулы легко проверить, переписав уравнения (4) в виде

$$k\gamma' \frac{\partial}{\partial r} (\rho^{\gamma-1}) - \frac{u_\varphi^2}{r} = -\frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (8)$$

$$k\gamma' \frac{\partial}{\partial z} (\rho^{\gamma-1}) = -\frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

относительно энтальпии $k\gamma' \rho^{\gamma-1}$.

В [10, 12] использовались *приближенные* решения, полученные интегрированием (5) по z .

Оказывается, что можно *точно* выполнить усреднение решений по z так, чтобы новые решения $\bar{\rho}(r) > 0$, $u_\varphi(r)$ подчинялись стационарному уравнению

$$\frac{dp(\rho)}{dr} - \frac{\rho u_\varphi^2}{r} = \rho F(r) \quad \text{на } \bar{\Omega}_r. \quad (9)$$

Для этого при фиксированном r проинтегрируем уравнение (8) по $[-\zeta(r), \zeta(r)]$ и разделим результат на $2\zeta(r)$. С учетом свойства (7) имеем

$$k\gamma' \frac{1}{2\zeta(r)} \frac{d}{dr} \int_{-\zeta(r)}^{\zeta(r)} \rho^{\gamma-1} dz - \frac{u_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{r\sqrt{r^2 + \zeta^2(r)}}. \quad (10)$$

Введем функцию

$$\bar{\rho}(r) := \left(\frac{1}{2\zeta(r)} \int_{-\zeta(r)}^{\zeta(r)} \rho^{\gamma-1}(r, z) dz \right)^{1/(\gamma-1)} = \left(\frac{1}{\zeta(r)} \int_0^{\zeta(r)} \rho^{\gamma-1}(r, z) dz \right)^{1/(\gamma-1)}.$$

Возводя обе части (5) в степень $\gamma - 1$ и интегрируя результат по z , имеем

$$\bar{\rho}(r) = \left(\frac{\lambda(r)}{k\gamma'} \right)^{1/(\gamma-1)}, \quad (11)$$

с функцией

$$\lambda(r) := \frac{1}{\zeta(r)} \ln \left(\frac{\zeta(r)}{r} + \sqrt{\frac{\zeta^2(r)}{r^2} + 1} \right) - \frac{1}{\sqrt{r^2 + \zeta^2(r)}}. \quad (12)$$

Теперь перепишем равенство (10) в виде

$$k\gamma' \frac{d}{dr} (\bar{\rho}^{\gamma-1}) - k\gamma' \left(\frac{d}{dr} \frac{1}{\zeta(r)} \right) \zeta(r) \bar{\rho}^{\gamma-1} - \frac{u_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{r\sqrt{r^2 + \zeta^2(r)}},$$

откуда

$$k\gamma' \frac{d}{dr} (\bar{\rho}^{\gamma-1}) - \frac{u_\varphi^2}{r} = F(r) := -\frac{1}{r\sqrt{r^2 + \zeta^2(r)}} - \frac{\zeta'(r)}{\zeta(r)} \lambda(r).$$

Тем самым найденные функции $\bar{\rho}$ и u_φ , см. формулы (11), (12) и (6), удовлетворяют и стационарному уравнению (9) с введенной F .

2. При $\gamma = 1$ фиксируем $\rho_0 > 0$ и перепишем уравнения (4) в виде

$$k \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{\rho}{\rho_0} - \frac{u_\varphi^2(r)}{r} = -\frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (13)$$

$$k \frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{\rho}{\rho_0} = -\frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}.$$

В силу первого из этих уравнений имеем

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{k} \left(\int \frac{u_\varphi^2(r)}{r} dr + \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \psi(z) \right), \quad (14)$$

а в силу второго можно взять $\psi(z) = 0$ (соответствующая формула имеется в [10]). Отметим, что тогда согласно (14) функция $\rho(r, z)$ убывает с ростом $|z|$.

Найдем решение, обладающее свойством

$$\rho(r, \pm\zeta(r)) = \rho_0 \quad \text{на } \bar{\Omega}_r, \quad (15)$$

ср. с (7). Подставим $z = \zeta(r)$ в (14) и, продифференцировав обе части полученного равенства по r с учетом последнего свойства, получим

$$\frac{u_\varphi^2(r)}{r} = -\frac{d}{dr} \frac{1}{\sqrt{r^2 + \zeta^2(r)}}.$$

Поэтому u_φ по-прежнему задается формулой (6) (при желании в ее правой части можно поставить знак минус). Теперь из (14) и (15) следует формула

$$\begin{aligned} \frac{\rho(r, z)}{\rho_0} &= \quad (16) \\ &= \exp \left[\frac{1}{k} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + \zeta^2(r)}} \right) \right], \end{aligned}$$

ср. с (5). С той же целью, что и в п. 1, выполним усреднение найденного решения по z . Введем функцию $\bar{\rho}$ такую, что

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\rho}(r)}{\rho_0} &:= \exp \left(\frac{1}{2\zeta(r)} \int_{-\zeta(r)}^{\zeta(r)} \ln \frac{\rho(r, z)}{\rho_0} dz \right) = \\ &= \exp \left(\frac{1}{\zeta(r)} \int_0^{\zeta(r)} \ln \frac{\rho(r, z)}{\rho_0} dz \right). \end{aligned}$$

В силу (16) подобно (11) имеем

$$\bar{\rho}(r) = \rho_0 \exp \left(\frac{\lambda(r)}{k} \right). \quad (17)$$

Интегрирование уравнения (13) при фиксированном r по $z \in [-\zeta(r), \zeta(r)]$ и деление результата на $2\zeta(r)$ дает:

$$\begin{aligned} k \frac{1}{2\zeta(r)} \int_{-\zeta(r)}^{\zeta(r)} \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{\rho(r, z)}{\rho_0} dz - \frac{u_\varphi^2}{r} &= \\ &= -\frac{1}{2\zeta(r)} \int_{-\zeta(r)}^{\zeta(r)} \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dz. \end{aligned}$$

Рассуждая так же, как и в п. 1, с учетом свойства (15) получим уравнение

$$k \frac{d}{dr} \ln \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} - \frac{u_\varphi^2}{r} = F \quad \text{на } \bar{\Omega}_r$$

с прежней функцией F . Тем самым найденные функции $\bar{\rho}$ и u_φ , см. (17), (12) и (6), удовлетворяют и стационарному уравнению (9) при $\gamma = 1$ с этой F .

3. РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ И МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Для численного решения уравнений Эйлера (1)–(3) предварительно специальным образом строятся регуляризованные (КГД) уравнения. Они имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_m = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial(\rho u_r)}{\partial t} + \operatorname{div}(u_r \mathbf{j}_m) + \frac{\partial p(\rho)}{\partial r} - \frac{\rho_* u_\varphi^2}{r} = \quad (19)$$

$$= \rho_* f_r + \operatorname{div}(\rho w_r^* \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial r} (\tau c_s^2 \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})) - 2\rho \frac{u_\varphi}{r} w_\varphi^*,$$

$$\frac{\partial(\rho u_\varphi)}{\partial t} + \frac{1}{r} \operatorname{div}(r u_\varphi \mathbf{j}_m) + \frac{1}{r} \frac{\partial p(\rho)}{\partial \varphi} = \quad (20)$$

$$= \rho_* f_\varphi + \frac{1}{r} \operatorname{div}(r \rho w_\varphi^* \mathbf{u}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tau c_s^2 \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})).$$

В них регуляризованные поток массы \mathbf{j}_m , плотность ρ_* и регуляризирующие скорости таковы

$$\mathbf{j}_m = (j_{mr}, j_{m\varphi}), \quad j_{mr} = \rho(u_r - w_r),$$

$$j_{m\varphi} = \rho(u_\varphi - w_\varphi), \quad \rho_* = \rho - \tau \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}),$$

$$w_r = \frac{\tau}{\rho} \left[\operatorname{div}(\rho u_r \mathbf{u}) + \frac{\partial p(\rho)}{\partial r} - \frac{\rho u_\varphi^2}{r} - \rho f_r \right],$$

$$w_\varphi = \frac{\tau}{\rho} \left[\frac{1}{r} \operatorname{div}(r \rho u_\varphi \mathbf{u}) + \frac{1}{r} \frac{\partial p(\rho)}{\partial \varphi} - \rho f_\varphi \right],$$

$$w_r^* = \tau \left[u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} u_\varphi \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p(\rho)}{\partial r} - \frac{u_\varphi^2}{r} - f_r \right],$$

$$w_\varphi^* = \tau \left[\frac{u_r}{r} \frac{\partial (r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \rho} \frac{\partial p(\rho)}{\partial \varphi} - f_\varphi \right].$$

КГД система тесно связана с системой уравнений Эйлера и отличается от нее включением диссипативных регуляризирующих слагаемых с малым коэффициентом — параметром $\tau = \tau(r, \rho, \mathbf{u}) > 0$, имеющим размерность времени. Точные решения стационарной системы Эйлера являются одновременно и точными решениями стационарной КГД системы согласно структуре ее τ -диссипации. Для КГД уравнений выполнен закон сохранения момента импульса [16].

Отметим, что баротропная КГД система в декартовых координатах была предложена и изучена в [19] и затем исследовалась в [20] и других работах.

Найденные в предыдущем разделе аксиально симметричные стационарные решения $\rho = \rho(r)$,

$u_r = 0$, $u_\varphi = u_\varphi(r)$ при $f_r = f_r(r)$ и $f_\varphi = 0$ являются точными решениями не только системы Эйлера, но и ее КГД расширения. Действительно, для таких решений $w_\varphi = w_\varphi^* = 0$, а уравнение (19) сводится к уравнению (9) с $F = f_r$. Кроме того, $w_r = w_r^* = j_{mr} = 0$ и поэтому выполняются также уравнения (18) и (20).

Для системы уравнений (18)–(20) ставится начально-краевая задача в кольце $\Omega_r \times [0, 2\pi)$. По φ ставятся условия 2π -периодичности решения.

КГД подход позволяет применять классический вариант метода конечных объемов с аппроксимацией всех потоковых слагаемых с помощью центральных разностей по пространству в сочетании с явной аппроксимацией по времени. Искомые газодинамические величины относятся к расчетным узлам сетки, а потоки вычисляются на границах ячеек в полуцелых узлах. При этом τ -слагаемые обеспечивают условную устойчивость построенной разностной схемы. В компактном операторном виде она выписана в [18].

Параметр регуляризации задается в виде

$$\tau = \tau(r, \rho, \mathbf{u}) = \alpha \sqrt{\Delta S} / (c_s + \sqrt{u_r^2 + u_\varphi^2}), \quad (21)$$

$$\Delta S = r \Delta r \Delta \varphi,$$

где параметр $0 < \alpha < 0.5$ подбирается из соображений устойчивости и точности расчета, а ΔS оценивает площадь ячейки сетки по пространству ($\Delta r, \Delta \varphi$ — ее шаги).

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

4.1. Общие замечания

В соответствии с [11, 12] задача решается в безразмерных переменных $r = Rr'$, $t = t_0 t'$, $\rho = \rho_0 \rho'$, $u_r = u_0 u'_r$, $u_\varphi = u_0 u'_\varphi$, $p = p_0 p'$, где R — характерный пространственный размер, а остальные множители выражаются формулами

$$t_0^2 = \frac{R^3}{GM}, \quad \rho_0 = \frac{M_0}{R^3}, \quad u_0^2 = \frac{GM}{R}, \quad p_0 = \frac{GM^2}{R^4},$$

причем M_0 — характерная масса, G — гравитационная постоянная. Характерные для астрофизики диапазоны величин таковы $G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ см}^3 \text{ г}^{-1} \text{ с}^{-2}$, $M_0 = 2 \times 10^{33} - 6 \times 10^{33} \text{ г}$, $R = 10^{11} - 10^{14} \text{ см}$. Переход к безразмерным переменным не меняет вида КГД системы.

Расчетная область — кольцо $(r_1, r_2) \times [0, 2\pi)$ с $r_1 = 0.2, r_2 = 1.4$.

В соответствии с [11] форма исходного газового облака задается функцией $\zeta(r) = \pm ar \exp(-b(r - r_0)^2)$ с параметрами $a = 0.2, b = 9.0, r_0 = 0.8$, см. рис. 1. Вид соответствующих стационарных

распределений плотности ρ и угловой скорости u_φ также приведен на рис. 1.

Начальное распределение ρ берется по формулам (11) ($\gamma > 1$), (17) ($\gamma = 1$) и (12). Начальные распределения компонентов скорости — это $u_r^0 = 0$ и

$$u_\varphi^0(r, \varphi) = u_\varphi(r)(1 + A e^{-b(r-r_0)^2} \sin(N_0 \varphi)), \quad (22)$$

являющееся возмущением стационарной функции u_φ , см. (6). По сравнению с [11] возмущение скорости сглажено по r . Параметр $A > 0$ — амплитуда, а N_0 — число периодов возмущения на $[0, 2\pi]$. Массовая сила задается в виде $f_r = F$, см. (9) и рис. 1, и $f_\varphi = 0$.

На границах кольца ставятся “мягкие” граничные условия сноса для искомых функций. На внешней границе это обеспечивает практически свободное прохождение возмущений через нее. По углу ставятся условия 2π -периодичности.

Взята равномерная по (r, φ) с числом узлов $(N_r + 2) \times (N_\varphi + 1) = 80 \times 260$ в базовых вариантах расчетов и по t с шагом $\Delta t = 0.0005$; это значение не оптимизировалось. Для задания граничных условий используются фиктивные узлы. Безразмерное время расчета было ограничено значением $T = 10$. Все расчеты выполнены на персональном компьютере.

Отметим, что численный расчет течения с начальным невозмущенным стационарным распределением оказывается устойчивым, причем распределения плотности на моменты времени $t = 0$ и 10 практически совпадают.

4.2. Численное моделирование развития возмущений

Далее представлены результаты расчетов течений для параметров из [11, 12], а именно, в случае $\gamma = 5/3, k = 0.012$. В формуле (22) взяты параметры $A = 0.1$ и $N_0 = 1, 2, 3, 5, 7, 10$. Кроме того, кратко описаны результаты в приближении мелкой воды и для $\gamma = 1$.

Согласно [4] типичные значения c_s в газовом диске составляют порядка 10 км/с при угловой скорости его вращения ω порядка 200 км/с , что определяет число Маха $M \sim 20$. При таких значениях M может возникать центробежная неустойчивость, относящаяся к классу неустойчивостей сдвиговых течений и вызванная тем, что угловая скорость вращения центральной части диска больше, чем его периферии. А именно, оценки показывают, что при выбранном $k = 0.012$ в центре диска $M_1 \sim 23, \omega_1 \sim 11.5$, а вблизи его внешней границы $M_2 \sim 8, \omega_2 \sim 0.6$. Следует отметить, что в силу выбранной нами постановки задачи все виды

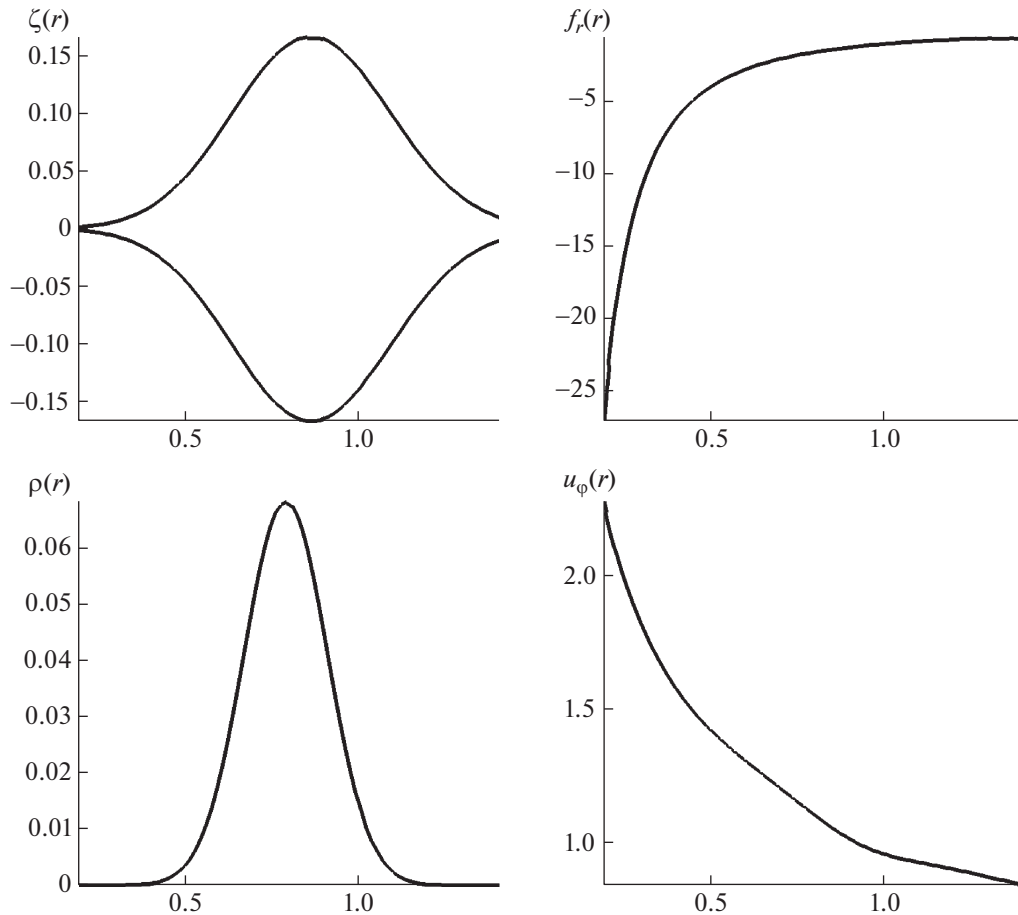


Рис. 1. Границы вещества $\pm\zeta(r)$, сила $f_r(r)$ и стационарные распределения $\rho(r)$ и $u_\varphi(r)$ при $\gamma = 5/3$.

неустойчивостей, которые известны в двумерных течениях, в наших расчетах автоматически присутствуют и трудноразделимы.

Уменьшение амплитуды возмущения A до 0.01 или увеличение ее до 0.2 приводит к пропорциональному изменению максимумов плотности без изменения физической картины решения.

На рис. 2 показано развитие возмущений для $N_0 = 1, 2, 3, 5, 7$. Для всех вариантов малое начальное возмущение, внесенное в u_φ , приводит к развитию крупномасштабных образований и формированию отстающих рукавов плотности характерной аэродинамической формы. Заметно раздвоение максимумов плотности в спиральных рукавах, то есть формирование в одном рукаве двух максимумов плотности. Раздвоение рукавов развивается от начала рукава к его концу. Подобный эффект наблюдается в реальных галактиках.

На приведенных графиках эволюции ρ крупные вихревые структуры свободнее формируются при малых N_0 . При больших N_0 формируются более

мелкие структуры, с течением времени эволюционирующие в кольцевые образования. Так, эволюция ρ при $N_0 = 10$ представлена на рис. 3 для $t = 0.6, 1.1, 3, 9.4$. На них наблюдаются развитие возмущений плотности и формирование классических спиральных рукавов в виде отстающих спиралей. С течением времени система рукавов сглаживается, и распределение ρ принимает форму концентрических колец на временах $t \sim 8-9$.

Отметим, что сложная вихревая структура решений хорошо видна, хотя взятая пространственная сетка не слишком мелкая. Это свидетельствует о достаточно высокой фактической точности алгоритма, несмотря на его формальный первый порядок. Важно, что распределение ρ на момент времени $t = 1.1$ на рис. 3 близко соответствует полученному в [13], где данная задача решалась в рамках полных (не баротропных) уравнений Эйлера методами более высокого порядка точности на аналогичной пространственной сетке.

На двух последних графиках из рис. 3 приведены распределения u_r на момент $t = 2.0$ и типичного распределения u_φ , мало меняющегося со временем.

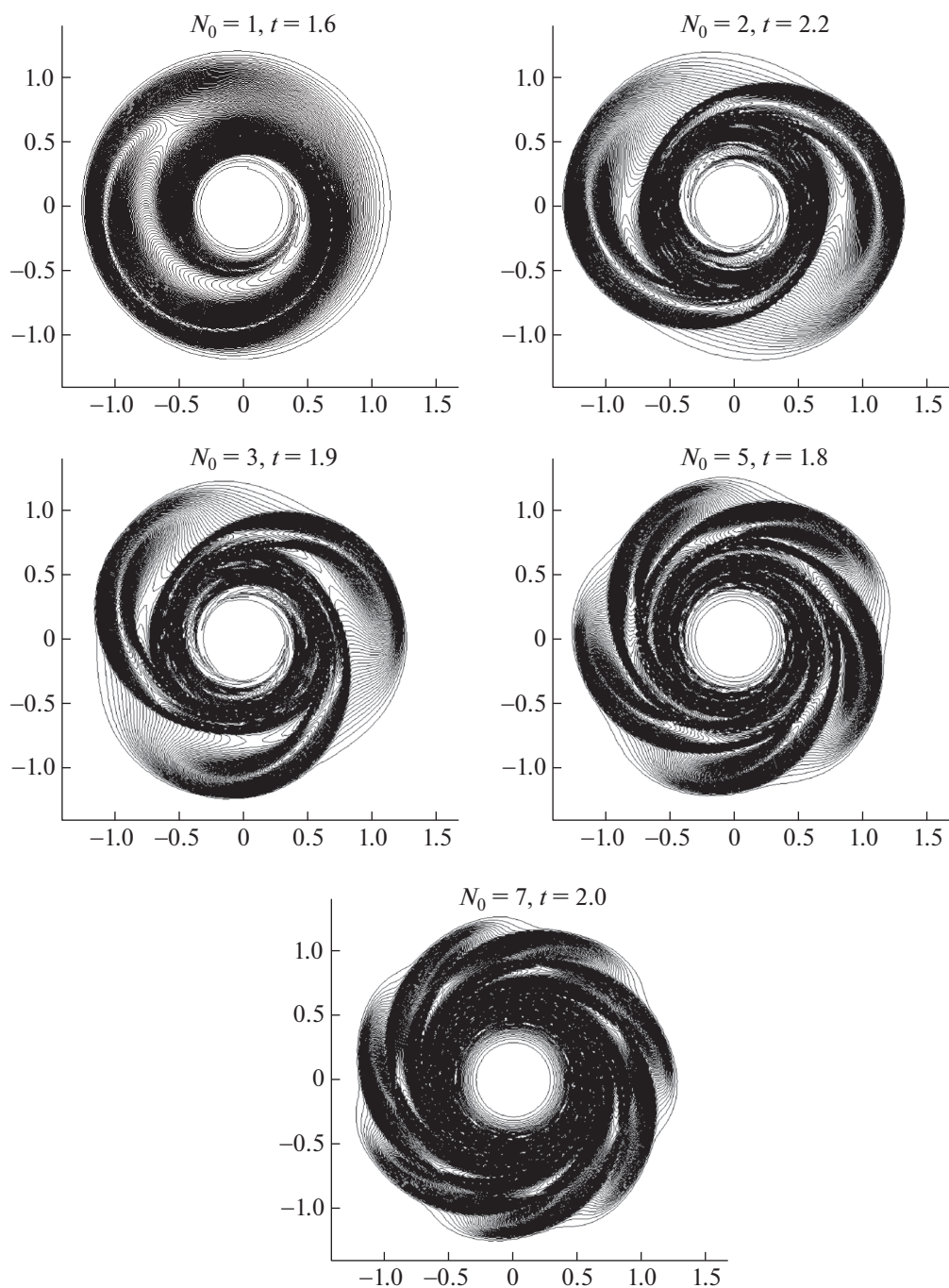


Рис. 2. Распределения ρ для различных N_0 при указанных t .

Видно, что u_r меняет знак, что в принципе может вызывать появление в течении циклонических вихрей. Их отсутствие в наших расчетах связано с тем, что по абсолютной величине u_r невелика и не превосходит 1% от u_φ (эти возмущения обусловлены постановкой граничных условий сноса). Поэтому линии тока в полученном течении по своей форме близки к концентрическим окружностям.

Формирование крупных структур в газовых дисках сопровождается перераспределением мгновенного углового момента $M = r\rho u_\varphi$ и смещением его максимума к внутренней границе диска, а это может способствовать выпадению вещества на центральное притягивающее тело. Перенос M происходит за счет движения вихревых структур без нагрева газа, который в данной модели мал.

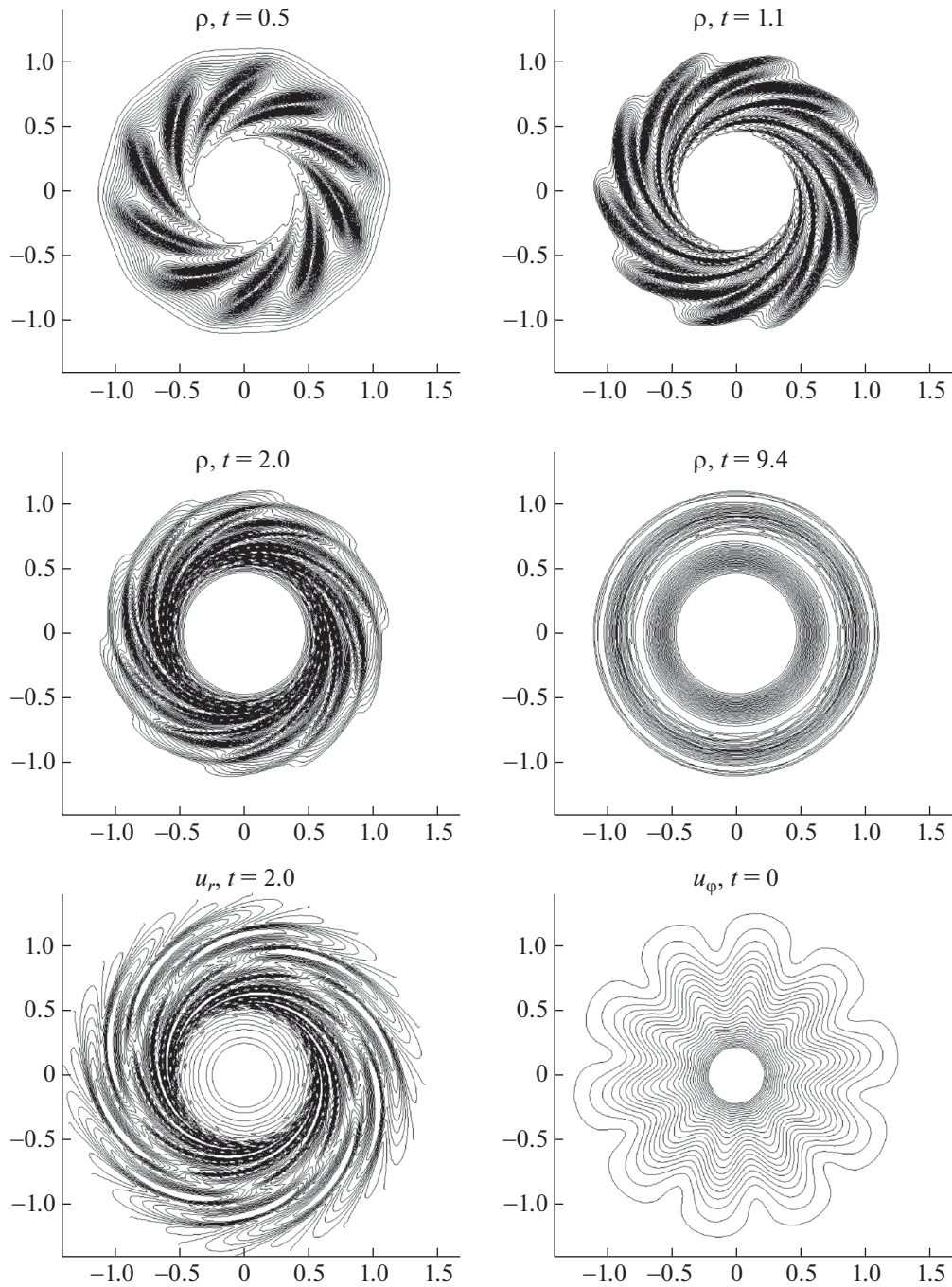


Рис. 3. Распределения ρ для $t = 1.0, 1.1, 2.0, 9.4$ и распределения u_r для $t = 2.0$ и u_φ для $t = 0.0$, при $N_0 = 10$.

На рис. 4 приведены графики M (при $\varphi = 0$) для трех характерных моментов времени для всех рассмотренных N_0 . Наиболее интенсивный перенос M наблюдается при малых N_0 , когда формируются наиболее крупные вихревые структуры и ярко выраженные рукава в распределении плотности. При $N_0 = 10$ перенос M затруднен из-за взаимного влияния возникающих вихрей.

Основные расчеты выполнены при выборе $\alpha = 0.3$ в формуле для τ (21). Уменьшение α до 0.1 приводит к появлению осцилляций численного решения. Увеличение α до 0.4 несколько сглаживает численное решение, а дальнейшее увеличение приводит к излишнему размазыванию ρ . Сгущение пространственной сетки практически не меняет

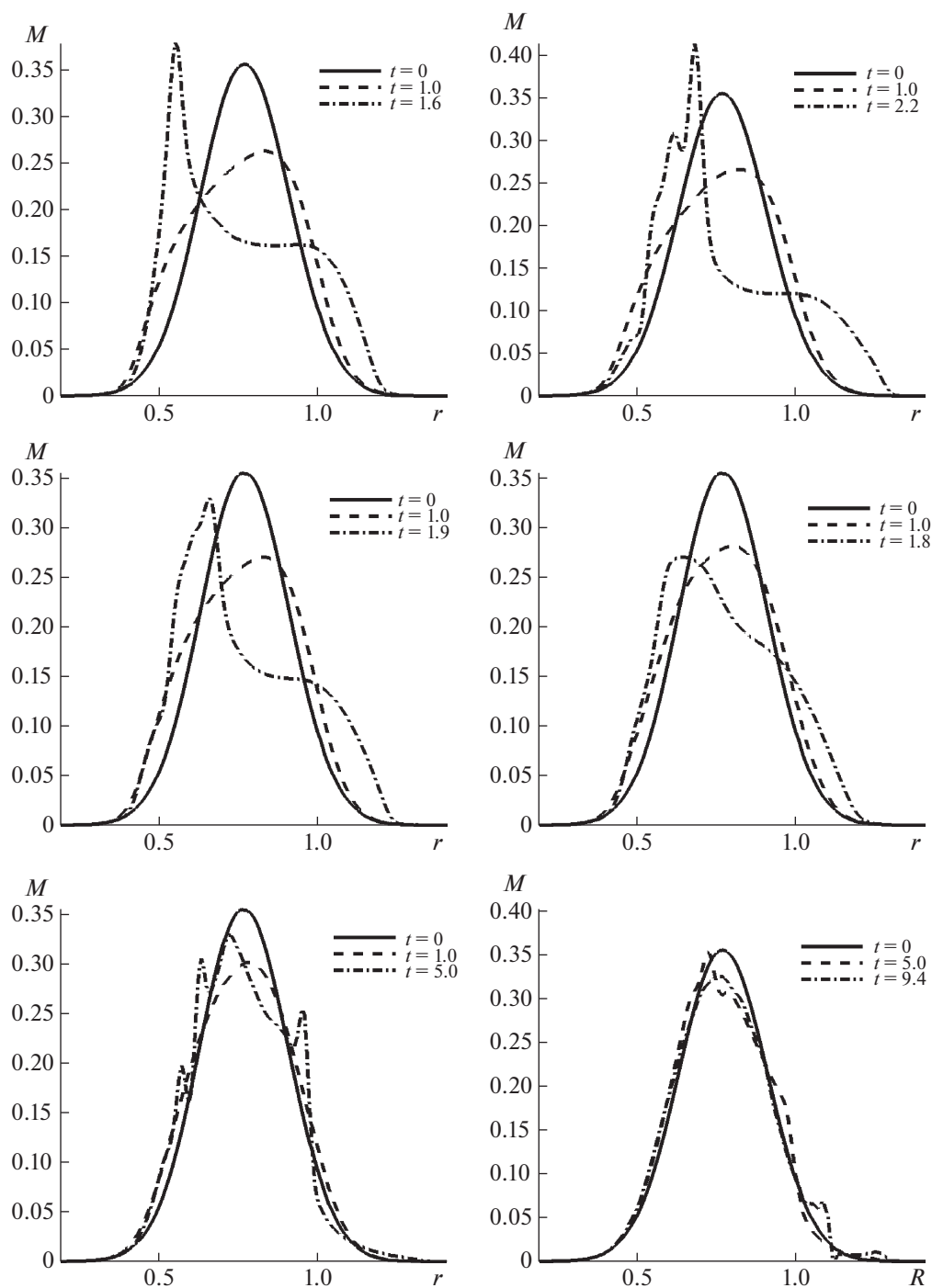


Рис. 4. Распределения углового момента при $N_0 = 1, 2, 3, 5, 7, 10$, соответственно.

картину течения, что говорит об адекватности ее выбора.

4.3. Приближение мелкой воды и изотермический случай

В [2, 4] натурные эксперименты с мелкой водой использовались для анализа вихревых течений в

аккреционных дисках. Сопоставление результатов численного моделирования одной и той же задачи, решенной как в рамках уравнений газовой динамики, так и уравнений в приближении мелкой воды, позволяет проанализировать правомерность такого подхода.

Для используемой баротропной системы уравнений значение $\gamma = 5/3$ соответствует течению

идеального газа, а вариант $\gamma = 2$ позволяет моделировать гидродинамическое течение в приближении мелкой воды, когда плотность газа ρ соответствует толщине слоя жидкости h в метрах, а давление выражается формулой гидростатики $p = gh^2/2$, то есть $k = g/2$, где $g = 9.8 \text{ м/с}^2$ — ускорение силы тяжести.

Рассчитывался вариант кольцевого канала с радиусами $r_1 = 0.2 \text{ м}$ и $r_2 = 1.4 \text{ м}$. В том числе при $N_0 = 10$ полученная картина течения оказалась близкой к представленной для случая $\gamma = 5/3$ на рис. 3. Этот и другие расчеты подтверждают возможность применения приближения мелкой воды для анализа газодинамических процессов в галактических облаках.

В случае изотермического течения ($\gamma = 1$) вид исходных уравнений упрощается, а скорость звука становится постоянной: $c_s = \sqrt{k}$. Стационарное распределение плотности (17) содержит два свободных параметра: ρ_0 и k . Изменение ρ_0 пропорционально меняет полную массу газового диска, а увеличение k делает форму распределения плотности в диске более однородной по радиусу и уменьшает полную массу газа.

Была проведена серия численных расчетов для $\gamma = 1$ при $N_0 = 10$ для значений ρ_0 в диапазоне $0.01-1$ и $k = 0.012$ и 0.12 . Ее результаты показали, что в дисках малой массы с более однородным распределением плотности по радиусу диска раздвоение рукавов проявляется наиболее сильно.

Более детальная информация о численных результатах содержится в [18].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе для изучения гидродинамических аспектов формирования спирально-вихревых структур проведено численное моделирование формирования структур в аккреционном диске на основе относительно простой модели — двумерных баротропных уравнений Эйлера с массовой силой.

Выведены новые аксиально симметричные стационарные решения уравнений в изэнтропическом и изотермическом случаях.

Эти решения использованы в качестве начальных распределений в нестационарной задаче, с внесением малых возмущений в распределение азимутальной скорости. Численно продемонстрировано развитие этих возмущений и порождаемое ими формирование крупных структур в виде отстающих спиралей — рукавов плотности, имеющих характерную аэродинамическую форму. При этом наблюдалось раздвоение рукавов плотности, а также перенос момента импульса от центральной области диска к его внутренней границе. Последнее вызвано развитием крупных вихревых структур в

потоке и происходит более интенсивно при слабо осциллирующем по углу возмущении.

Проверено также, что приближение мелкой воды дает картину течения, близкую к газодинамической. Это подтверждает возможность использования соответствующих натуральных экспериментов для моделирования газодинамических процессов в галактических облаках.

Численный алгоритм основан на использовании регуляризованных уравнений Эйлера, иначе говоря, квазигазодинамических уравнений. Он вполне универсален и позволяет численно моделировать на персональном компьютере разнообразные течения, представляющие интерес для астрофизики, при различных начальных распределениях и притягивающих силах.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны В.М. Чечеткину, А.Ю. Луговскому за привлечение их внимания к данной тематике, а также за обсуждение постановки задачи и полученных результатов. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 16-01-00048.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. N. I. Shakura and R. A. Syunyaev, *Astron. and Astrophys.* **24**, 337 (1973).
2. А. М. Незлин, Е. Н. Снежкин *Вихри и спиральные структуры. Астрофизика и физика плазмы в опытах на мелкой воде* (М.: Наука, 1990).
3. О. М. Белоцерковский, А. М. Опарин, В. М. Чечеткин *Турбулентность. Новые подходы.* (М.: Наука, 2003).
4. А. М. Фридман, *Успехи физ. наук* **177**, 121 (2007).
5. А. М. Фридман, Д. В. Бисикало, *Успехи физ. наук* **178**, 577 (2008).
6. Д. В. Бисикало, А. Г. Жилкин, А. А. Боярчук *Газодинамика тесных двойных звезд* (М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013).
7. Д. Н. Раздобурдин, В. В. Журавлев, *Успехи физ. наук* **185**, 1130 (2015).
8. А. В. Колесниченко *Некоторые проблемы конструирования космических сплошных сред. Моделирование аккреционных протопланетных дисков* (М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017).
9. В. В. Журавлев, Н. И. Шакура, *Письма в Астрон. журн.* **33**, 754 (2007).
10. М. В. Абакумов, С. И. Мухин, Ю. П. Попов, В. М. Чечеткин, *Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша* № 33. (М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1995).

11. М. В. Абакумов, С. И. Мухин, Ю. П. Попов, В. М. Чечеткин, Матем. моделирование **10**:5, 35 (1998).
12. Е. П. Велихов, А. Ю. Луговский, С. И. Мухин, Ю. П. Попов, В. М. Чечеткин, Астрон. журн. **84**, 1 (2007).
13. А. Ю. Луговский, Ю. П. Попов, Журн. выч. мат. и мат. физ. **55**, 1444 (2015).
14. Б. Н. Четверушкин *Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений* (М.: МАКС Пресс, 2004).
15. Т. Г. Елизарова *Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений* (М.: Научный мир, 2007).
16. Ю. В. Шеретов *Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении* (Москва-Ижевск: РХД, 2009).
17. T. G. Elizarova and O. V. Bulatov, Comput. Fluids **46**, 206 (2011).
18. Т. Г. Елизарова, А. А. Злотник, М. А. Истомина, Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша № 1 (М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017).
19. А. А. Злотник, Б. Н. Четверушкин, Журн. выч. мат. и мат. физ. **48**, 445 (2008).
20. А. А. Злотник, Матем. моделир. **24**:4, 65 (2012).