

УДК 519.6:533.5

КОЭФФИЦИЕНТЫ ИСКУССТВЕННОЙ ДИССИПАЦИИ В РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЯХ СВЕРХЗВУКОВОЙ АЭРОДИНАМИКИ

© 2018 г. Т.Г. Елизарова¹, И. А. Широков^{2,*}

Представлено академиком РАН Б. Н. Четверушкиным 13.06.2018 г.

Поступило 13.06.2018 г.

Предложен способ введения коэффициентов искусственной диссипации в численный алгоритм, построенный на основе квазигазодинамической системы уравнений. Описанный метод позволяет моделировать аэродинамические течения с большими числами Маха и Рейнольдса. в качестве иллюстрации приведены результаты моделирования сверхзвукового обтекания летательного аппарата Х-43. Получено распределение давления по поверхности летательного аппарата, которое позволяет вычислять его аэродинамические характеристики

DOI:

Система квазигазодинамических (КГД) уравнений построена в работах, [1–3] как регуляризованный вид системы уравнений Навье–Стокса (НС). Основанный на этой системе численный алгоритм (КГД-алгоритм), а также родственные ему кинетически-согласованные разностные схемы успешно использовались для моделирования газодинамических течений и показали свою эффективность при их реализации на современных высокопроизводительных вычислительных комплексах. КГД алгоритм позволяет единообразно моделировать широкий спектр течений газа, начиная от умеренно-разреженных течений до течений плотного газа с большими скоростями. Возможности алгоритма для моделирования разреженных, дозвуковых или сверхзвуковых течений определяются выбором коэффициентов диссипации, включённых в эти модели. в данной работе описаны имеющиеся варианты таких коэффициентов и предложен способ введения коэффициентов искусственной диссипации, позволяющий моделировать аэродинамические течения с большими числами Маха и Рейнольдса.

КГД-система может рассматриваться как система уравнений НС, усреднённая на малом пространственно-временном интервале, что

приводит к сглаживанию, или регуляризации, исходной системы уравнений. Введённое сглаживание является причиной появления в уравнениях дополнительных диссипативных слагаемых, пропорциональных малому параметру τ размерности времени. Эти слагаемые имеют вид производных второго порядка по пространственным координатам и являются нелинейными функциями параметров течения.

КГД-система уравнений в декартовых координатах в отсутствие внешних сил и источников тепла, в соответствие с [2, 3], может быть представлена в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla_i j_m^i = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u^j + \nabla_i (j_m^i u^j) + \nabla^j p = \nabla_i \Pi^{ij}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E + \nabla_i (j_m^i H) + \nabla_i q^i = \nabla_i (\Pi^{ij} u_j). \quad (3)$$

Здесь использованы традиционные обозначения: ρ – плотность газа, u^i – компоненты его макроскопической скорости, p – давление. Полная энергия единицы объёма E и полная удельная энтальпия H идеального политропного газа с показателем адиабаты γ вычисляются по формулам

$$E = \frac{\rho u^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1}, \quad H = (E + p) / \rho.$$

Вектор плотности потока массы j_m^i определяется в виде

$$j_m^i = \rho(u^i - w^i), \quad w^i = \frac{\tau}{\rho} (\nabla_j \rho u^j u^i + \nabla^i p).$$

¹Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской Академии наук, Москва

²Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК

*E-mail: ivanshirokov@inbox.ru

Выражения для тензора вязких напряжений Π^{ij} и теплового потока q^i записываются как

$$\Pi^{ij} = \Pi_{NS}^{ij} + \tau u_i \rho (u_k \nabla^k u_j + \frac{1}{\rho} \nabla_j p) + \tau \delta^{ij} (u_k \nabla^k p + \gamma p \nabla^k u_k) \quad (4)$$

$$\Pi_{NS}^{ij} = \mu (\nabla^i u^j + \nabla^j u^i - \frac{2}{3} \nabla^k u_k) + \zeta \delta^{ij} \nabla^k u_k \quad (5)$$

$$q^i = q_{NS}^i - \tau u_i \rho (u_j \nabla^j \varepsilon + p u_j \nabla^j \frac{1}{\rho}), \quad (6)$$

$$q_{NS}^i = -\kappa \nabla^i T.$$

Здесь $\varepsilon = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}$ – внутренняя энергия единицы массы газа, Π_{NS}^{ij} и q_{NS}^i – тензор вязких напряжений и тепловой поток в системе НС; μ , ζ и κ – коэффициенты сдвиговой и объёмной вязкости и теплопроводности, соответственно, T – температура газа.

Коэффициент сдвиговой вязкости μ можно определить через температурную зависимость:

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^\omega \quad (7)$$

где μ_0 – вязкость газа при температуре T_0 , $0 < \omega < 1$ – показатель межмолекулярного взаимодействия [4].

Коэффициент объёмной вязкости может быть вычислен с использованием аппроксимационной формулы, известной из кинетической теории [2, 5]:

$$\zeta = \mu \left(\frac{5}{3} - \gamma \right), \quad (8)$$

коэффициент теплопроводности вычисляется как

$$\kappa = \frac{\mu}{\text{Pr}(\gamma - 1)}. \quad (9)$$

Коэффициент τ , определяющий дополнительную диссипацию в КГД-алгоритме, для вязкого политропного газа имеет порядок характерного времени между столкновениями частиц газа. Его величина связывается с коэффициентом сдвиговой вязкости и может быть вычислена в виде [2, 3]

$$\tau = \frac{\mu}{\rho \text{Sc}}, \quad (10)$$

где Sc – число Шмидта, которое для газов близко к единице [4].

Такое определение диссипативных коэффициентов соответствует выводу КГД-уравнений из кинетической теории [1] и оказывается адекватным для численного моделирования течений разреженных газов с помощью КГД-алгорит-

ма. Этот алгоритм основан на методе конечных объёмов [6] совместно с аппроксимацией разностных уравнений методом Эйлера и использованием центральных разностей второго порядка точности для вычисления всех потоковых величин, включая конвективные слагаемые, на гранях контрольного объема [2, 3]. Условная устойчивость численного алгоритма обеспечивается регуляризирующими τ -слагаемыми.

Однако для обеспечения устойчивости КГД-алгоритма при моделировании течений достаточно плотных газов с околосзвуковыми скоростями описанной выше диссипации оказывается недостаточно. Для увеличения устойчивости численного алгоритма в этом случае возможно модифицировать вид диссипативного коэффициента τ (10) путём включения в него слагаемого, зависящего от шага пространственной сетки и параметров течения в виде

$$\tau = \frac{\mu}{\rho \text{Sc}} + \alpha h / c, \quad (11)$$

где h – характерный размер пространственной ячейки, c – локальная скорость звука, α – настроечный параметр, который в большинстве случаев полагается постоянным числом порядка 1 [1–3, 7].

В пограничном слое слагаемые с параметром τ близки к нулю, так как КГД-уравнения в приближении пограничного слоя вырождаются в уравнения Прандтля [3]. Таким образом, указанное выше введение искусственной диссипации в КГД-алгоритм не нарушает точность моделирования пристеночного течения и вязких потоков на стенку, позволяя при этом сглаживать большие градиенты решения во внутренних областях потока.

Однако при больших сверхзвуковых скоростях течений введённой τ -вязкости вновь оказывается недостаточно. Как показывает практика численных расчётов, в этих случаях для стабилизации численного алгоритма удобно использовать наличие объёмной вязкости, вводя искусственную добавку в коэффициент (8) в виде

$$\zeta = \mu \left(\frac{5}{3} - \gamma \right) + \delta \frac{h}{c} p, \quad (12)$$

Величина регуляризирующей добавки здесь также определяется локальными параметрами и зависит от настроечного коэффициента δ .

Отметим, что в тензоре вязких напряжений (5) слагаемые с коэффициентом второй вязкости ζ расположены на главной диагонали и добавление к ζ положительного слагаемого (12) приводит к повышению устойчивости разностной схемы. с другой стороны, взаимодействие потока с твёрдой стенкой определяется недиа-

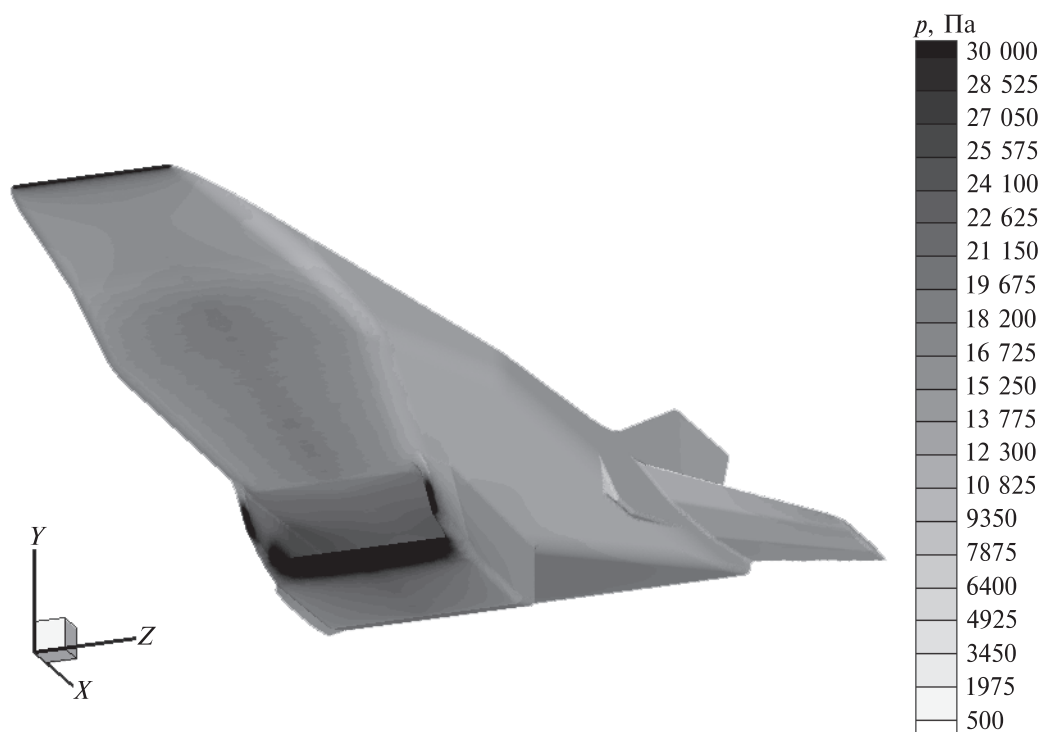


Рис. 1. Общий вид ЛА и линии уровня давления на его поверхности.

гональными элементами тензора вязких напряжений, и разностные аналоги диагональных элементов тензора вблизи стенки оказываются относительно малыми.

Таким образом, описанное выше включение в алгоритм искусственной диссипации позволяет сглаживать численное решение вблизи ударных волн и в то же время сохраняет структуру сдвиговой вязкости вблизи твёрдых поверхностей, ограничивающих течение, что оказывается важным для моделирования пристеночных эффектов.

В качестве иллюстрации применения описанной процедуры приведём результаты численного моделирования сверхзвукового обтекания летательного аппарата (ЛА) X43 [8]. КГД-алгоритм построен на основе системы (1)–(9) с диссипативными коэффициентами (7) и (9) и искусственными добавками (11) и (12). Здесь впервые использован метод введения искусственной диссипации вида (12) для существенно сверхзвуковых течений.

Для численного моделирования применялся доработанный программный комплекс [9], позволяющий проводить расчёты нестационарных вязких газодинамических течений для тел произвольной формы с использованием тетраэдральных неструктурированных пространственных сеток. Расчёты проводились

на многопроцессорном комплексе К–100 [10], расположенном в Институте прикладной математики РАН. Для экономии машинного времени использовался метод распараллеливания вычислений, основанный на декомпозиции расчётной области и использовании стандарта межпроцессорных сообщений MPI. Программный комплекс обладает хорошей масштабируемостью и достаточно высокой эффективностью распараллеливания. в представленных расчётах использовано 128 процессорных ядер.

В качестве параметров потока были взяты значения, соответствующие реальным режимам полётов ЛА X43 [8]: число Маха $M = 7$, высота полёта $H = 29$ км, число Рейнольдса (отнесённое к 1 м) $Re = 3,1 \cdot 10^6$ 1/м. Летательный аппарат расположен под углом атаки 2° . Га-

зовая постоянная $R = 287$ Дж/(кг·К), показатель адиабаты $\gamma = \frac{7}{5}$, число Прандтля $Pr = \frac{14}{19}$,

показатель межмолекулярного взаимодействия $\omega = 0,74$. Численные коэффициенты настройки алгоритма α и δ в выражениях (11) и (12) выбирались из условий точности и устойчивости алгоритма и составляли 1 и 15 соответственно.

Общий вид ЛА X43 приведён на рис. 1 совместно с линиями уровня давления на его по-

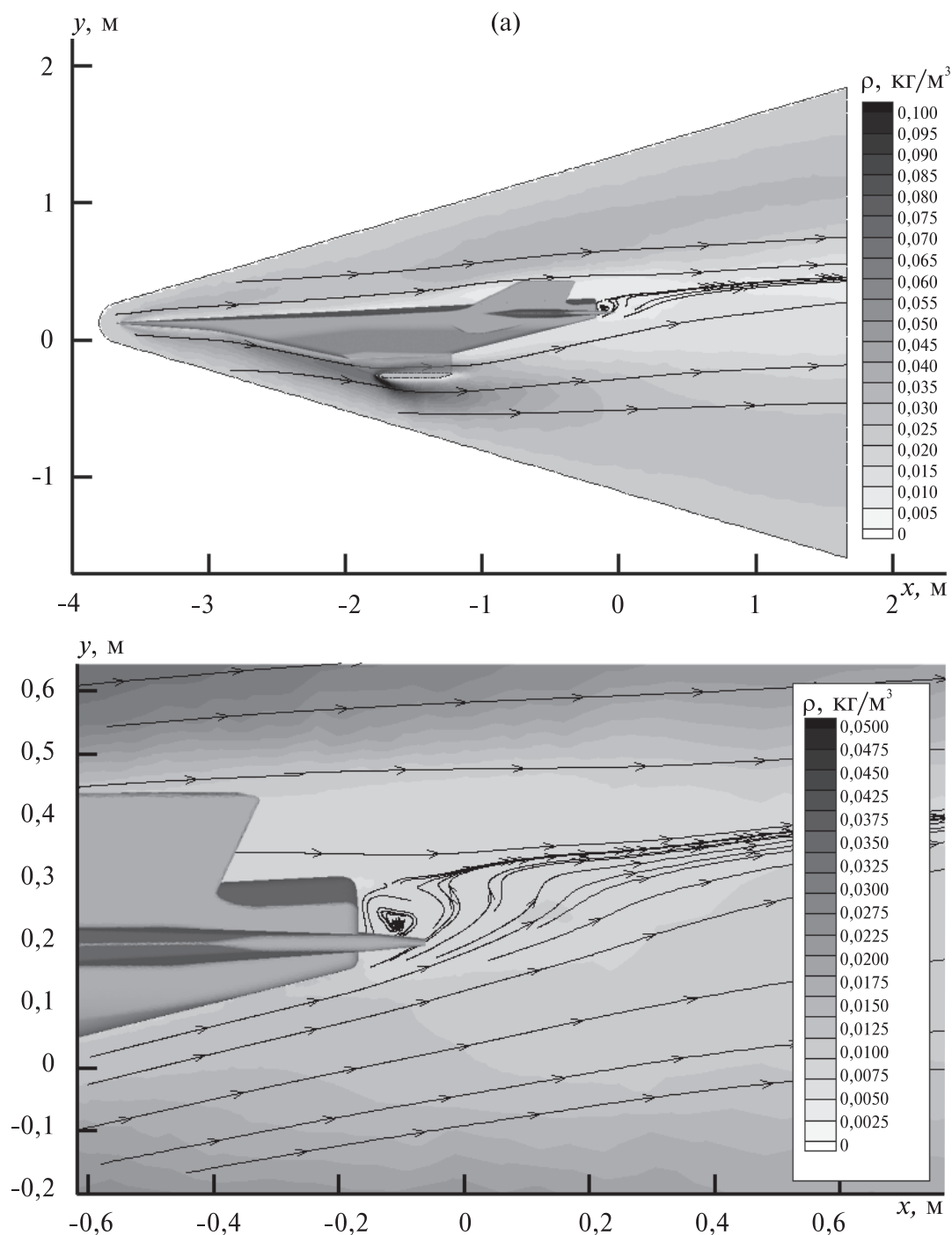


Рис. 2. Линии уровня плотности и линии тока в расчетной области, окружающей ЛА Х43.

верхности. Заметны максимумы давления на носовой кромке фюзеляжа и на входе в воздухозаборник. Распределение давления позволяет вычислять аэродинамические характеристики ЛА, такие как коэффициенты сопротивления и подъемной силы.

На рис. 2 представлены линии уровня плотности и линии тока в плоскости симметрии

фюзеляжа ЛА Х43. Рис. 2а показывает общий вид ЛА. На нижней поверхности носовой части ЛА происходит образование ударной волны, взаимодействие ударной волны с воздухозаборником и формирование сверхзвукового течения внутри него. За кормовой частью ЛА образуется нестационарная вихревая зона течения. Эта зона показана в увеличенном виде на рис 2б.

Возможности КГД-алгоритма для моделирования нестационарных вихревых течений, в том числе процессов ламинарно-турбулентного перехода, были показаны в [7, 11, 12] на примерах задачи о распаде вихря Тейлора-Грина в свободном пространстве и о пристеночном турбулентном течении в задаче Куэтта. Для расширения возможностей его практического использования КГД-алгоритм был включён в качестве дополнительного вычислительного ядра в открытый программный комплекс OpenFOAM [13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chetverushkin B.N.* Kinetic Schemes and Quasi-Gas Dynamic System of Equations. Barcelona: CIMNE, 2008.
2. *Elizarova T.G.* Quasi-Gas Dynamic Equations. Dordrecht: Springer, 2009. ISBN 978-3-642-0029-5.
3. *Шеретов Ю.В.* Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Твер. гос. ун-т. 2016.
4. *Bird G.A.* Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows. Oxford: Clarendon Press. 1998.
5. *Present R.D.* Kinetic Theory of Gases. N.Y; Toronto; L.: McGraw-Hill Book Company. 1958.
6. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука. 1977.
7. *Елизарова Т. Г., Широков И. А.* Регуляризованные уравнения и примеры их использования при моделировании газодинамических течений. М.: МАКС Пресс, 2017. <https://elibrary.ru/item.asp?id=29352202>
8. *Железнякова А. Л., Суржиков С. Т.* На пути к созданию модели виртуального ГЛА. М.: ИПМех РАН, 2013.
9. *Поляков С. В., Кудряшова Т. А., Свердлин А. А.* // Матем. моделирование. 2008. Т. 20. № 7. С. 13–22.
10. K-100 System. М.: Keldysh Inst. Appl. Math. RAS, Available at <http://www.kiam.ru/MVS/resources/k100.htm>
11. *Shirokov I.A., Elizarova T.G.* // J. Turbulence. 2014. V. 15. № 10. P. 707–730. <http://dx.doi.org/10.1080/14685248.2014.927581>
12. *Shirokov I.A., Elizarova T.G.* // Computational Mathematics and Modeling. 2016. V. 28. № 1. P. 37–60.
13. *Kraposhin M.V., Smirnova E.V., Elizarova T.G., Istomina M.A.* // Comput. and Fluids. 2018. V. 166. P. 163–75.