



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 27 за 2019 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Елизарова Т.Г., Иванов А.В.

Метод регуляризации для
численного моделирования
переноса примеси в мелкой
воде

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Елизарова Т.Г., Иванов А.В. Метод регуляризации для численного моделирования переноса примеси в мелкой воде // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 27. 28 с. doi:[10.20948/prepr-2019-27](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-27)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-27>

**ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. КЕЛДЫША
Российской академии наук**

Т.Г. Елизарова, А.В. Иванов

**Метод регуляризации для численного
моделирования переноса примеси в мелкой воде**

Москва — 2019

Елизарова Т.Г., Иванов А.В.

Метод регуляризации для численного моделирования переноса примеси в мелкой воде

Описан новый метод решения уравнения переноса пассивного скаляра в рамках уравнений гидродинамики в приближении мелкой воды. Метод близок по своей структуре к построенным ранее квазигазодинамическими алгоритмам для численного моделирования течений сжимаемого газа. Приведены регуляризованные уравнения и построенные на их основе разностные схемы, в том числе и для течений с источником примеси. Рассмотрены типичные одномерные и двумерные тестовые задачи. В заключении дано обобщение построенного подхода для численного моделирования переноса пассивного скаляра в рамках приближения вязкой несжимаемой жидкости.

Ключевые слова: уравнения мелкой воды, перенос примеси, регуляризованные уравнения, метод конечного объема, источник.

Tatiana Gennadyevna Elizarova, Aleksandr Vladimirovich Ivanov

Regularization method for numerical modelling of transport of pollutant in shallow water

A new method for solving the passive scalar transport equation in the framework of hydrodynamic equations in the shallow water approximation is described. The method is similar in structure to the previously constructed quasi-gas-dynamic algorithm for the numerical simulation of compressible gas flows. Regularized equations and difference schemes based on them, including those for flows with an impurity source, are presented. Typical one-dimensional and two-dimensional test problems are considered. In conclusion, a generalization of the constructed approach for the numerical simulation of the passive scalar transport in the framework of the viscous incompressible fluid approximation is given.

Key words: shallow water equations, transport of pollutant, regularized equations, finite-volume method, source term.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 19-01-00262.

Введение

Задачи численного моделирования распространения примеси имеют большое прикладное значение, в частности, в связи с проблемами загрязнения окружающей среды. Одним из подходов для исследования данной проблемы является использование приближения мелкой воды (МВ). Разработка эффективного и точного численного алгоритма для этой модели представляет собой сложную задачу. Дело в том, что при численном моделировании переноса примеси или другого пассивного скаляра – например, солености или температуры, численное решение уравнения переноса становится плохо устойчивым. Это особенно сильно проявляется при малых коэффициентах диффузии скаляра. Одним из часто используемых способов решения этой проблемы является применение специализированного отдельного алгоритма для решения уравнения переноса. Последнее делает численное решение системы уравнений гидродинамики и уравнения переноса неоднородным.

Авторам удалось построить однородный алгоритм для моделирования уравнений гидродинамики совместно с уравнением переноса пассивного скаляра путем рассмотрения этой системы уравнений как целого и построения регуляризатора для системы гидродинамики и уравнения переноса в целом. Пример такой регуляризации и первые тестовые расчеты приведены в данной работе.

Построению численных методов для решения задачи моделирования распространения примеси в мелкой воде посвящено много работ: [1]–[11]. Чаще всего используются методы типа Римана или Годунова, построенные в рамках метода конечного объема, кинетические или релаксационные схемы.

Для тестирования численных алгоритмов рассматриваются специфические задачи, примеры которых приведены в разделах 2 и 3. Для одномерных течений рассматривались: задача о распространении примеси течением над неровным дном [1]; классическая задача о распаде разрыва [1, 3, 4]; задача Римана с разбегающейся жидкостью [3]. В последней точным решением для концентрации является стационарное распределение (что достаточно сложно достигается в некоторых численных алгоритмах), а также образуется "сухая зона".

В качестве двумерных тестов использовались примеры, приведенные в [2]. Это задача прорыва симметричной плотины на плоском дне (рассматривались в [2, 4]) и задача о разрушении дамбы над неровным дном при наличии источника, взятая из [2].

В последнем тесте раздела 3 рассматривается случай решения системы уравнений переноса в мелкой воде при наличии источника. Задачи с источником очень важны, поскольку применяются для моделирования, например, аварий тан-

керов в прибрежной зоне и распространения загрязнений вдоль берега и прилегающей акватории.

Стоит отметить, что сложности, связанные с решением уравнения переноса пассивного скаляра, проявляются как в модели мелкой воды, так и при рассмотрении задач в приближении вязкой несжимаемой жидкости. Авторы продемонстрировали одно из возможных решений данной проблемы на примере уравнений гидродинамики в приближении МВ. В заключение показан способ применения регуляризации для переноса пассивного скаляра для гидродинамических уравнений, описывающих течение вязкой несжимаемой жидкости.

1. Математическая модель и варианты регуляризованных уравнений

Задача о распространении примеси в рамках МВ может быть описана следующей системой уравнений. Непосредственно уравнения МВ:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(h\mathbf{u}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(h\mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla \frac{gh^2}{2} = -gh\nabla b, \quad (2)$$

а также уравнение переноса, которое можно записать в двух вариантах:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}C) = \operatorname{div}(D\nabla C), \quad (3)$$

$$\frac{\partial Ch}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}Ch) = \operatorname{div}(Dh\nabla C). \quad (4)$$

Используемые обозначения поясняет рис. 1. Здесь $h(\mathbf{x}, t)$ – толщина слоя воды, отсчитываемая от дна, $b(\mathbf{x})$ – уровень дна, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – вектор распределения горизонтальных скоростей, g – ускорение силы тяжести, направленное вниз вдоль оси z , $C(\mathbf{x}, t)$ – функция концентрации примеси, D – коэффициент диффузии, $\xi(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t) + b(\mathbf{x})$ – уровень поверхности воды.

Уравнение (3) – это классическое уравнение переноса. Здесь мы предполагаем, что загрязнитель пассивен и не взаимодействует с потоком. Но в некоторых случаях необходимо учитывать другие явления, например такие как осаждение и эрозия, которые в приведенных уравнениях не рассматриваются.

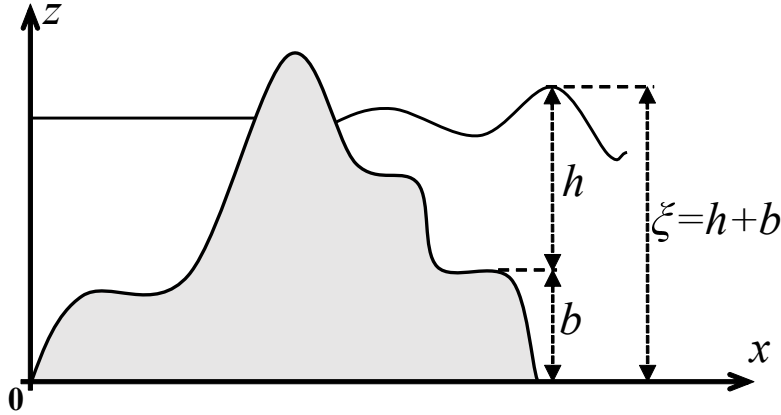


Рис. 1: Схематическое изображение используемых обозначений.

Уравнение переноса пассивного скаляра в виде (4) часто используется в задачах гидрологии и позволяет учитывать величину так называемого «живого сечения», то есть площадь сечения потока, перпендикулярного к направлению скорости. C – концентрация примеси, которая может задаваться как в размерном, так и в безразмерном виде. D – коэффициент диффузии примеси.

Поскольку в практических расчетах чаще всего используется уравнение вида (4), далее мы будем строить регуляризатор именно для него.

Как правило, коэффициент диффузии D очень мал, поэтому простые схемы для уравнения переноса оказываются неадекватными, что усложняет численное моделирование и поднимает вопрос о разработке методов для решения этой проблемы.

Для решения задачи было предложено использовать два регуляризатора, построенных по общей схеме. Рассматривается система регуляризованных уравнений мелкой воды (далее РУМВ), описанная в [12]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_m = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial (h\mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div} (\mathbf{j}_m \otimes \mathbf{u}) + \nabla \frac{gh^2}{2} = -gh^* \nabla b + \operatorname{div} \Pi, \quad (6)$$

$$h^* = h - \tau \operatorname{div} (h\mathbf{u}), \quad (7)$$

$$\mathbf{j}_m = h (\mathbf{u} - \mathbf{w}), \quad (8)$$

$$\mathbf{w} = \frac{\tau}{h} [\operatorname{div} (h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + gh \nabla (b + h)], \quad (9)$$

$$\Pi = \tau \mathbf{u} \otimes [h (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + gh \nabla (b + h)] + \tau I [gh \operatorname{div} (h\mathbf{u})]. \quad (10)$$

К ней добавляется регуляризация уравнения переноса. Ее можно провести двумя способами:

- используя регуляризацию только по u и h ;
- используя регуляризацию по C , u и h .

Будем строить регуляризатор для модели МВ с присоединенным к ней уравнением для переноса примеси вида (4) и использовать регуляризацию для C , u и h .

Построение регуляризатора выглядит следующим образом. По аналогии с алгоритмом регуляризации уравнений газовой динамики и уравнений мелкой воды (МВ) будем полагать, что в течение некоторого малого интервала времени (времени сглаживания $\sim \tau$) концентрация изменяется, принимая новое значение C^* . Для ее определения разложим соответствующую функцию в ряд Тейлора до первого члена по τ :

$$C^* = C + \tau \frac{\partial C}{\partial t},$$

выразим $\frac{\partial C}{\partial t}$ из уравнения (4), раскрыв производную по времени и подставив $\frac{\partial h}{\partial t}$ из (1), получим:

$$C^* = C - \tau (\mathbf{u} \cdot \nabla C),$$

здесь учтено, что слагаемое с τD пренебрежимо мало по сравнению с $O(\tau)$.

Напомним, что также имеет место и выражение для скорости и толщины слоя:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u} + \tau \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad h^* = h + \tau \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Как видно из (5):

$$h^* \mathbf{u}^* = h (\mathbf{u} - \mathbf{w}).$$

Тогда получим конечный вид регуляризованного уравнения переноса:

$$\frac{\partial Ch}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{j}_m C) = \operatorname{div}(Dh \nabla C + \tau \mathbf{u} h (\mathbf{u} \cdot \nabla C)). \quad (11)$$

Для первого случая, без регуляризации C , получим уравнение:

$$\frac{\partial Ch}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{j}_m C) = \operatorname{div}(Dh \nabla C). \quad (12)$$

Для расчетов далее мы будем использовать более сложный регуляризатор (11), в котором помимо добавки к \mathbf{u} и h регуляризируется и концентрация C .

2. Одномерные течения

Регуляризованное уравнение для концентрации примеси в одномерном случае

Система РУМВ, записанная для плоского одномерного течения, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial j_m}{\partial x} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial j_mu}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh^2}{2} \right) + gh \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial Ch}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (j_m C) = \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial C}{\partial x} (D + \tau u^2) \right), \quad (15)$$

где:

$$j_m = h(u - w), \quad (16)$$

$$w = \frac{\tau}{h} \left[\frac{\partial (hu^2)}{\partial x} + gh \frac{\partial}{\partial x} (h + b) \right], \quad (17)$$

$$\Pi = \tau hu \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial x} (h + b) \right] + \tau gh \frac{\partial (hu)}{\partial x}. \quad (18)$$

Для численного решения регуляризованных уравнений МВ (13)–(18), подобно методам, разработанным для квазигазодинамических уравнений [12], используем явную по времени разностную схему с аппроксимацией всех пространственных производных центральными разностями. Значения искоемых переменных $h(x, t)$ и $u(x, t)$ зададим в узлах пространственной сетки i . Значения переменных в полужелых пространственных точках $i + 1/2$ находятся как среднее арифметическое значений в соседних точках:

$$b_{i+1/2} = \frac{b_i + b_{i+1}}{2}, \quad \tau_{i+1/2} = \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2},$$

$$h_{i+1/2} = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}, \quad u_{i+1/2} = \frac{u_i + u_{i+1}}{2}, \quad C_{i+1/2} = \frac{C_i + C_{i+1}}{2}.$$

$$w_{i+1/2} = \frac{\tau_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} \left(\frac{h_{i+1} u_{i+1}^2 - h_i u_i^2}{\Delta x} + gh_{i+1/2} \frac{h_{i+1} + b_{i+1} - h_i - b_i}{\Delta x} \right); \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{i+1/2} = \tau_{i+1/2} u_{i+1/2} h_{i+1/2} & \left(u_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + g \frac{h_{i+1} + b_{i+1} - h_i - b_i}{\Delta x} \right) + \\ & + \tau_{i+1/2} g h_{i+1/2} \frac{h_{i+1} u_{i+1} - h_i u_i}{\Delta x}; \end{aligned} \quad (20)$$

$$j_{m,i+1/2} = h_{i+1/2} (u_{i+1/2} - w_{i+1/2}), \quad (21)$$

$$\frac{h_i^{k+1} - h_i^k}{\Delta t} + \frac{j_{m,i+1/2} - j_{m,i-1/2}}{\Delta x} = 0; \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{h_i^{k+1} u_i^{k+1} - h_i^k u_i^k}{\Delta t} + \frac{u_{i+1/2} j_{m,i+1/2} - u_{i-1/2} j_{m,i-1/2}}{\Delta x} + \frac{g}{2} \frac{h_{i+1/2}^2 - h_{i-1/2}^2}{\Delta x} = \\ = -g(h^*)_i \frac{b_{i+1/2} - b_{i-1/2}}{\Delta x} + \frac{\Pi_{i+1/2} - \Pi_{i-1/2}}{\Delta x}; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{C_i^{k+1} h_i^{k+1} - C_i^k h_i^k}{\Delta t} + \frac{j_{m,i+1/2} C_{i+1/2} - j_{m,i-1/2} C_{i-1/2}}{\Delta x} = \\ = \frac{1}{\Delta x} \left(h_{i+1/2} \frac{C_{i+1} - C_i}{\Delta x} \left(D + \tau_{i+1/2} u_{i+1/2}^2 \right) - h_{i-1/2} \frac{C_i - C_{i-1}}{\Delta x} \left(D + \tau_{i-1/2} u_{i-1/2}^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь подразумевается, что:

$$h_i^* = h_i - \tau_i \frac{h_{i+1/2} u_{i+1/2} - h_{i-1/2} u_{i-1/2}}{\Delta x}. \quad (25)$$

Устойчивость численного алгоритма обеспечивается слагаемыми с коэффициентом регуляризации τ . Определим коэффициент регуляризации τ следующим образом:

$$\tau = \alpha \frac{l}{c}, \quad (26)$$

где l – характерный размер пространственной ячейки, который используется в численном алгоритме, например, в виде $l = \sqrt{s}$, где s – площадь ячейки, $c = \sqrt{gh}$ – скорость распространения длинной волны, α – численный коэффициент, выбираемый из условий точности и устойчивости счета. Как правило, $0 < \alpha < 1$, и в качестве базового значения можно выбирать $\alpha = 0.5$.

Условие устойчивости имеет вид условия Куранта, где шаг по времени выбирается по формуле:

$$\Delta t = \beta \left(\frac{\Delta x}{c} \right)_{min}. \quad (27)$$

Все тестовые расчеты рассматривают задачи, в которых $D = 0$.

Также (за исключением задач, в которых это оговорено) во всех тестах используются граничные условия сноса для высоты, скорости и концентрации:

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{left} = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{right} = 0; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{left} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{right} = 0; \quad \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{left} = \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{right} = 0.$$

Значение коэффициента β во всех нижеперечисленных тестах: $\beta = 0.1$ (либо это оговорено).

В данном разделе показано, что введение дополнительной регуляризации по C является существенным. Без нее тест 2.1 не считается вовсе – результаты не приведены, в тесте 2.2 появляются большие осцилляции решения для C – что продемонстрировано на рис. 6.

Тест 2.1 – адвекция загрязнения над неровным дном

Постановка задачи

Пример взят из [1]. Начальные условия изображены на рис. 2, область: $x \in [0, 1]$. Рассматривается начальный уровень поверхности воды: $\xi(x, 0) \equiv 1$. Значение потока в начальный момент времени $Q(x, 0) = h(x, 0)u(x, 0) = 0.1$, а также полагается значение константы $g = 1$. Начальное распределение концентрации ограничивается областью $[0.4, 0.5]$, где $C(x, 0) = 1$. Функция дна:

$$b(x) = \begin{cases} 0.25(\cos(10\pi(x - 0.5)) + 1), & 0.4 \leq x \leq 0.6, \\ 0, & x \notin [0.4, 0.6]. \end{cases}$$

Предложенный авторами регуляризатор работает только в областях, где есть градиенты скорости и концентрации примеси. Замечено, что если в начальный момент возникает осцилляция численного решения за счет неаккуратного задания начальных условий для концентрации, то далее в областях решения с постоянной концентрацией или скоростью эти осцилляции не разглаживаются и переносятся течением без изменений. Поэтому для адекватного моделирования

теста требуется аккуратное задание начального возмущения. В данном случае для этого используется сглаживание, т.е. когда начальные значения для концентрации на границе разрыва задаются в трех точках: левая и правая граница разрыва и точка между ними как полусумма граничных значений, $\frac{C_l + C_r}{2} = 0.5$.

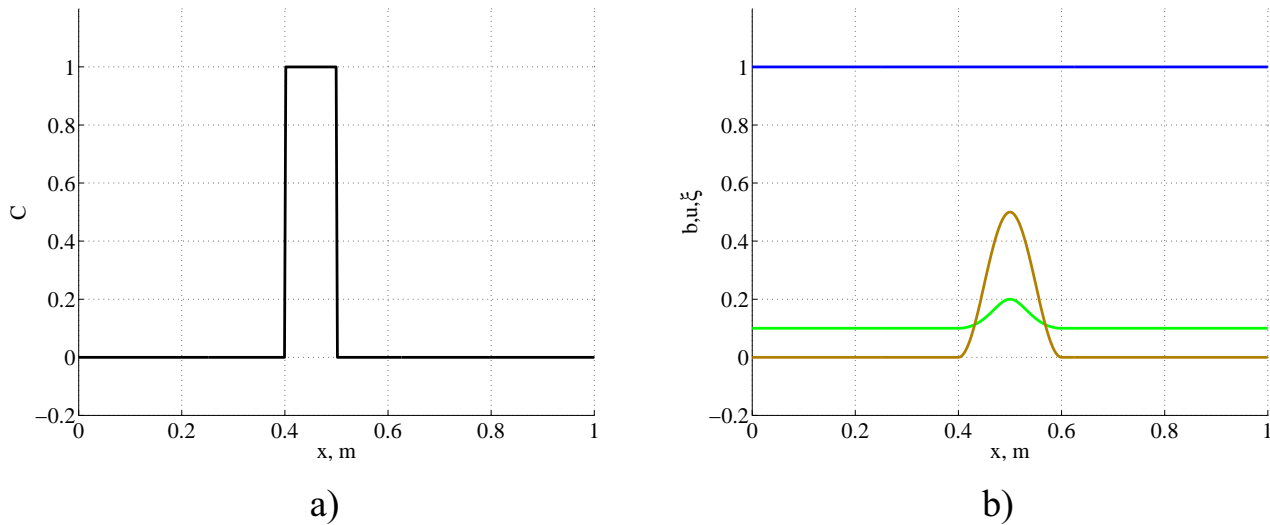


Рис. 2: Начальные условия. а) Распределение концентрации; б) график распределения уровня поверхности воды, скорости и неровности дна.

Результаты моделирования

Как пишут в [1], модельным решением данной задачи является перемещение начального возмущения концентрации примеси вправо по времени с сохранением его высоты $C = 1$.

Ниже на рис. 3а приведены результаты для $t = 0, 2$ и 4 . $\Delta x = 3.125 \times 10^{-4}$, $\alpha = 0.5$ в случае сложного регуляризатора. Расчеты с использованием регуляризации только по u и h быстро расходятся.

В [1] приводится сравнение метода конечного объема (FV – Finite-Volume) и метода частиц конечного объема (FVP – Finite-Volume-Particle). При сравнении расчета, полученного с применением модели РУМВ, и результатов [1], видно, что РУМВ значительно превосходит FV и не уступает FVP модели.

Также на рис. 3б приведены результаты для различных значений Δx при $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.1$. Можно увидеть, что наблюдается сходимость решения при сгущении сетки.

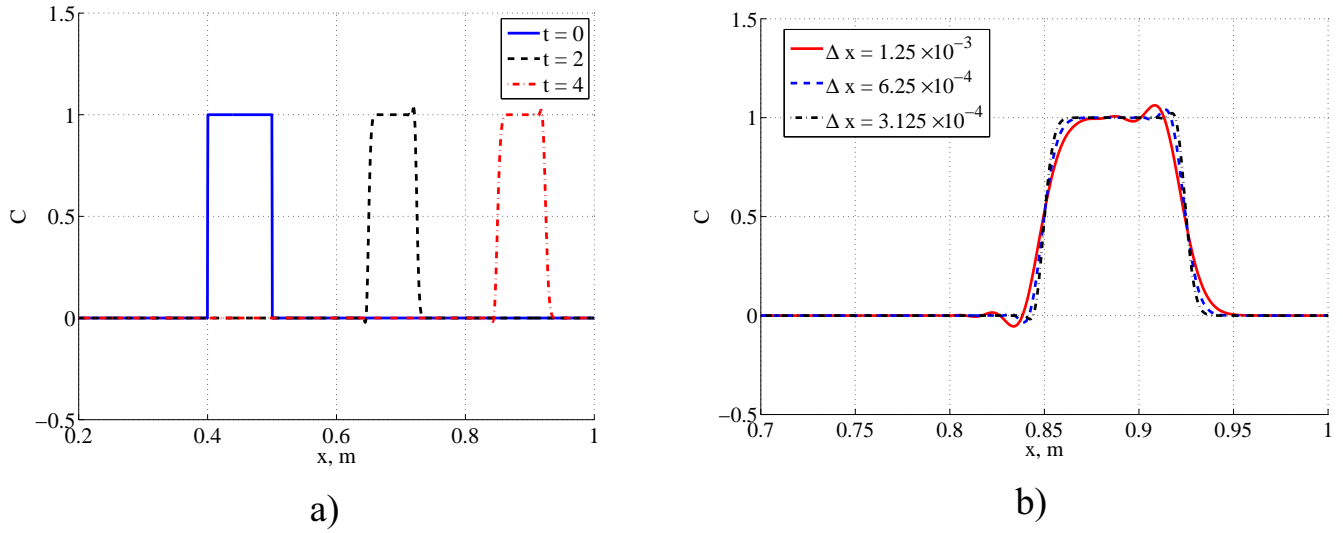


Рис. 3: Распределение концентрации в случае регуляризации по h , u и C , $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.1$. а) Для различных моментов времени, $\Delta x = 3.125 \times 10^{-4}$, $\alpha = 0.5$; б) для различных значений Δx , $t = 4$

Тест 2.2 – прорыв плотины на плоском дне

Постановка задачи

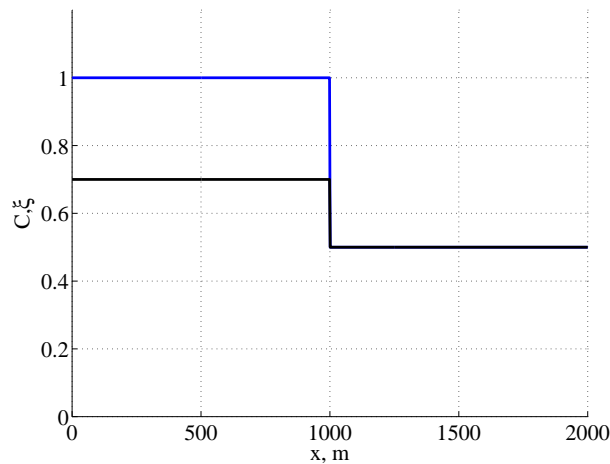


Рис. 4: Распределение концентрации C и уровня поверхности воды ξ в начальный момент времени.

Тест взят из [3]. В данной задаче концентрация примеси, как и уровень жидкости, имеет разрыв в точке обрушения дамбы, см. рис. 4, область: $x \in [0, 2000]$.

Начальные значения задаются следующим образом: $(h, u, C) = (1.0, 0, 0.7)$, $x \in [0, 1000]$; $(h, u, C) = (0.5, 0, 0.5)$, $x \in [1000, 2000]$. Аналогично предыдущему случаю, значения для концентрации и высоты на границе разрыва задаются в трех точках: левая и правая граница разрыва и точка между ними как полусумма граничных значений.

Результаты моделирования

Численное решение данной задачи для ξ состоит из трех плоских зон – двух исходных неактивных зон по краям и промежуточной зоны, которые разделены двумя простыми волнами: волной разрежения, идущей влево, и ударной волной, идущей вправо. А скачок концентрации просто переносится со скоростью промежуточной плоской зоны.

Зависимость численного решения от коэффициента регуляризации α представлена на рис. 5а, $\Delta x = 5$. При приближении к $\alpha = 0.1$, наблюдается появление осцилляций и последующее нарушение устойчивости численного решения. Далее $\alpha = 0.3$.

На рис. 5b демонстрируется сходимость решения при сгущении разностной сетки.

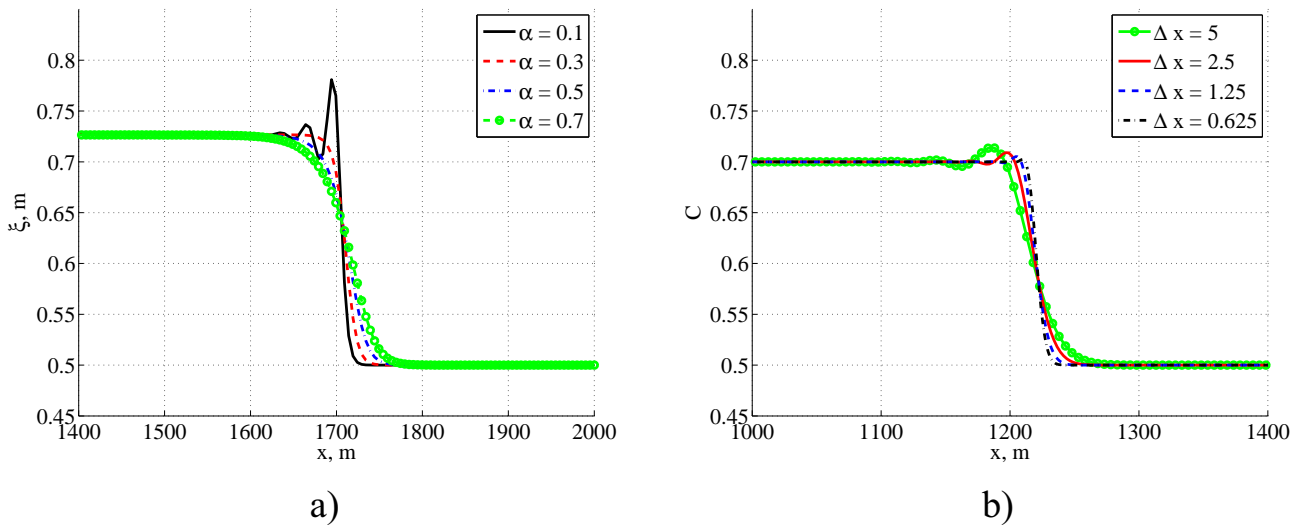


Рис. 5: Распределение для $t = 240$, $\beta = 0.1$ регуляризации по h , u и C а) профиль уровня поверхности жидкости для различных значений коэффициента α , $\Delta x = 5$; б) концентрации для различных сгущений разностной сетки, $\alpha = 0.3$.

Как видно из рис. 6, более сложный регуляризатор гораздо лучше сглаживает осцилляции. Однако наблюдается проявление осцилляций в самом начале

распространения (видимо потому что имеет место резкий градиент концентрации).

В [3] представлены результаты с использованием двухстадийной по времени кинетической схемы, имеющей второй порядок точности, $\Delta x = 20$. Они согласуются с расчетами, полученными с применением регуляризованных уравнений.

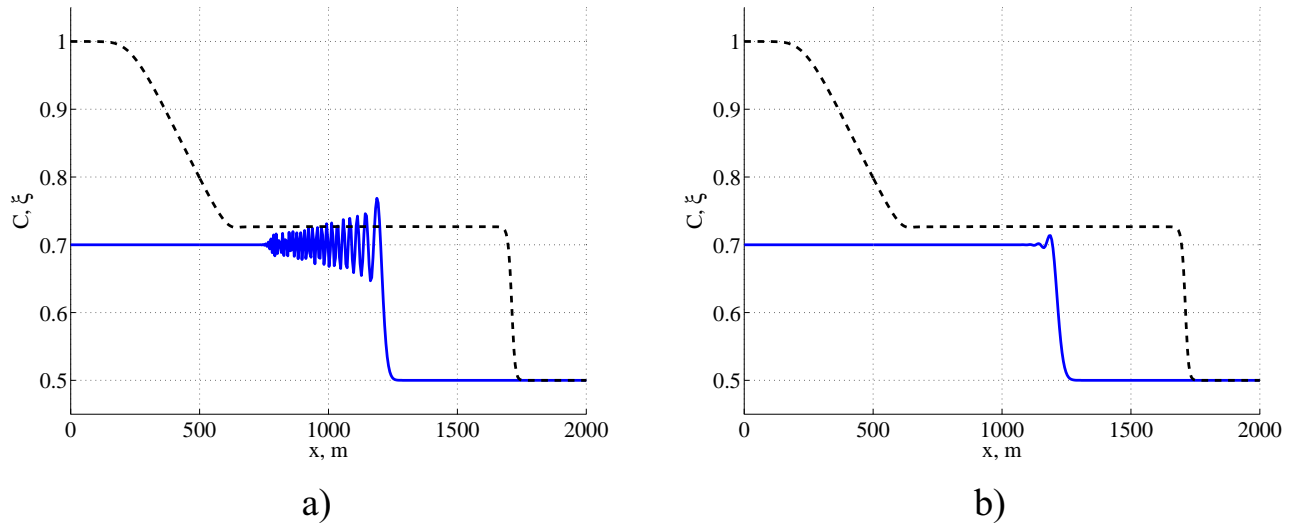


Рис. 6: Распределение концентрации и уровня поверхности жидкости для $t = 240$, $\Delta x = 5$, $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.1$ а) регуляризация по C ; б) регуляризации по h , u и C .

Тест 2.3 – задача Римана с разбегающей жидкостью

Постановка задачи

Задача взята из [4]. Рассматривается область $x \in [0, 50]$. Начальные условия представляют собой две разбегающиеся волны от центра разрыва, расположенного в координате $x_0 = 25$ м, см. рис. 7. Значения слева от разрыва: $(h, u, C) = (1, -5, 1)$, $x \in [0, 25]$; значения справа: $(h, u, C) = (1, 5, 0)$, $x \in [25, 50]$. Время расчета $t = 2.5$ с.

Здесь значение скорости и концентрации на границе разрыва задавалось в двух точках, т.е. без промежуточного сглаживания.

Результаты моделирования

В момент времени $t = 2.5$ с в центре области образуется так называемая зона "сухого дна", подобная задача уже была рассмотрена в рамках РУМВ в [13].

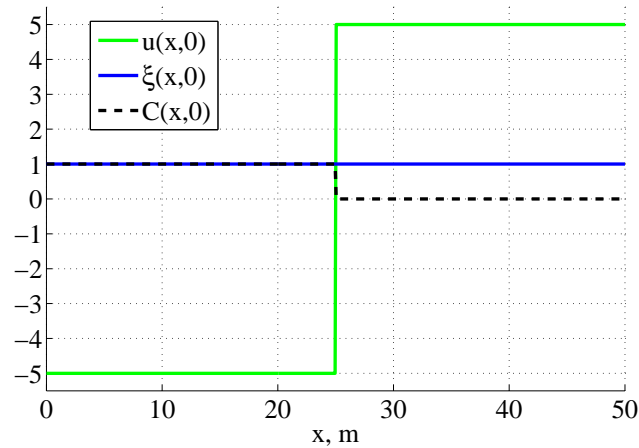


Рис. 7: Начальное распределение скорости, концентрации и уровня поверхности воды.

В [4] говорится, что для данной задачи точным решением для распределения концентрации примеси C является стационарный разрыв, который в большинстве численных схем воспроизводится очень трудоемкими методами.

Результаты для распределения ξ и C на момент времени $t = 2.5$ с., $\Delta x = 0.1$, $\alpha = 0.3$ представлены на рис. 8. Результат совпадает с точным решением для любых разбиений по сетке.

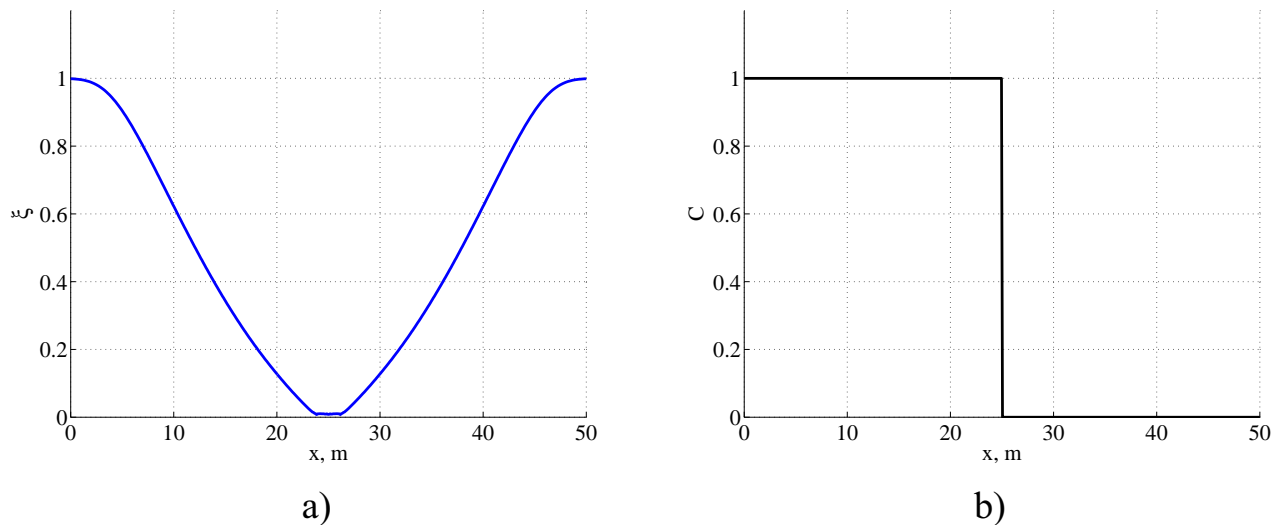


Рис. 8: Результаты расчета для $t = 2.5$ с., $\Delta x = 0.1$, $\alpha = 0.3$. а) График распределения уровня поверхности воды; б) распределение концентрации.

3. Пространственные течения

Регуляризованное уравнение для концентрации примеси в двумерном случае

Для плоской геометрии уравнение для концентрации в системе РУМВ запишется в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Ch}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx}C}{\partial x} + \frac{\partial j_{my}C}{\partial y} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial C}{\partial x} (D + \tau u_x^2) + \tau u_x u_y h \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial C}{\partial y} (D + \tau u_y^2) + \tau u_x u_y h \frac{\partial C}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Его разностная реализация:

$$\begin{aligned} & \widehat{Ch} = Ch - \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(j_{i+1/2,j}^x C_{i+1/2,j} - j_{i-1/2,j}^x C_{i-1/2,j} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(j_{i,j+1/2}^y C_{i,j+1/2} - j_{i,j-1/2}^y C_{i,j-1/2} \right) + \\ & + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(h_{i+1/2,j} \frac{C_{i+1,j} - C_{i,j}}{\Delta x} (D + \tau_{i+1/2,j} (u_{i+1/2,j}^x)^2) + \right. \\ & + \tau_{i+1/2,j} u_{i+1/2,j}^x u_{i+1/2,j}^y h_{i+1/2,j} \frac{C_{i+1/2,j+1/2} - C_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta y} - \\ & \left. - h_{i-1/2,j} \frac{C_{i,j} - C_{i-1,j}}{\Delta x} (D + \tau_{i-1/2,j} (u_{i-1/2,j}^x)^2) + \right. \\ & \left. + \tau_{i-1/2,j} u_{i-1/2,j}^x u_{i-1/2,j}^y h_{i-1/2,j} \frac{C_{i-1/2,j+1/2} - C_{i-1/2,j-1/2}}{\Delta y} \right) + \\ & + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(h_{i,j+1/2} \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j}}{\Delta y} (D + \tau_{i,j+1/2} (u_{i,j+1/2}^y)^2) + \right. \\ & + \tau_{i,j+1/2} u_{i,j+1/2}^x u_{i,j+1/2}^y h_{i,j+1/2} \frac{C_{i+1/2,j+1/2} - C_{i-1/2,j+1/2}}{\Delta x} - \\ & \left. - h_{i,j-1/2} \frac{C_{i,j} - C_{i,j-1}}{\Delta y} (D + \tau_{i,j-1/2} (u_{i,j-1/2}^y)^2) + \right. \\ & \left. + \tau_{i,j-1/2} u_{i,j-1/2}^x u_{i,j-1/2}^y h_{i,j-1/2} \frac{C_{i+1/2,j-1/2} - C_{i-1/2,j-1/2}}{\Delta x} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Тест 3.1 – задача прорыва симметричной дамбы на плоском дне

Постановка задачи

Данный тест взят из [2]. Также он рассматривался в [4].

В данном примере рассматривается квадратная область $[0, 1400] \times [0, 1400]$. На рис. 9 изображены начальные условия для высоты уровня жидкости, скорости и концентрации. Вода вытекает через отверстие, находящегося между координатами $y = 560$ и $y = 840$; координата стенки $x = 700$.

Функция, описывающая начальные условия для концентрации примеси, выглядит следующим образом:

$$C(x, y, t = 0) = \begin{cases} e^{-0.0001[(x-650)^2+(y-600)^2]}, & 0 \leq x \leq 700, \quad 0 \leq y \leq 1400, \\ 0.5, & 700 \leq x \leq 1400, \quad 0 \leq y \leq 1400. \end{cases}$$

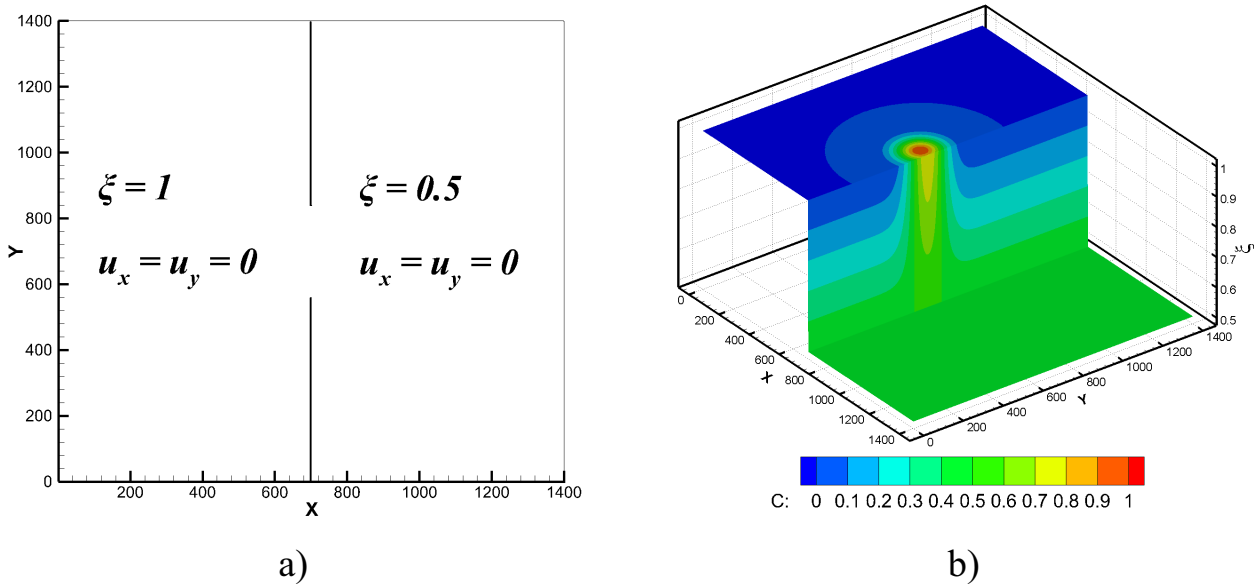


Рис. 9: Начальное распределение а) уровня поверхности воды и скорости; б) уровня поверхности воды с наложенной картой распределения концентрации.

Граничные условия на линиях, соответствующих $x = 0$ и $x = 1400$, ставились как условия сноса:

$$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \frac{\partial u_n}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \frac{\partial u_\tau}{\partial \mathbf{n}} = 0;$$

для всех остальных стенок ставились условия отражения:

$$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad u_n = 0, \quad \frac{\partial u_\tau}{\partial \mathbf{n}} = 0.$$

Результаты моделирования

Результаты для $t = 200$ представлены на рис. 10 и 11. Коэффициенты $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.2$. Число разбиений по сетке: $N_x = N_y = 500$, что соответствует: $\Delta x = \Delta y = 2.8$ м, такие же разбиения сетки используются и в [2], [4].

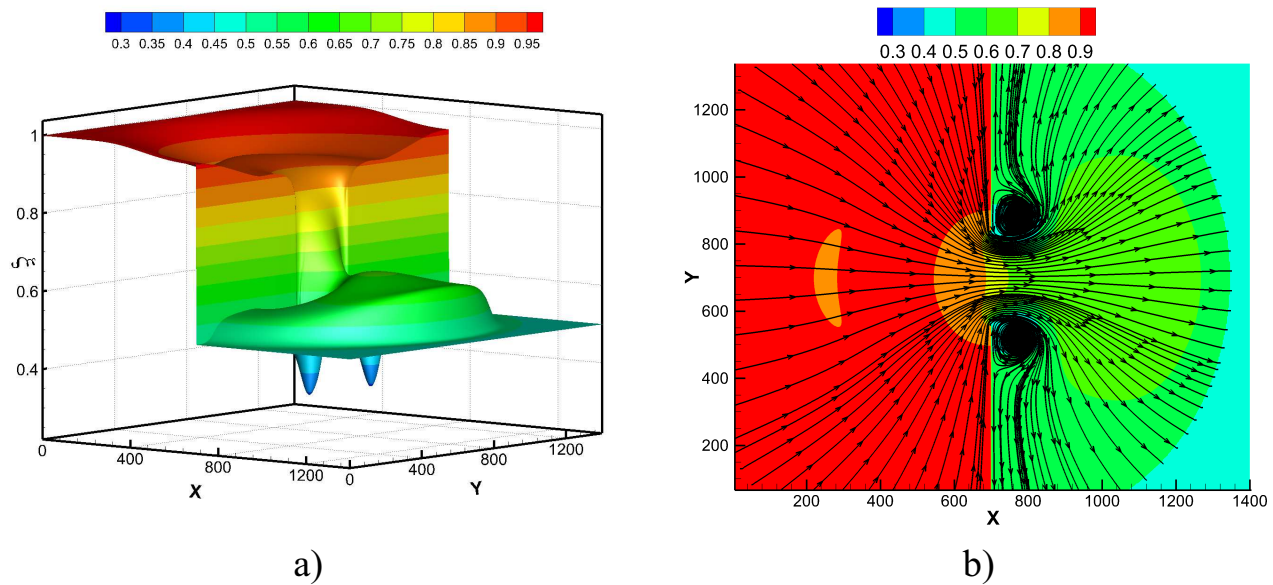


Рис. 10: Результаты расчета для распределения уровня поверхности воды. а) В трехмерном виде; б) изолинии уровня и линии тока.

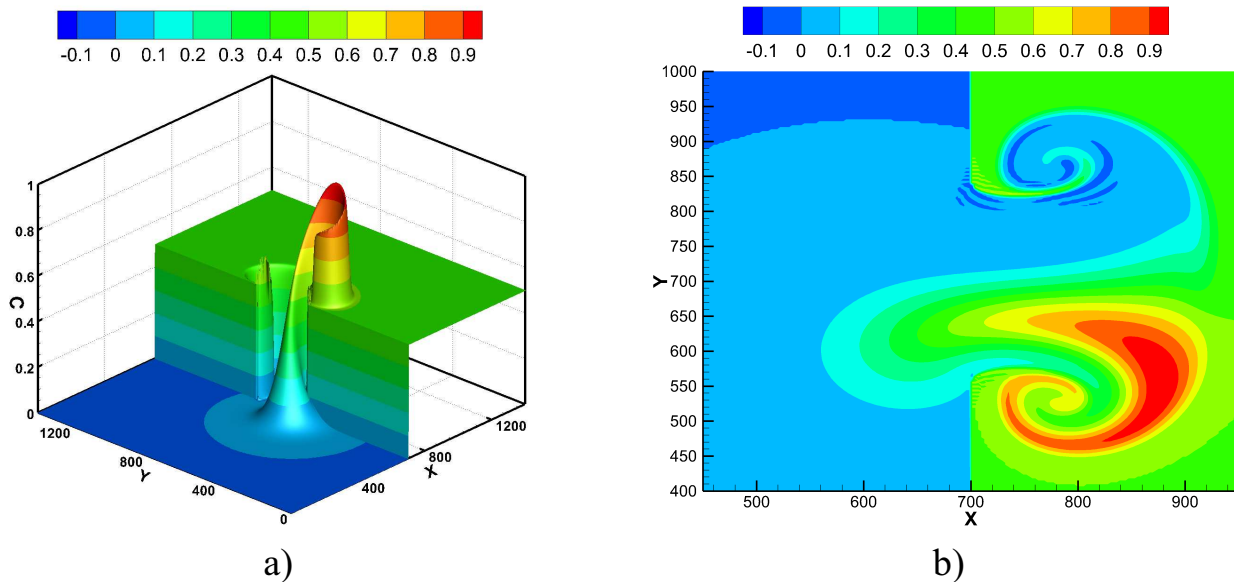


Рис. 11: Результаты расчета для распределения концентрации примеси. а) В трехмерном виде; б) в плоскости.

В [2] приводится сравнение метода конечного объема (FV – Finite-Volume) и метода частиц конечного объема (FVP – Finite-Volume-Particle). Поэтому далее результаты расчета с применением РУМВ будут сравниваться с этими двумя моделями.

Расчеты хорошо согласуются с [2] и [4]. При уменьшении α до 0.2 увеличивается амплитуда вихрей, что соответствует картине, представленной в [2], [4]. Также из рис. 10 видно, что решение для поверхности жидкости хорошо демонстрирует картину как круговой ударной волны, так и вихрей, образованных по обе стороны от разрыва. Аналогично для концентрации – рис. 11 – можно наблюдать четкое расположение фронтов и структур внутри вихрей, как и в [2].

Присутствуют незначительные осцилляции концентрации примеси в малом вихре, которые, однако встречаются и в [2] для FV метода. В случае же FVP метода вихрь неестественно сглажен, что вызывает сомнения с точки зрения физической корректности решения.

Тест 3.2 – задача о разрушении дамбы над неровным дном при наличии источника

Выпишем систему РУМВ вместе с уравнением переноса при наличии источника примеси:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_m = S, \quad (30)$$

$$\frac{\partial (h\mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div} (\mathbf{j}_m \otimes \mathbf{u}) + \nabla \frac{gh^2}{2} = -gh^* \nabla b + \operatorname{div} \Pi, \quad (31)$$

$$\frac{\partial Ch}{\partial t} + \operatorname{div} (\mathbf{j}_m C) = \operatorname{div} (Dh \nabla C + \tau \mathbf{u} [(h\mathbf{u} \cdot \nabla C) + CS - T_s S]) + T_s S, \quad (32)$$

где:

$$h^* = h - \tau (\operatorname{div} (h\mathbf{u}) - S), \quad (33)$$

$$\mathbf{j}_m = h (\mathbf{u} - \mathbf{w}), \quad (34)$$

$$\mathbf{w} = \frac{\tau}{h} [\operatorname{div} (h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + gh \nabla (b + h)], \quad (35)$$

$$\Pi = \tau \mathbf{u} \otimes [h (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + gh \nabla (b + h) + S\mathbf{u}] + \tau I [gh (\operatorname{div} (h\mathbf{u}) - S)]. \quad (36)$$

Обозначения, как и в РУМВ: $h(\mathbf{x}, t)$ – толщина слоя воды, отсчитываемая от дна, $b(\mathbf{x})$ – уровень дна, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – вектор распределения скоростей, g – ускорение силы тяжести, направленное вниз вдоль оси z . $C(\mathbf{x}, t)$ – концентрация примеси, D – коэффициент диффузии, $\xi(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t) + b(\mathbf{x})$ – уровень поверхности

воды. Помимо этого в уравнении присутствуют: $S(x, t)$ – обозначает источник жидкости (м/с), и T_s – значение концентрации примеси в источнике S .

Регуляризатор (33)–(36) для системы уравнений (30)–(32) построен с учетом включенного в систему источника примеси. Однако следует отметить, что введение источника в регуляризацию, как показали численные эксперименты, в этой задаче не влияет на результат. Однако, как пишут в [3] и [4], для системы уравнений с источником появляется необходимость выполнения нетривиальных условий баланса и законов сохранения, чего добиваются не все схемы. Для оценки влияния этого фактора на решение возможно обобщение энергетической оценки решения из [14].

Постановка задачи

Тест взят из [2]. Рассматривается квадратная область: $[0, 1400] \times [0, 1400]$ с начальными условиями для глубины и скоростей, продемонстрированными на рис. 12.

Граница двух областей описывается следующей функцией:

$$\Gamma(y) = \begin{cases} \min \left[500 + \frac{(y-700)^2}{400}, 900 \right], & 0 \leq y \leq 700, \\ 500, & 700 \leq y \leq 1400. \end{cases}$$

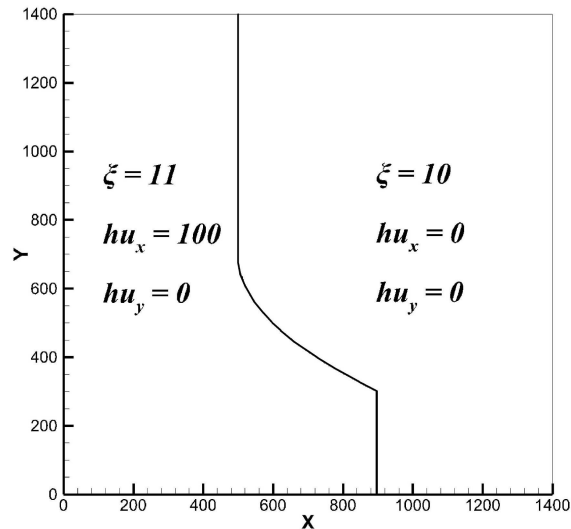


Рис. 12: Начальное распределение уровня поверхности воды и потоков.

Дно в этой задаче имеет форму трех эллиптических гауссианов:

$$b(x, y) = 4.5 \left[e^{-\kappa_1(x-800)^2 - \kappa_2(y-700)^2} + e^{-\kappa_2(x-600)^2 - \kappa_1(y-600)^2} + e^{-\kappa_2(x-1000)^2 - \kappa_1(y-700)^2} \right],$$

где $\kappa_1 = 10^{-4}$, $\kappa_2 = 10^{-3}$.

Начальное условие для концентрации: $C(x, y, t = 0) = 0$, но в дальнейшем, из-за наличия источника:

$$S(x, y, t) = 0.5e^{-0.5(t-8)^2 - 0.00001(x+y-1300)^2 - 0.0005(x-y-100)^2},$$

концентрация примеси в котором $T_s = 25$, она возрастает.

Визуализацию функции дна и функции источника можно наблюдать на рис. 13.

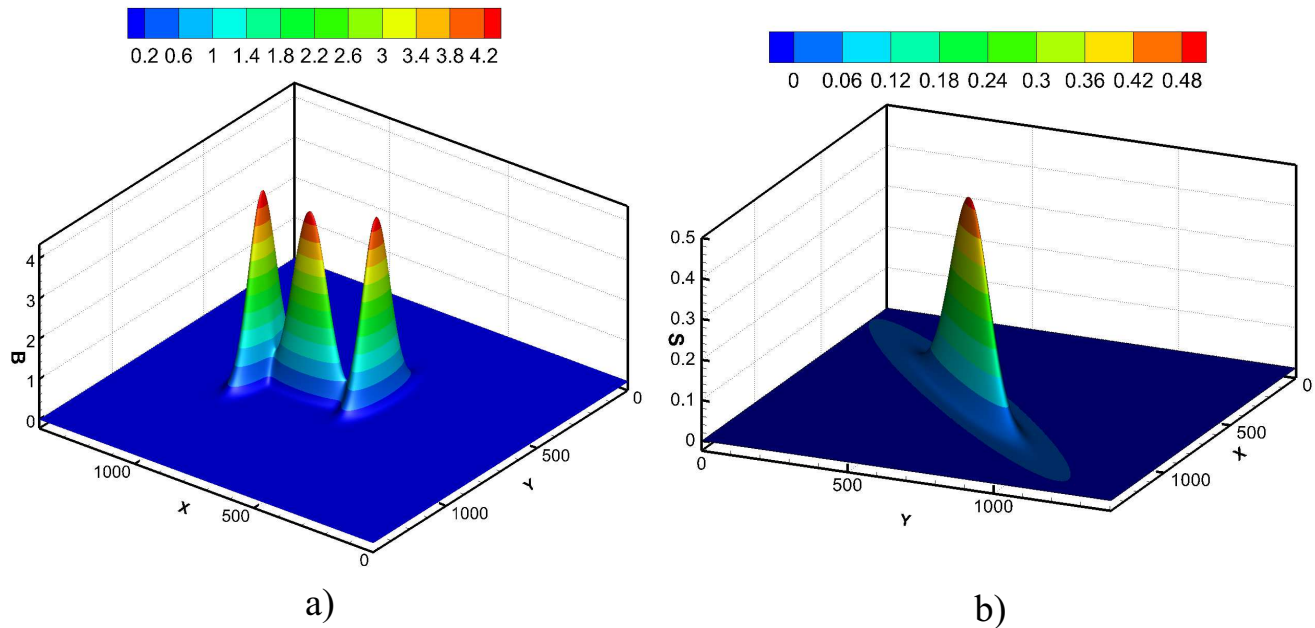


Рис. 13: а) Батиметрия дна; б) распределение функции источника для $t = 8$.

На границах ставились условия сноса:

$$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \frac{\partial u_n}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \frac{\partial u_\tau}{\partial \mathbf{n}} = 0.$$

Результаты моделирования

Результаты представлены для времени расчета $t = 30$ и $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.2$. $N_x = N_y = 500$, что соответствует: $\Delta x = \Delta y = 2.8$.

В [2] приводится сравнение метода конечного объема (FV – Finite-Volume) и метода частиц конечного объема (FVP – Finite-Volume-Particle) для разбиения по сетке $N_x = N_y = 500$. Поэтому далее результаты расчета с применением РУМВ будут сравниваться с этими двумя моделями.

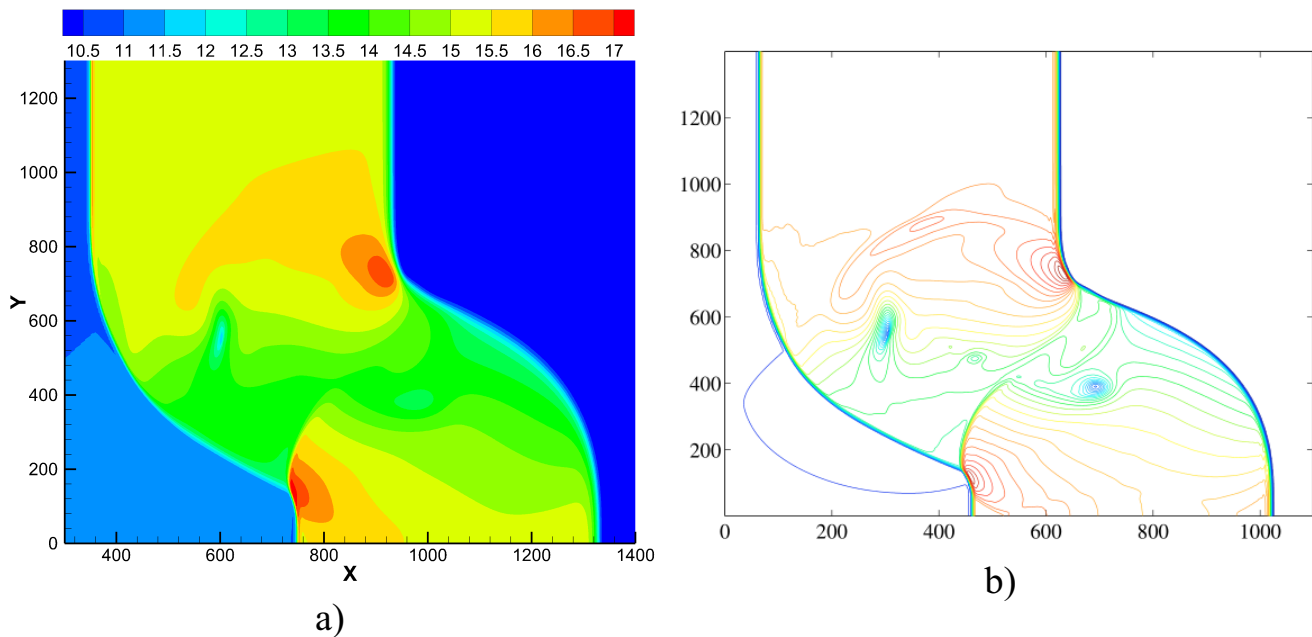


Рис. 14: Сравнение результатов расчета изолиний для уровня поверхности жидкости. а) РУМВ; б) [2] (ось x сдвинута на 300, в [2] $x \in [-300, 1100]$).

На рис. 14 приведено сравнение результатов модели РУМВ и [2]. Видно, что столкновение искривленной ударной волны начального распределения с неровностями дна приводит к довольно сложным волновым структурам.

Результаты для РУМВ эволюции изменения концентрации примеси во времени изображены на рис. 15 на те же моменты времени, что и в работе [2]. Подчеркнем, что оба расчета выполнены на одинаковых пространственных сетках, при этом метод РУМВ имеет первый порядок точности по пространству, а метод из [2] – как минимум второй. Визуальное сопоставление результатов РУМВ и [2] показывает их близкое соответствие.

Рис. 16 демонстрирует распределение линий тока на моменты времени $t = 7.5$ и $t = 22$, показывающее поле скоростей, которое формирует распределение примеси.

На рис. 17 и 18 можно сравнить результаты расчетов для концентрации в двумерной проекции на оси (C, y) . Результат, полученный с помощью модели РУМВ, сравнивался с методами FV и FVP из [2] и находится примерно между ними.

Также на рис. 19 приводится зависимость численного решения от сгущения сетки ($\beta = 0.2$, $\alpha = 0.5$) и изменения параметра α ($N_x = N_y = 400$, $\beta = 0.2$).

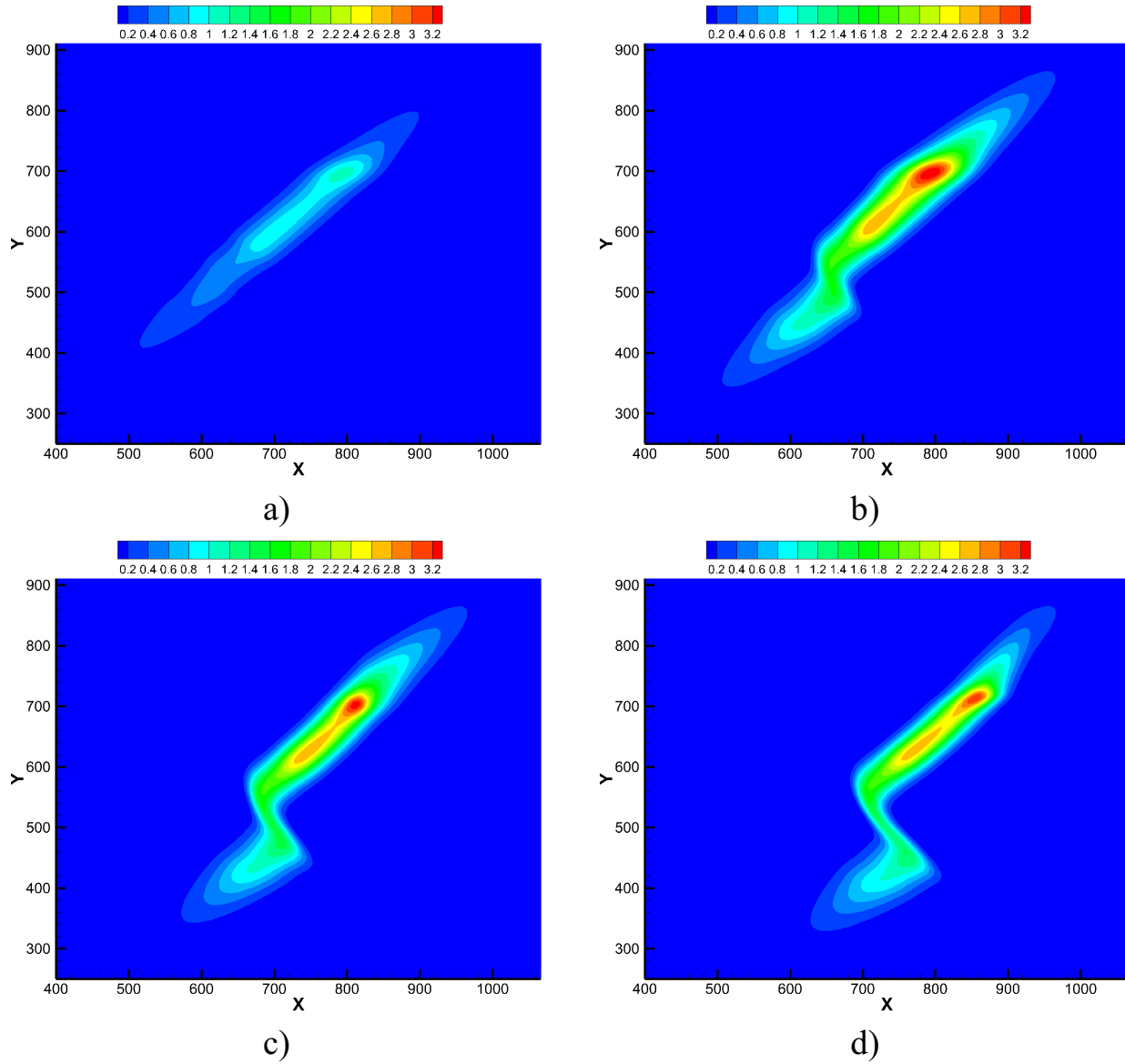


Рис. 15: РУМВ: Изолинии распределения концентрации примеси для различных моментов времени. а) $t = 7.5$; б) $t = 15$; в) $t = 22.5$; г) $t = 30$.

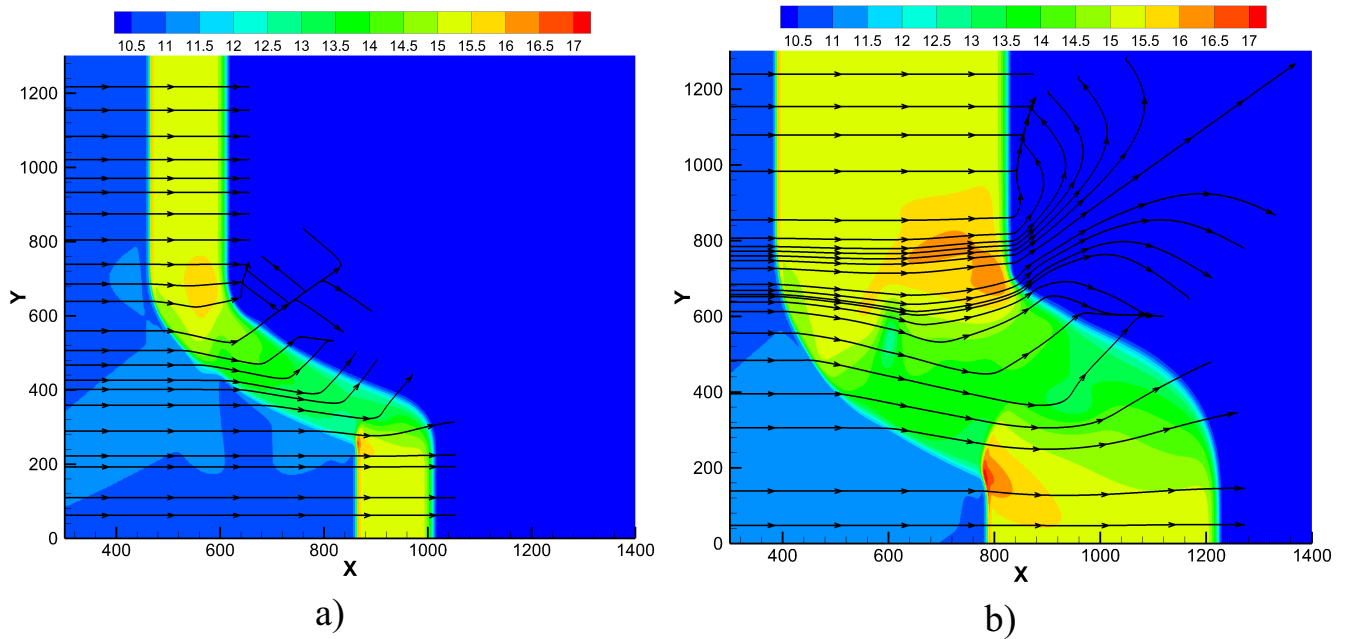


Рис. 16: Демонстрация изолиний уровня воды и линий тока для моментов времени а) $t = 7.5$; б) $t = 22.5$.

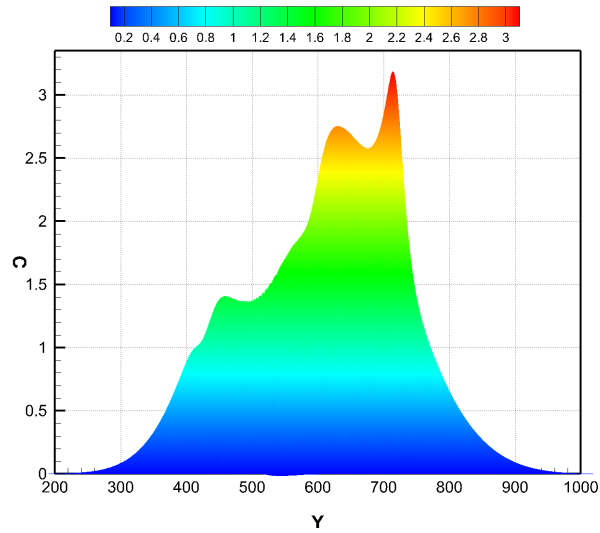


Рис. 17: РУМВ: 2D проекция концентрации примеси ($C(y)$) на момент времени $t = 30$.

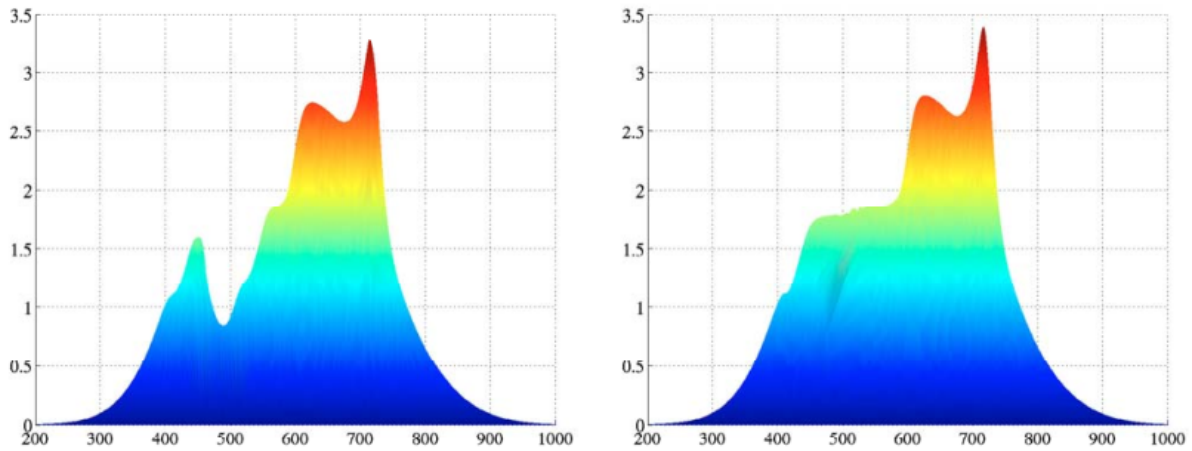


Рис. 18: Результат из [2]: 2D проекция концентрации примеси ($C(y)$) на момент времени $t = 30$, посчитанная методами FV (слева) и FVP (справа).

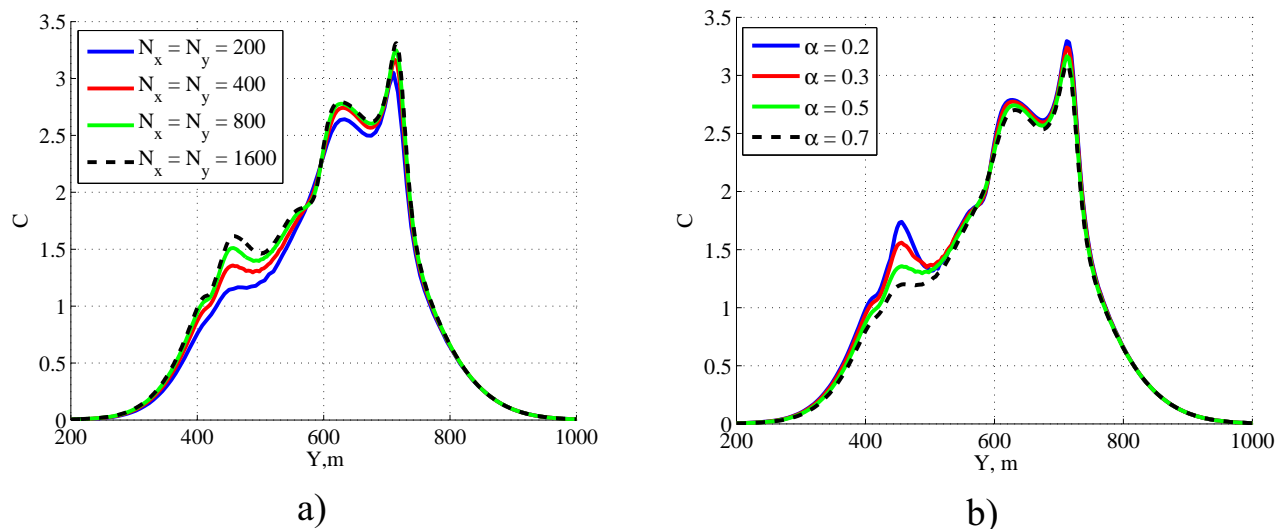


Рис. 19: РУМВ: 2D проекция концентрации примеси ($C(y)$), $\beta = 0.2$. а) Для различных разбиений сетки, $\alpha = 0.5$; б) для различных значений α , $N_x = N_y = 400$.

Заключение

В работе впервые построены регуляризованные уравнения гидродинамики совместно с уравнением для переноса пассивного скаляра, которым может быть, в частности, концентрация примеси в жидкости. В численных экспериментах на примере течений в приближении мелкой воды показано, что наличие дополнительной регуляризации в уравнении для переноса скаляра существенно улучшает качество численного решения для уравнения переноса по сравнению с использованием регуляризации только для уравнений неразрывности и импульса.

Аналогичный прием можно применить и для решения уравнений Навье-Стокса для описания течения неизотермической вязкой несжимаемой жидкости, рассматривая уравнение теплопроводности как уравнение переноса пассивного скаляра с концентрацией C . В этом случае регуляризованный вид системы запишется как:

$$\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{w}) = 0, \quad (37)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot ((\mathbf{u} - \mathbf{w}) \otimes \mathbf{u}) - \nabla \cdot \nu (\nabla \mathbf{u} + (\mathbf{u})^T) - \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{w}) = \frac{1}{\rho_0} \nabla p + \mathbf{f}, \quad (38)$$

где скорость:

$$\mathbf{w} = \tau(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p - \mathbf{f}), \quad (39)$$

а регуляризованный вид уравнения переноса примеси:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot ((\mathbf{u} - \mathbf{w})C) - \nabla \cdot \left(\frac{\nu}{S_c} \nabla C + \tau \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \nabla C) \right) = 0. \quad (40)$$

Здесь $\frac{\nu}{S_c}$ – коэффициент диффузии примеси, или, для теплопроводной жидкости, коэффициент температуропроводности.

Отметим, что ранее уравнение вида (40) записывалось без учета слагаемого с градиентом C в правой части, что приводило к существенным осцилляциям решения в случае малых коэффициентов температуропроводности.

Благодарности

В заключение авторы выражают благодарность А.А. Злотнику за конструктивные замечания по поводу вида регуляризованных уравнений и за плодотворные идеи по постановке начальных условий в задачах переноса.

Библиографический список

- [1] *A. Chertock, A. Kurganov, G. Petrova* Finite-Volume-Particle Methods for Models of Transport of Pollutant in Shallow Water. *Journal of Scientific Computing*. 2006. vol. 27. pp. 189–199.
- [2] *A. Chertock, A. Kurganov* On a hybrid finite-volume-particle method. *ESAIM: M2AN*. 2004. vol. 38. no. 6. pp. 1071–1091.
- [3] *E. Audusse, M.-O. Bristeau* Transport of pollutant in shallow water a two time steps kinetic method. *ESAIM: M2AN*. 2003. vol. 37. no. 2. pp. 389–416.
- [4] *A.I. Delis, Th. Katsaounis* A generalized relaxation method for transport and diffusion of pollutant models in shallow water. *Computational Methods in Applied Mathematics*. 2004. vol. 4. no.4. pp. 410–430.
- [5] *E. D. Fernandez-Nieto, G. Narbona-Reina* Extension of WAF type methods to non-homogeneous Shallow Water Equations with pollutant. *Journal of Scientific Computing*. 2008. vol. 36. pp. 193–217.
- [6] *F. Benkhaldoun, I. Elmahi, M. Seaid* Well-balanced finite volume schemes for pollutant transport on unstructured meshes. *Journal of Computational Physics*. 2007. vol. 226. pp. 180–203.
- [7] *E. M. Chaabelasri, I. Elmahi, R. Abdellaoui, N. Salhi* Well Balanced Adaptive Simulation of Pollutant Transport by Shallow Water Flows: Application to the Bay of Tangier. *International Journal of Hydraulic Engineering*. 2014. vol. 3. no. 1. pp. 10–23.
- [8] *В. И. Квон, Д. В. Квон, С. Д. Зонов, В. Б. Карамышев* Численный расчет течений и дальнего переноса примеси в равнинных речных водохранилищах. *Прикладная Механика и Техническая Физика*. 2003. т. 44. № 6. с. 158–163.
- [9] *M.-O. Bristeau, B. Perthame* Transport of pollutant in shallow water using kinetic schemes. *ESAIM: Proc*. 2001. vol. 10. pp. 9–21.
- [10] *M. M. Rahaman, L. S. Andallah, M. S. Alam* Numerical solution of advection diffusion reaction equation coupled with shallow water equation. *International Journal of Scientific & Engineering Research*. 2017. vol. 8. pp. 256–262.

- [11] *В. В. Чуруксаева, М.Д. Михайлов* Численное моделирование потока жидкости над рельефом дна. Вестн Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2014. № 1(27). с. 51–60.
- [12] *О. В. Булатов, Т. Г. Елизарова* Регуляризованные уравнения мелкой воды и эффективный метод численного моделирования течений в неглубоких водоемах. ЖВМиМФ. 2011. т. 51. № 1. с. 170–184.
- [13] *О. В. Булатов* Численное моделирование течений в приближении мелкой воды на основе регуляризованных уравнений: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 /Булатов Олег Витальевич. – М., 2014. – 155 с.
- [14] *А. А. Злотник* Пространственная дискретизация одномерной баротропной квазигазодинамической системы уравнений и уравнение энергетического баланса. Матем. моделирование. 2012. т. 24. №. 10. с. 51–64.

Оглавление

Введение	3
1. Математическая модель и варианты регуляризованных уравнений . .	4
2. Одномерные течения	7
Регуляризованное уравнение для концентрации примеси	
в одномерном случае	7
Тест 2.1 – адвекция загрязнения над неровным дном	9
Тест 2.2 – прорыв плотины на плоском дне	11
Тест 2.3 – задача Римана с разбегающей жидкостью	13
3. Пространственные течения	15
Регуляризованное уравнение для концентрации примеси	
в двумерном случае	15
Тест 3.1 – задача прорыва симметричной дамбы на плоском дне . . .	16
Тест 3.2 – задача о разрушении дамбы над неровным дном при	
наличии источника	18
Заключение	25
Благодарности	25
Библиографический список	26