

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Г. Елизарова, Б. Н. Четверушкин, Об одном вычислительном алгоритме для расчета газодинамических течений, *Докл. АН СССР*, 1984, том 279, номер 1, 80–83

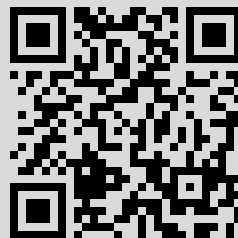
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 176.120.240.207

21 января 2021 г., 11:08:10



Т.Г. ЕЛИЗАРОВА, Б.Н. ЧЕТВЕРУШКИН

ОБ ОДНОМ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМ АЛГОРИТМЕ ДЛЯ РАСЧЕТА
ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

(Представлено академиком А.А. Самарским 27 XII 1983)

1°. Как правило, разностные схемы для решения уравнений газовой динамики конструируются на основе непосредственного использования этих уравнений. При таком построении алгоритма как бы в тени остается тот факт, что сами уравнения газовой динамики являются следствием более сложного кинетического уравнения. Из относительно небольшого числа попыток построить алгоритм расчета задач газовой динамики, опираясь непосредственно на решение уравнения переноса, отметим работы [1–4]. В этих работах использовалась следующая простая модель, описывающая перенос частиц.

Предположим, что в момент времени $t = t^j$ в каждой точке пространства функция распределения f может быть записана в локально-максвелловском виде

$$(1) \quad f_0^j(\bar{x}, \bar{\xi}, t^j) = \rho^j(\bar{x}, t^j) (2\pi RT(\bar{x}, t^j))^{-3/2} \exp[-(\xi_\alpha - u_\alpha(\bar{x}, t^j))^2 / 2RT(\bar{x}, t^j)],$$

где ρ , T , \bar{u} – макроскопические параметры течения газа. Затем на отрезке времени $t \in [t^j, t^{j+1}]$ происходит бесстолкновительный разлет газа, который описывается уравнением

$$(2) \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \xi_\alpha = 0.$$

В момент времени $t = t^{j+1}$ функция распределения вновь становится локально-максвелловской, но уже с новыми значениями ρ^{j+1} , \bar{u}^{j+1} , T^{j+1} газодинамических параметров. В дальнейшем при переходе к моменту времени $t = t^{j+2}$ вся процедура повторяется.

В работах [1, 2] для определения газодинамических параметров решается непосредственно уравнение (2), зависящее от скоростей молекул. В [3, 4] на основе модели (1)–(2) удалось построить разностные схемы, непосредственно не включающие в себя скорость молекул.

В настоящей работе на основе кинетической модели (1)–(2) получены относительно простые уравнения типа уравнений газовой динамики, которые в дальнейшем используются для численных расчетов.

2°. Основываясь на бесстолкновительной модели (1)–(2), определим функцию распределения на новом шаге по времени $f^{j+1}(\bar{x}, \bar{\xi}, t^{j+1}) = f_0^j(\bar{x} - \bar{\xi}\tau, \bar{\xi}, t^j)$, где f_0^j – локально-максвелловская функция на слое t^j , $\tau = t^{j+1} - t^j$. Разложим функцию распределения в ряд Тейлора по малому параметру

$$(3) \quad f^{j+1} = f_0^j - \tau \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial f_0^j}{\partial x_\alpha} \xi_\alpha + \frac{\tau^2}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{\partial^2 f_0^j}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \xi_\alpha \xi_\beta + \dots$$

с точностью до членов третьего порядка малости по τ . Интегрируя функцию распределения (3) с весами $1, \bar{\xi}, \bar{\xi}^2/2$, получим значения газодинамических параметров на слое t^{j+1} . Особенностью предлагаемого подхода является то, что интегралы от функции распределения по скоростям молекул удается получить аналитически в явном виде и, в отличие от [3], без использования табличных функций.

Соответствующая дифференциально-разностная система уравнений для описания газодинамического течения будет иметь следующий вид:

$$(4) \quad \frac{\hat{\rho} - \rho}{\tau} = - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \rho u_{\alpha} + \frac{\tau}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (\rho u_{\alpha} u_{\beta} + \delta_{\alpha\beta} \rho RT);$$

$$(5) \quad \frac{(\hat{\rho} u_{\alpha}) - \rho u_{\alpha}}{\tau} = - \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (\rho u_{\alpha} u_{\beta} + \delta_{\alpha\beta} \rho RT) + \\ + \frac{\tau}{2} \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_{\beta}^2} [\rho u_{\alpha} (u_{\beta}^2 + \rho RT + \delta_{\alpha\beta} \cdot 2RT)] + \\ + \tau \sum_{p, \alpha=1, p \neq \alpha}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x_p} [\rho u_p (u_{\alpha}^2 + RT)] + \tau \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_l} \rho u_{\alpha} u_p u_l, \quad p \neq l \neq \alpha;$$

$$(6) \quad \frac{\hat{E} - E}{\tau} = - \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \rho u_{\beta} \cdot \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha=1}^3 u_{\alpha}^2 + 5RT \right) + \\ + \frac{\tau}{2} \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_{\beta}^2} \left[\rho \left(\frac{u_{\beta}^4}{2} + 4u_{\beta}^2 RT + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 u_{\alpha}^2 (u_{\beta}^2 + RT) + \frac{5}{2} (RT)^2 \right) \right] + \\ + \tau \sum_{p, l=1, p \neq l}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_l} \left[\rho u_p u_l \cdot \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha=1}^3 u_{\alpha}^2 + 7RT \right) \right],$$

где $\hat{\rho} = \rho^{j+1}$, $(\hat{\rho} u) = (\rho u)^{j+1}$, $\hat{E} = E^{j+1}$.

Выписанные здесь дополнительные члены обладают первым порядком малости по τ и имеют смысл вязкости. Следует отметить, что вязкие члены появились и в уравнении для плотности, как и в полученной ранее одномерной схеме [3]. Однако дополнительные члены здесь удалось записать в гораздо более простом виде. Заметим, что уравнения (4)–(6) нельзя получить непосредственно из дифференциально-разностной аппроксимации уравнений газовой динамики.

Обратим внимание на слагаемые, пропорциональные второй производной от куба скорости, в правых частях уравнений (5). Как отмечалось в [5], использование такого рода уравнений для описания течений можно рассматривать как способ регуляризации уравнений Навье–Стокса, полезный при проведении численных расчетов.

Систему уравнений (4)–(6) можно получить, используя для описания функции распределения уравнение

$$\frac{\hat{f} - f}{\tau} + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha}} \xi_{\alpha} = I(\bar{x}, \bar{\xi}) + \frac{\tau}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \xi_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \xi_{\beta} \frac{\partial f}{\partial x_{\beta}};$$

здесь $I(\bar{x}, \bar{\xi})$ – интеграл столкновений. При этом применяется стандартная процедура вычисления моментов $\iint f c_{\alpha} c_{\beta} d\bar{\xi}$ и $\iint f \bar{c}^2 c_{\alpha} d\bar{\xi}$ (где $c_{\alpha} = \bar{\xi}_{\alpha} - u_{\alpha}$) и предполагается, что функция распределения имеет локально-максвелловский вид.

3°. Для решения системы уравнений (4)–(6), по всей видимости, можно использовать различные алгоритмы, в том числе основанные на применении неявных схем. В наших расчетах использовалась конкретная явная двухслойная разностная схема второго порядка точности по пространству: члены с первыми пространственными производными аппроксимировались центральными разностями, а для аппроксимации членов со вторыми производными записывалась одна из схем [6], применяемых для аппроксимации уравнений с малым параметром при старшей

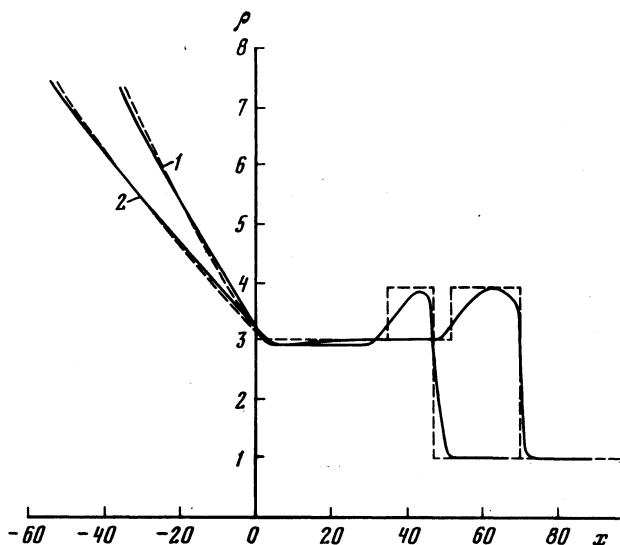


Рис. 1. Профили плотности на моменты времени $t = 4$ (1) и 6 (2)

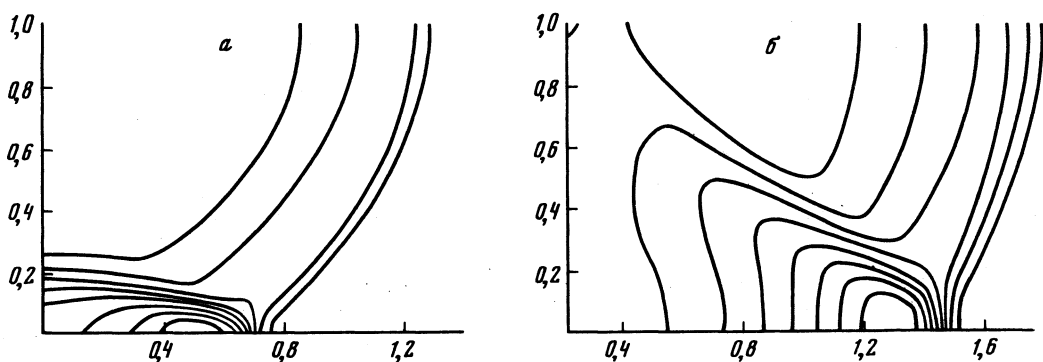


Рис. 2. Распространение цилиндрической взрывной волны в плоском канале (изобары расположены эквидистантно). $a - t = 0,25$, $P_{\min} = 1$, $P_{\max} = 11,8$; $b - t = 0,45$, $P_{\min} = 1$, $P_{\max} = 6,4$

производной

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho u^2 + \rho RT) \approx \frac{1}{2h} \frac{\tau}{2V_0} \left[\frac{(\rho u^2 + \rho RT)_{i+1} - (\rho u^2 + \rho RT)_i}{\text{th}(h/2\tau V_0)} - \frac{(\rho u^2 + \rho RT)_i - (\rho u^2 + \rho RT)_{i-1}}{\text{th}(h/2\tau V_0)} \right],$$

где $V_0 = \sqrt{RT_0}$ — характерная скорость звука в среде, h — шаг пространственной сетки. При больших значениях $\tau V_0/h$ построенная аппроксимация переходит в обычную аппроксимацию вторых производных со вторым порядком точности.

В качестве одномерного теста решается задача о распаде сильного разрыва [7, 8]. В начальный момент времени слева от разрыва $\rho = 8$, $T = 60$, справа $\rho = 1$, $T = 1$. При этом $u = 0$, $R = 1$. Сетка по x выбиралась равномерной, шаг по времени варьировался от $0,1$ до 10^{-4} . На рис. 1 приведены результаты расчетов этой задачи при $\tau = 10^{-3}$, $h = 1$ на моменты времени $t = 4$ и 6 . Штриховой линией показано точ-

ное решение. Уменьшение шага τ , начиная с некоторого $\tau_0 = 0,05$, не влияет на результаты расчетов. С уменьшением пространственного шага h точность решения возрастает. Обращает на себя внимание достаточно хорошее совпадение с точным решением и крутой фронт ударной волны [4].

В качестве двумерного теста рассматривается задача об ударе цилиндрической ударной волны о плоскую границу. В начальный момент времени $T = 100$, $\rho = 1$, $u = 0$. Вне горячей зоны $T = 1$. На рис. 2 представлены изолинии давления, рассчитанные на сетке 31×61 на моменты времени $t = 0,25$ и $0,45$.

Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша
Академии наук СССР, Москва

Поступило
10 I 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. Поткин В.В. – ЖВМиМФ, 1975, т. 16, № 6, 1492–1498.
2. Aristov V.V., Tcheremissine F.G. XIII Intern. symp. of rarefied gas dynamics. Inst. of Thermophysics. Novosibirsk, 1982, № 1, p. 147–149.
3. Волчинская М.И., Павлов А.Н., Четверушкин Б.Н. – Препринт Ин-та прикл. математики им. М.В. Келдыша АН СССР, 1983, № 113. 12 с.
4. Елизарова Т.Г., Павлов А.Н., Четверушкин Б.Н. – Там же, 1983, № 114. 12 с.
5. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.
6. Куликов Ю.Н., Четверушкин Б.Н. ЖВМиМФ, 1973, № 1, т. 13, с. 136–146.
7. Жмакин А.И., Фурсенко А.А. – Там же, 1980, т. 20, № 4, с. 1021–1030.
8. Головизнин В.М., Краюшкин И.Е., Рязанов М.А., Самарский А.А. – Препринт Ин-та прикл. математики им. М.В. Келдыша АН СССР, 1983, № 105. 33 с.

УДК 517.9

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

К.Л. САМАРОВ

О ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА

(Представлено академиком С.Л. Соболевым 24 II 1984)

1. В в е д е н и е. В качестве естественного аналога уравнения Шредингера для релятивистски свободной частицы в известной книге Дж. Бьеркена и С. Дрелла [1] предложено псевдодифференциальное уравнение

$$(1) \quad \left(ih \frac{\partial}{\partial t} - mc^2 \sqrt{I - \frac{h^2}{m^2 c^2} \Delta} \right) u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \in \mathbb{R}^1,$$

где I – тождественный оператор, Δ – оператор Лапласа, m – масса частицы, c – скорость света, h – постоянная Планка.

В работе [2] построена теория двойственности пространства основных и обобщенных функций $H^{+\infty}(G)$ и $H^{-\infty}(G)$ и доказано, в частности, что задача Коши для уравнения (1) с начальным условием

$$(2) \quad u(0, x) = \varphi(x), \quad \varphi(x) \in H^{\pm\infty}(\mathbb{R}^3),$$

корректно разрешима в пространствах $H^{\pm\infty}(\mathbb{R}^3)$ и ее решение можно записать в виде

$$u(t, x) = \exp \left\{ - \frac{itmc^2}{h} \sqrt{I - \frac{h^2}{m^2 c^2} \Delta} \right\} \varphi(x).$$