Цена 10 коп.

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Академии наук СССР

Т.Г. Елизарова, Ю.В. Шеретов

# О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ТИПА УДАРНОЙ ВОЛНЫ ДЛЯ КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Препринт № 156 за 1990 г.

Москва

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ.М.В.КЕЛДЫША
АКАДЕМИИ НАУК СССР

Т.Г.Елизарова, Ю.В.Шеретов

# О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ТИПА УДАРНОЙ ВОЛНЫ ДЛЯ КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Москва 1990 г.

## АННОТАЦИЯ

Изучаются некоторые свойства решений типа ударной волны для квазигазодинамических уравнений. Доказано, что в стационарном случае такие решения являются гладкими и подчиняются тождеству, аналог которого имеет место и для уравнений Навье-Стокса. В случае бесконечно малой теплопроводности доказано возрастание энтропии на ударной волне и даны двухсторонние оценки изменений одних макропараметров относительно других.




## ВВЕДЕНИЕ

Существует большое число работ, посвященных теоретическим, численным и экспериментальным исследованиям структуры ударных волн в различных средах. Обзоры известных в этой области результатов можно найти, например, в [I - 5]. Многообразие и сложность ударно-волновых явлений требуют сочетания различных подходов при их изучении. В газовой динамике ударные волны рассматривались в рамках математических моделей, основанных на системах уравнений Эйлера, Навье-Стокса, а также на нелинейном уравнении Больцмана, его БГК - приближении и других. Лишь для небольшого числа задач такого рода удалось найти точные аналитические решения. В большинстве случаев приходится проводить численные исследования, либо ограничиться качественным анализом интегральных кривых. Критерием адекватности модели служит согласие с экспериментальными данными, достичь которого удается также не всегда. Например, для значений числа Маха $M_1 > 2$ решение, полученное в рамках модели Навье-Стокса, расходится с экспериментом [4, 5].

В настоящей работе рассматривается задача о структуре неподвижной ударной волны для квазигазодинамических уравнений [6]. Связи квазигазодинамических уравнений с системой Навье-Стокса, уравнениями Прандтля и БГК изучались в [7 - 9]. В § I дана постановка задачи. В §§ 2 - 3 проинтегрированная стационарная квазигазодинамическая система разрешена относительно производных от макропараметров газа. Доказано, что решения типа ударной волны являются гладкими и подчиняются некоторым соотношениям, аналоги которых имеют место и в навье-стоксовской модели. В §§ 4 - 5 проведен анализ свойств решений типа ударной волны, возникающей в результате действия одной только вязкости ( коэффициент теплопроводности равен нулю ). В частности, доказано возрастание энтропии на ударной волне и даны двухсторонние оценки изменений одних макропараметров относительно других.

## § I. Постановка задачи

Пусть $\rho_1>0$, $p_1>0$, $u_1>(\gamma p_1/\rho_1)^{1/2}$ – значения макропараметров одноатомного идеального политропного газа ($\gamma=5/3$) перед неподвижной ударной волной,

$$\rho_2=\rho_1\frac{M_1^2(\gamma+1)}{2+(\gamma-1)M_1^2},\quad p_2=p_1\frac{2\gamma M_1^2-\gamma+1}{(\gamma+1)},$$

$$u_2=\rho_1 u_1/\rho_2,\quad \left(M_1^2=u_1^2/(\gamma p_1/\rho_1)\right), \qquad \text{(I.1)}$$

соответственно, их значения за ударной волной, определяемые из условий Гюгонио. Выпишем одномерную стационарную систему квазигазодинамических уравнений [6]:

$$(\rho u)_x=\left(\tau(\rho u^2+p)_x\right)_x, \qquad \text{(I.2)}$$

$$(\rho u^2+p)_x=\left(\tau(\rho u^3+3pu)_x\right)_x, \qquad \text{(I.3)}$$

$$[(E+p)u]_x=\left[\tau\left[(E+2p)u^2+\frac{p}{\rho}(E+p)\right]_x\right]_x+$$
$$(1-Pr)(æ T_x)_x, \qquad \text{(I.4)}$$

где

$$E=\rho\left(\frac{u^2}{2}+\varepsilon\right),\quad \varepsilon=\frac{p}{\rho(\gamma-1)},\quad p=\rho RT,$$

$$æ=c_p p\tau/Pr,\quad c_p=c_v+R,\quad c_v=R/(\gamma-1)$$

Здесь, в отличие от [6], скорректировано число Прандтля $Pr$. Величина

$$\tau=\frac{p_1\tau_1}{p}\left(\frac{T}{T_1}\right)^{\omega},\quad 0\le\omega\le 1$$

интерпретируется как характерное время релаксации молекул в



газе.

В работе изучаются свойства дважды непрерывно дифференцируемых на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ решений $\rho=\rho(x)>0$, $p=p(x)>0$, $u=u(x)>0$, системы (I.2) - (I.4), удовлетворяющих граничным условиям

А $\rho(x)\to\rho_1$, $p(x)\to p_1$, $u(x)\to u_1$ при $x\to-\infty$.

Б $\rho(x)\to\rho_2$, $p(x)\to p_2$, $u(x)\to u_2$ при $x\to+\infty$,

В $\rho'(x)\to 0$, $p'(x)\to 0$, $u'(x)\to 0$ при $x\to-\infty$.

В согласии с установившейся терминологией, будем называть их решениями типа ударной волны. Чтобы исключить трансляции по оси абсцисс, нормируем $u(x)$ условием $u(0)=0.5(u_1+u_2)$. Допущение о существовании таких решений основано на присутствии в системе (I.2) (I.4) диссипативного механизма, включающего вязкость специального вида и теплопроводность.

Из основной теоремы работы [9] следует, что для энтропии

$$S=c_v\left(\ln p/\rho^{\gamma}-\ln p_1/\rho_1^{\gamma}\right)$$

на решениях системы (I.2) - (I.4) выполняется тождество

$$(\rho u S)_x=\left(\tau(\rho u^2 S)_x\right)_x+(\tau S p_x)_x+$$
$$\left(æ\frac{T_x}{T}\right)_x+\frac{\Phi_{КГ}}{T}+æ\left(\frac{T_x}{T}\right)^2, \qquad \text{(I.6)}$$

где

$$\Phi_{КГ}=\frac{4}{3}p\tau(u_x)^2+\tau\frac{p}{\rho^2}\left[(\rho u)_x\right]^2+$$
$$\frac{\tau}{\rho}(\rho u u_x+p_x)^2+\frac{\tau}{\rho\varepsilon}(\rho u\varepsilon_x+p u_x)^2$$

– неотрицательная диссипативная функция для одномерной квазигазодинамической системы в стационарном случае. Приведенный результат существенно используется в §§ 3 - 4.

$$3(\rho u^2-P)\Delta W\},\tag{2.8}$$

$$P_x=\frac{1}{\tau\Delta}\Big\{\frac{\gamma}{(\gamma-1)}\frac{P}{\rho}\Big[\rho u^4+\Big(3+\frac{1}{Pr}\Big)Pu^2+\frac{3}{Pr}\frac{P^2}{\rho}\Big]\Delta I-$$

$$\frac{1}{(\gamma-1)}\Big[(\gamma-1)\rho u^4+(5\gamma-3)Pu^2+\frac{2\gamma}{Pr}\frac{P^2}{\rho}\Big]u\Delta\Sigma+$$

$$(\rho u^2+3P)u^2\Delta W\Big\},\tag{2.9}$$

$$u_x=\frac{1}{\tau\Delta}\Big\{-\frac{2\gamma}{(\gamma-1)}\frac{P}{\rho}\Big(u^2+\frac{1}{Pr}\frac{P}{\rho}\Big)u\Delta I+$$

$$\frac{1}{(\gamma-1)}\Big[(2\gamma-1)u^4+\gamma\Big(1+\frac{1}{Pr}\Big)\frac{P}{\rho}u^2+\frac{\gamma}{Pr}\frac{P^2}{\rho^2}\Big]\Delta\Sigma-$$

$$2u^3\Delta W\Big\}.\tag{2.10}$$

Правые части системы ОДУ (2.8) - (2.10) являются функциями класса $C^\infty$ в положительном октанте пространства $\mathbb{R}^3$ переменных $(\rho, P, u)$. Согласно классической теореме Пикара [10] для любой точки $x_0\in\mathbb{R}$ существует окрестность $U(x_0)$, в которой задача Коши $\rho(x_0)=\rho_0>0,\ P(x_0)=P_0>0,\ u(x_0)=u_0>0$, для системы (2.8) - (2.10) имеет единственное решение, причем класса $C^\infty(U(x_0))$. Отсюда, в частности, следует, что гладкие ( даже обобщенные ) решения типа ударной волны для системы (1.2)-- (1.4) фактически являются решениями класса $C^\infty$.

Из локальной теоремы единственности следует также, что для любого $x\in\mathbb{R}$ решения типа ударной волны для системы (1.2) - (1.4) на интервалах вида $(-\infty, x)$ ( соответственно, $(x,+\infty)$ ) не могут совпадать с постоянным решением $\rho=\rho_1$, $P=P_1$, $u=u_1$ ( соответственно, $\rho=\rho_2$, $P=P_2$, $u=u_2$ )

Заметим еще, что производные $\rho_x$, $P_x$, $u_x$ решения типа ударной волны для систем (1.2) - (1.4) и (2.8) - (2.10) стремятся к нулю при $x\to+\infty$, поскольку $\Delta I\to 0$, $\Delta\Sigma\to 0$, $\Delta W\to 0$ при $x\to+\infty$ в силу граничного условия В.



## § 3. Об одном тождестве на решениях типа ударной волны

Замечая, что

$$TS_x=\frac{\gamma}{(\gamma-1)}RT_x-\frac{P_x}{\rho},$$

из (2.4) и (2.5) находим

$$\Delta W-u\Delta\Sigma-\varkappa T_x=\tau T\rho u^2 S_x\ .\tag{3.1}$$

С другой стороны, интегрируя (1.6) по промежутку $(-\infty,x]$ с учетом граничных условий А - В, из которых, в частности, следует, что $S(x)\to 0$, $S'(x)\to 0$ при $x\to-\infty$, получим

$$\rho uS=\tau(\rho u^2S)_x+\tau SP_x+\varkappa\frac{T_x}{T}+\int_{-\infty}^{x}\Big[\frac{\Phi_{кг}}{T}+\varkappa\Big(\frac{T_x}{T}\Big)^2\Big]dx.\tag{3.2}$$

Принимая во внимание (2.1), преобразуем (3.2) к виду

$$\rho_1u_1S=\tau\rho u^2S_x+\varkappa\frac{T_x}{T}+\int_{-\infty}^{x}\Big[\frac{\Phi_{кг}}{T}+\varkappa\Big(\frac{T_x}{T}\Big)^2\Big]dx.\tag{3.3}$$

Из (3.1) и (3.3) выводим следующий результат.

<u>Теорема 1</u>. На решениях типа ударной волны системы (1.2) - (1.4) выполняется тождество

$$\rho_1u_1TS-\Delta W+u\Delta\Sigma=T\int_{-\infty}^{x}\Big[\frac{\Phi_{кг}}{T}+\varkappa\Big(\frac{T_x}{T}\Big)^2\Big]dx.\tag{3.4}$$

Отметим, что на навье-стоксовской ударной волне имеет место аналог

$$\rho_1u_1TS-\Delta W+u\Delta\Sigma=T\int_{-\infty}^{x}\Big[\frac{\Phi_{HC}}{T}+\varkappa\Big(\frac{T_x}{T}\Big)^2\Big]dx\tag{3.5}$$

тождества (3.4), где $\Phi_{HC}=\frac{4}{3}p\tau(u_x)^2$ - диссипативная функция.

Следствием (3.4) является неравенство

$$\rho_1u_1TS-\Delta W+u\Delta\Sigma\geqslant 0,\tag{3.6}$$

связывающее макропараметры на ударной волне. Очевидно, что (3.6) имеет место и в навье-стоксовской модели.

Вводя приращения $\Delta\rho=\rho-\rho_1$, $\Delta P=P-P_1$, $\Delta u=u-u_1$, запишем (3.6) в виде квадратичного неравенства относительно

$\Delta u$ , из которого получим оценки для $\Delta u$ через остальные величины:

$$\Delta u \leqslant -\frac{\Delta P}{\rho_1 u_1} - \Big[\Big(\frac{\Delta P}{\rho_1 u_1}\Big)^2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1}R\Delta T - \frac{2\Delta P}{\rho_1} - 2c_V T_1\Big(1+\frac{\Delta T}{T_1}\Big)\ln\Big(1+\frac{\Delta T}{T_1}\Big)^{\gamma}\Big(1+\frac{\Delta P}{P_1}\Big)^{1-\gamma}\Big]^{1/2} \qquad (3.7)$$

либо

$$\Delta u \geqslant -\frac{\Delta P}{\rho_1 u_1} + \Big[\Big(\frac{\Delta P}{\rho_1 u_1}\Big)^2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1}R\Delta T - \frac{2\Delta P}{\rho_1} - 2c_V T_1\Big(1+\frac{\Delta T}{T_1}\Big)\ln\Big(1+\frac{\Delta T}{T_1}\Big)^{\gamma}\Big(1+\frac{\Delta P}{P_1}\Big)^{1-\gamma}\Big]^{1/2}. \qquad (3.8)$$

В случае неположительности подкоренного выражения неравенство (3.6) не влечет ограничений на $\Delta u$.

## § 4. Возрастание энтропии на ударной волне, обусловленной только вязкостью

Как известно [II], в навье-стоксовской модели энтропия на ударной волне не является, вообще говоря, монотонной, хотя ее полное приращение $\Delta S = c_V \ln(P_2\rho_1^{\gamma}/\rho_2^{\gamma}P_1)$ положительно и не зависит от механизма диссипации. Предельный случай малой теплопроводности ( $Pr >> 1$ ) для реальных газов не является типичным, но может возникнуть, например, в сильно замагниченной плазме. Для уравнений Навье-Стокса он рассматривался, например, в [3, I2] , где показано, что при $\varkappa = 0$ решение выражается в квадратурах, а энтропия на ударной волне является строго монотонной, причем $S'(x) > 0$.

Докажем возрастание энтропии на ударной волне для системы (I,2) - (I.4) в этом же предельном случае $\varkappa = 0$. Начнем с проверки следующего утверждения.

<u>Теорема 2</u>. При $\varkappa = 0$ на любом ударно-волновом решении системы (I.2) - (I.4) для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняются неравенства

$$0 < S(x) < \Delta S. \qquad (4.I)$$



<u>Доказательство</u>. Покажем сначала, что $0 \leqslant S(x) \leqslant \Delta S$ для любого $x \in \mathbb{R}$ . Допустим, что существует точка $x_0 \in \mathbb{R}$, в которой $S(x_0) < 0$. На любом отрезке вида $\Omega = [x_0 - h, x_0 + h]$, $h > 0$, функция $S(x)$, будучи непрерывной, достигает в силу теоремы Вейерштрасса свои экстремальные на $\Omega$ значения. Так как $S(x) \to 0$ при $x \to -\infty$ и $S(x) \to \Delta S$ при $x \to +\infty$, то величину $h$ можно фиксировать так, чтобы $|S(x)| < 0{,}5|S(x_0)|$ при $x \leqslant x_0 - h$ и $|S(x) - \Delta S| < 0{,}5|\Delta S|$ при $x \geqslant x_0 + h$. Ясно, что $\min_{x\in\Omega} S(x) \leqslant S(x_0)$ и не может достигаться на концах отрезка $\Omega$. Таким образом, на интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ существует точка $x_1$ , в которой $\min_{x\in\Omega} S(x) = S(x_1) < 0$ и $S'(x_1) = 0$ в силу теоремы Ферма. Применим теорему об энтропии (3.3) в случае $\varkappa = 0$ :

$$\rho_1 u_1 S(x) = \tau \rho u^2 S'(x) + \int_{-\infty}^{x} T^{-1}\Phi_{\kappa r}\, dx . \qquad (4.2)$$

При $x = x_1$ будем иметь

$$\rho_1 u_1 S(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} T^{-1}\Phi_{\kappa r}\, dx ,$$

то есть $S(x_1) \geqslant 0$ , вопреки выбору точки $x_1$ - противоречие. Таким образом, неравенство $S(x) \geqslant 0$ на $\mathbb{R}$ доказано.

Переходя к доказательству неравенства $S(x) \leqslant \Delta S$ для $x \in \mathbb{R}$, воспользуемся тем, что $S'(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Этот факт следует из замечания, сделанного в конце § 2. Допуская теперь, что существует точка $x_0 \in \mathbb{R}$ , в которой $S(x_0) > \Delta S$ , выберем отрезок $\Omega$ таким образом, чтобы $|S(x) - \Delta S| < 0.5(S(x_0) - \Delta S)$ при $x \geqslant x_0 + h$ и $|S(x)| < 0{,}5\Delta S$ при $x \leqslant x_0 - h$ . В силу прежних соображений существует точка $x_2 \in (x_0 - h, x_0 + h)$, в которой $\max_{x\in\Omega} S(x) = S(x_2) > \Delta S$ и $S'(x_2) = 0$. Применяя (4.2) при $x = x_2$ , найдем

$$\rho_1 u_1 S(x_2) = \int_{-\infty}^{x_2} T^{-1}\Phi_{\kappa r}\, dx$$

С другой стороны, переходя в (4.2) к пределу при $x \to +\infty$ , получим

$$\rho_1 u_1 \Delta S = \int_{-\infty}^{+\infty} T^{-1}\Phi_{\kappa r}\, dx .$$

Так как $\int\limits_{-\infty}^{x_2} T^{-1}\Phi_{\kappa\Gamma}\,dx \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} T^{-1}\Phi_{\kappa\Gamma}\,dx$, заключаем, что $S(x_2) \leq \Delta S$, вопреки выбору точки $x_2$. Таким образом, на ударной волне имеем $0 \leq S(x) \leq \Delta S$.

Покажем теперь, что $S(x) \neq 0$ для $x \in \mathbb{R}$. Если существует $x_0 \in \mathbb{R}$, в которой $S(x_0)=0$, то $x_0$ – точка гладкого локального минимума функции $S(x)$ и поэтому $S'(x_0)=0$. Из (4.2) при $x=x_0$ находим

$$\rho_1 u_1 S(x_0) = \int\limits_{-\infty}^{x_0} T^{-1}\Phi_{\kappa\Gamma}\,dx = 0$$

В силу неотрицательности диссипативной функции $\Phi_{\kappa\Gamma}(x)$ должны иметь $\Phi_{\kappa\Gamma}(x)=0$ на $(-\infty, x_0)$. Учитывая вид $\Phi_{\kappa\Gamma}$, заключаем, что всюду на этом интервале $u_x=0$, $P_x=0$, $\rho_x=0$ и и поэтому $\rho(x)=\rho_1$, $P(x)=P_1$, $u(x)=u_1$, что противоречит замечанию, сделанному в конце § 2. Аналогично доказывается, что $S(x) \neq \Delta S$. Теорема 2 доказана.

<u>Теорема 3</u>. В условиях теоремы 2 на ударной волне производная $S'(x) \geq 0$ и $S(x)$ возрастает.

<u>Доказательство</u>. Пусть существует точка $x_0 \in \mathbb{R}$, в которой $S'(x_0)<0$. В силу теоремы 2 имеем $0<S(x_0)<\Delta S$. Рассмотрим максимальную замкнутую окрестность $[x_1, x_2]$ точки $x_0$, в которой $S(x)$ убывает. Такая окрестность существует, так как в противном случае $S(x)$ убывала бы либо на промежутке $(-\infty, x_0)$, либо на промежутке $(x_0, +\infty)$. В первом случае имели бы $S(-\infty) > S(x_0) > 0$, а во втором, соответственно, $S(+\infty)<S(x_0)<\Delta S$, что противоречит свойствам функции $S(x)$. Концы отрезка $[x_1, x_2]$ являются точками экстремума для $S(x)$, причем $S(x_1)>S(x_2)$ и $S'(x_1)=S'(x_2)=0$. С другой стороны, из (4.2) следует, что

$$\rho_1 u_1 [S(x_2)-S(x_1)] = \int\limits_{x_1}^{x_2} T^{-1}\Phi_{\kappa\Gamma}\,dx$$

то есть $S(x_2) \geq S(x_1)$ – противоречие.

Итак, доказано, что $S'(x) \geq 0$ на $\mathbb{R}$ и, следовательно, $S(x)$ не убывает. Предположим, что существуют такие точки $x_1$, $x_2 \in \mathbb{R}$, что $x_2 > x_1$ и $S(x_2)=S(x_1)$. Тогда $S(x)=S(x_1)$ и $S'(x)=0$ на отрезке $[x_1, x_2]$. Из энтропийной теоремы следует, что

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} T^{-1}\Phi_{\kappa\Gamma}\,dx = 0 \quad ,$$



то есть, в силу выше сказанного, диссипативная функция $\Phi_{\kappa\Gamma}(x)$ тождественно равна нулю на $[x_1, x_2]$ и $\rho(x)=\rho_0=const$, $P(x)=P_0=const$, $u(x)=u_0=const$. Это решение единственным образом продолжается до постоянного решения системы (2.8) – (2.10) на $\mathbb{R}$ и поэтому не может совпадать с решением типа ударной волны в силу той же локальной теоремы единственности решения задачи Коши. Таким образом $S(x)$ возрастает на $\mathbb{R}$ и если $S'(x)$ и обращается в нуль, то лишь в изолированных точках.

<u>Следствие</u>. На ударной волне справедливы неравенства

$$\gamma\frac{\rho_x}{\rho} \leq \frac{P_x}{P} \leq \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{T_x}{T} \qquad (4.3)$$

Утверждение выводится из неравенства $S'(x) \geq 0$ для $x \in \mathbb{R}$. Оценки (4.3) характеризуют условия взаимной монотонности ( немонотонности ) одних макропараметров относительно других. Если, например, на некотором промежутке $(a, b)$ плотность $\rho(x)$ не убывает, то таким же будет поведение на $(a, b)$ функций $P(x)$ и $T(x)$.

## § 5. Взаимные оценки изменений макропараметров на ударной волне в случае $\varkappa=0$.

Следствием теоремы 2 являются двухсторонние оценки изменений $\Delta\rho$ и $\Delta T$ относительно $\Delta P$:

$$\rho_1\left[e^{-\frac{\Delta S}{c_v\gamma}}\left(1+\frac{\Delta P}{P_1}\right)^{1/\gamma}-1\right] < \Delta\rho < \rho_1\left[\left(1+\frac{\Delta P}{P_1}\right)^{1/\gamma}-1\right], \qquad (5.1)$$

$$T_1\left[\left(1+\frac{\Delta P}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right] < \Delta T < T_1\left[e^{\frac{\Delta S}{c_v\gamma}}\left(1+\frac{\Delta P}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right] \qquad (5.2)$$

Чтобы получить аналогичные двухсторонние оценки для $\Delta u$, воспользуемся неравенством

$$\Delta W - u\Delta\Sigma \geq 0 \quad , \qquad (5.3)$$

которое является следствием (3.1) и теоремы 3. Уместно заметить, что на навье-стоксовской ударной волне в случае $\varkappa=0$ вместо (5.3) выполняется тождество $\Delta W - u\Delta\Sigma = 0$.

Т.Г. Елизарова, Ю.В. Шеретов " О свойствах решений типа ударной волны для квазигазодинамических уравнений".
Редактор С.В. Цынков. Корректор Е.В. Шильников.

Подписано в печать 05.12.90г. Заказ № 439.
Формат бумаги 60Х90 1/16. Тираж 175 экз.
Объём 0,7 уч.-изд.л. Цена 10 коп.

055 (02)2

Отпечатано на ротапринтах в Институте прикладной математики АН СССР
Москва, Миусская пл. 4.



Ссылки на издание рекомендуется делать по следующей форме: и.о., фамилия, название, препринт Ин. прикл. матем. им. М.В. Келдыша АН СССР, год, №.

Распространение: препринты института продаются в магазинах Академкниги г. Москвы, а также распространяются через Библиотеку АН СССР в порядке обмена.

Адрес: СССР, 125047, Москва-47, Миусская пл. 4, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР, ОНТИ.



The references should be typed by the following form: initials, name, title, preprint, Inst.Appl.Mathem., the USSR Academy of Sciences, year, N(number).

Distribution. The preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences are sold in the bookstores "Academkniga", Moscow and are distributed by the USSR Academy of Sciences Library as an exchange.

Adress: USSR, I25047, Moscow A-47, Miusskaya Sq.4, the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Ac.of Sc., the USSR, Information Bureau.