Цена 10 коп.

Т.Г. Елизарова, Ю.В. Шеретов " О свойствах решений типа ударной волны для уравнений газовой динамики с учётом самодиффузии".
Редактор И.А. Граур. Корректор С.В. Цынков.

Подписано в печать 11.12.91г. Заказ № 84.
Формат бумаги 60Х90 1/16. Тираж 100 экз.
Объём 0,7 уч.-изд.л. Цена 10 коп.

055 (02)2

Отпечатано на ротапринтах в Институте прикладной математики АН СССР
Москва, Миусская пл. 4.

ВСЕСОЮЗНЫЙ ЦЕНТР МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
Академии наук СССР

Т.Г. Елизарова, Ю.В. Шеретов

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ТИПА УДАРНОЙ ВОЛНЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С УЧЁТОМ САМОДИФФУЗИИ

Препринт № 45 за 1991г.

Москва

ВСЕСОЮЗНЫЙ ЦЕНТР МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ АН СССР

Т.Г. Елизарова, Ю.В. Шеретов

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ТИПА УДАРНОЙ ВОЛНЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С УЧЕТОМ САМОДИФФУЗИИ

Москва - 1991

А Н Н О Т А Ц И Я

Для системы уравнений газовой динамики с учетом самодиффузии изучены некоторые свойства решений типа неподвижной ударной волны. Получены интегральные соотношения и неравенства для макропараметров газа. Подобные результаты известны для ударно-волновых решений системы Навье-Стокса и недавно установлены также для квазигазодинамических уравнений.

ВВЕДЕНИЕ

В работах [I - I5] из различных соображений были выведены и исследовались системы уравнений гидродинамического типа, отличающиеся от классических уравнений Эйлера или Навье-Стокса дополнительными членами со вторыми производными по пространственным переменным. Указанные системы применялись для построения разностных схем либо трактовались как самостоятельные математические модели в гидродинамике, полезные при расчетах отдельных типов течений и в вопросах численного интегрирования.

В [II - I3] для двух типов таких систем - квазигазодинамической [4] и обобщенной квазигазодинамической [I0] - получены аналоги некоторых результатов для уравнений Навье-Стокса. В частности, доказаны теоремы о балансе энтропии и о свойствах решений типа ударной волны.

Параллельно Ю.Л. Климонтович рассмотрел в [7 - 9] уравнения гидродинамики с учетом самодиффузии, доказал для них теорему о балансе энтропии, изучил влияние самодиффузии на распространение звука в газе, формы профилей слабой ударной волны и спектры гидродинамических флуктуаций.

В настоящей работе показано, что все основные результаты препринта [I2] остаются в силе и для уравнений газовой динамики с учетом самодиффузии. В частности, установлены два общих с уравнениями Навье-Стокса и квазигазодинамическими уравнениями неравенства на решениях типа неподвижной ударной волны. Для скачка уплотнения, обусловленного только самодиффузией, доказаны строгое возрастание энтропии и предложение о влиянии выбора коэффициента самодиффузии на существование решений.

§ I. Система уравнений газовой динамики с учетом самодиффузии

Следуя работам [7 - 9] , осредним с сумматорными инвариантами I , $\vec{v}$, $\vec{v}^2/2$ кинетическое уравнение вида

$$f_t + (\vec{v}\vec{\nabla})f = div\,\mathcal{D}\vec{\nabla}f + I(f,f), \qquad (I.I)$$

где $f=f(\vec{x},\vec{v},t)$ – одночастичная функция распределения, $I(f,f)$ – нелинейный интеграл столкновений Больцмана, $\mathcal{D}$ – зависящий от макропараметров газа коэффициент самодиффузии. При этом возникающие интегралы будем вычислять в нулевом приближении, то есть считая, что функция распределения совпадает с локально-максвелловской. В результате получим систему уравнений газовой динамики с учетом самодиффузии [7]. Добавив еще в левую часть уравнения энергии член с теплопроводностью, будем иметь

$$\rho_t + \operatorname{div}\rho\vec{u} = \operatorname{div}\mathcal{D}\vec{\nabla}\rho, \tag{I.2}$$

$$(\rho\vec{u})_t + \operatorname{div}\rho\vec{u}\otimes\vec{u} + \vec{\nabla}p = \operatorname{div}\mathcal{D}(\vec{\nabla}\otimes\rho\vec{u}), \tag{I.3}$$

$$E_t + \operatorname{div}(E+p)\vec{u} - \operatorname{div}\varkappa\vec{\nabla}T = \operatorname{div}\mathcal{D}\vec{\nabla}E. \tag{I.4}$$

Здесь ρ – плотность, T – температура, $p=\rho RT$ – давление, $\vec{u}$ – скорость, $E=\rho(\vec{u}^2/2+\varepsilon)$ – полная энергия, $\varepsilon = p/[\rho(\gamma-1)]$ – внутренняя энергия, $\varkappa$ – коэффициент теплопроводности.

Левые части (I.2) – (I.4) совпадают с соответствующими частями классических уравнений Эйлера с теплопроводностью, а правые ответственны за самодиффузию.

Уравнение баланса энтропии, полученное в [7], может быть представлено в виде

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} = -\operatorname{div}\rho\vec{u}S + \operatorname{div}\varkappa\frac{\vec{\nabla}T}{T} + \operatorname{div}\mathcal{D}\vec{\nabla}(\rho S) + \frac{\Phi^*}{T} + \varkappa\left(\frac{\vec{\nabla}T}{T}\right)^2, \tag{I.5}$$

где

$$\Phi^* = p\mathcal{D}\left(\frac{\vec{\nabla}\rho}{\rho}\right)^2 + \mathcal{D}\rho(\vec{\nabla}\otimes\vec{u}):(\vec{\nabla}\otimes\vec{u}) + \mathcal{D}\rho\varepsilon\left(\frac{\vec{\nabla}T}{T}\right)^2$$

– неотрицательная диссипативная функция системы уравнений газовой динамики с учетом самодиффузии, $S=c_v \ln p/\rho^\gamma + S_0$ – энтропия, $c_v = 3R/2$ – теплоемкость при постоянном объеме.

Специализация (I.5) на одномерный стационарный случай дает

$$(\rho u S)_x = [\mathcal{D}(\rho S)_x]_x + \left(\varkappa\frac{T_x}{T}\right)_x + \frac{\Phi^*}{T} + \varkappa\left(\frac{T_x}{T}\right)^2,$$

$$\Phi^* = p\mathcal{D}\left(\frac{\rho_x}{\rho}\right)^2 + \mathcal{D}\rho(u_x)^2 + \mathcal{D}\rho\varepsilon\left(\frac{T_x}{T}\right)^2. \tag{I.6}$$

Приведенный результат существенно используется в §§ 4 – 5.

§ 2. Постановка задачи об ударной волне

Пусть $\rho_1 > 0$, $p_1 > 0$, $u_1 > (\gamma p_1/\rho_1)^{1/2}$ – значения макропараметров одноатомного идеального политропного газа ($\gamma = 5/3$) перед неподвижной ударной волной,

$$\rho_2 = \rho_1\frac{M_1^2(\gamma+1)}{2+(\gamma-1)M_1^2}, \quad p_2 = p_1\frac{2\gamma M_1^2-\gamma+1}{(\gamma+1)},$$

$$u_2 = \rho_1 u_1/\rho_2,$$

соответственно, их значения за ударной волной, определяемые из условий Гюгонио.

В настоящем и следующих параграфах изучаются свойства решений $\rho=\rho(x)>0$, $u=u(x)>0$, $p=p(x)>0$ системы уравнений газодинамики с учетом самодиффузии (I.2) – (I.4) в одномерном случае

$$(\rho u)_x = (\mathcal{D}\rho_x)_x, \tag{2.1}$$

$$(\rho u^2+p)_x = [\mathcal{D}(\rho u)_x]_x, \tag{2.2}$$

$$[(E+p)u]_x = (\mathcal{D}E_x)_x + (\varkappa T_x)_x, \tag{2.3}$$

удовлетворяющих граничным условиям

$$\rho(x)\to\rho_1,\ p(x)\to p_1,\ u(x)\to u_1 \quad \text{при } x\to-\infty \tag{2.4а}$$

$$\rho(x)\to\rho_2,\ p(x)\to p_2,\ u(x)\to u_2 \quad \text{при } x\to+\infty \tag{2.4б}$$

$$\rho'(x)\to 0,\ p'(x)\to 0,\ u'(x)\to 0 \quad \text{при } x\to-\infty \tag{2.4в}$$

которые будем называть решениями типа ударной волны.

Принимаемое в работе допущение о существовании таких решений мотивируется присутствием в системе (2.I) – (2.3) диссипативного механизма, включающего самодиффузию и теплопроводность. Чтобы исключить трансляции по оси абсцисс, нормируем $S(x)$ условием $S(0) = S_0 = (S_1+S_2)/2$.

§ 3. Приведение уравнений газовой динамики с учетом самодиффузии к системе ОДУ, разрешенной относительно производных

Приводимые в §§ 3 – 5 результаты аналогичны полученным в [I2]. Интегрируя систему (2.I) – (2.3) по промежутку $(-\infty, x]$, вводя полную энтальпию $H=(E+P)/\rho$ и обозначения $\Delta I=\rho u-\rho_1 u_1$, $\Delta\Sigma=\rho_1 u_1(u-u_1)+P-P_1$, $\Delta W=\rho_1 u_1(H-H_1)$, получим

$$\rho_x=\Delta I/\mathcal{D}, \tag{3.I}$$

$$P_x=\frac{\Delta W-u\Delta\Sigma+\frac{P}{\rho}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}+\frac{\varkappa}{\mathcal{D}\rho R}\right)\Delta I}{\mathcal{D}\left[1/(\gamma-1)+\varkappa/(\mathcal{D}\rho R)\right]}, \tag{3.2}$$

$$u_x=\Delta\Sigma/(\rho\mathcal{D}). \tag{3.3}$$

Если функции $\mathcal{D}$ и $\varkappa$ положительны и принадлежат классу C^∞ в положительном квадранте $\mathbb{R}^2_+$ переменных (ρ, P), то правые части системы ОДУ (3.I) – (3.3) бесконечно дифференцируемы в положительном октанте $\mathbb{R}^3_+$ переменных (ρ, P, u) и, согласно классической теореме Пикара–Линделефа о локально-единственной разрешимости задачи Коши, для любой точки $x_0\in\mathbb{R}$ существует окрестность $U(x_0)$, в которой задача Коши для (3.I) – (3.3) с начальными условиями $\rho(x_0)=\rho_0>0$, $P(x_0)=P_0>0$, $u(x_0)=u_0>0$, имеет единственное решение, причем класса $C^\infty[U(x_0)]$. Отсюда, в частности, следует, что даже обобщенные решения типа ударной волны класса $C^1(\mathbb{R})$ для системы (2.I) – (2.3) фактически являются решениями класса $C^\infty(\mathbb{R})$.

Из локальной теоремы единственности следует также, что фазовые траектории динамической системы (3.I) – (3.3) либо не пересекаются, либо совпадают.

Очевидно, что рассматриваемая система в положительном октанте $\mathbb{R}^3_+$ имеет только две стационарные точки (ρ_1, P_1, u_1) и (ρ_2, P_2, u_2), которые связаны условиями Гюгонио.

Заметим еще, что решения типа ударной волны систем (2.I) – (2.3) и (3.I) – (3.3) стремятся к нулю при $x\to+\infty$, поскольку $\Delta I\to 0$, $\Delta\Sigma\to 0$, $\Delta W\to 0$ при $x\to+\infty$ в силу граничного условия (2.4б).

§ 4. Об одном тождестве на решениях типа ударной волны

Замечая, что

$$TS_x=\frac{\gamma}{\gamma-1}RT_x-\frac{P_x}{\rho},$$

для проинтегрированной системы (2.I) – (2.3), по аналогии с [I2] находим

$$\Delta W-u\Delta\Sigma-\varkappa T_x=\mathcal{D}\rho TS_x. \tag{4.I}$$

С другой стороны, интегрируя (I.6) по промежутку $(-\infty, x]$ с учетом граничных условий (2.4), получим

$$\rho u S=\mathcal{D}(\rho S)_x+\varkappa\frac{T_x}{T}+\int_{-\infty}^{x}\left[\frac{\Phi^*}{T}+\varkappa\left(\frac{T_x}{T}\right)^2\right]dx. \tag{4.2}$$

Принимая во внимание (3.I), преобразуем (4.2) к виду

$$\rho_1 u_1 S=\mathcal{D}\rho S_x+\varkappa\frac{T_x}{T}+\int_{-\infty}^{x}\left[\frac{\Phi^*}{T}+\varkappa\left(\frac{T_x}{T}\right)^2\right]dx. \tag{4.3}$$

Из (4.I) и (4.3) выводим следующий результат.

Теорема I. На любом решении типа ударной волны системы (2.I) – (2.3) выполняется тождество

$$\rho_1 u_1 TS-\Delta W+u\Delta\Sigma=T\int_{-\infty}^{x}\left[\frac{\Phi^*}{T}+\varkappa\left(\frac{T_x}{T}\right)^2\right]dx. \tag{4.4}$$

Формальная замена в (4.4) Φ^* на диссипативную функцию для уравнений Навье–Стокса $\Phi_{НС}$ (квазигазодинамическую диссипативную функцию $\Phi_{КГ}$) приводит к соответствующему навье–

стоксовскому результату (результату для квазигазодинамических уравнений [I2]).

Следствием (4.4) являются неравенства

$$\rho_1 u_1 T S - \Delta W + u \Delta \Sigma \geqslant 0, \tag{4.5}$$

$$\rho_1 u_1 S_x + \left[\frac{u \Delta \Sigma - \Delta W}{T}\right]'_x \geqslant 0. \tag{4.6}$$

которые справедливы как для уравнений Навье-Стокса, так и для квазигазодинамических уравнений.

Следствием (4.5) являются двухсторонние оценки изменений одних макропараметров относительно других, которые приведены в [I2].

§ 5. Возрастание энтропии на ударной волне, обусловленной только самодиффузией

Как известно, в навье-стоксовской модели энтропия на ударной волне не является, вообще говоря, монотонной функцией, хотя ее полное приращение положительно и не зависит от механизма диссипации. Для слабых скачков уплотнения навье-стоксовский профиль хорошо согласуется с экспериментальным, а также с профилем, полученным с помощью нелинейного уравнения Больцмана. В предельном случае, отвечающем бесконечно малой теплопроводности, энтропия на навье-стоксовской ударной волне возрастает, причем с положительной производной. Подобный факт установлен в [I2] и для квазигазодинамических уравнений, но без утверждения о положительности производной.

Используя схему рассуждений из [I2] с некоторым дополнением, докажем истинность предложения о возрастании энтропии и положительности ее производной на решениях типа ударной волны для системы (2.I) - (2.3) при $\mathscr{X} = 0$.

<u>Теорема 2</u>. При $\mathscr{X} = 0$ на любом ударно-волновом решении системы (2.I) - (2.3) для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняются неравенства

$$0 < S(x) < \Delta S \tag{5.I}$$

где $S = c_v \ln(p \rho_1^\gamma / \rho^\gamma p_1)$ - энтропия, $\Delta S = c_v \ln(p_2 \rho_1^\gamma / \rho_2^\gamma p_1)$ - ее полное приращение на ударной волне.

Доказательство воспроизводит соответствующие рассуждения из [I2] с надлежащей заменой $\Phi_{кг}$ на Φ^*.

<u>Теорема 3</u>. В условиях теоремы 2 энтропия S возрастает, причем $S'(x) > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

<u>Доказательство</u>. Выпишем тождество (4.3) в случае $\mathscr{X} = 0$:

$$\rho_1 u_1 S(x) = \mathscr{D} \rho S'(x) + \int_{-\infty}^{x} T^{-1} \Phi^* dx \tag{5.2}$$

Пусть существует точка $x_0 \in \mathbb{R}$, в которой $S'(x_0) < 0$. В силу теоремы 2 имеем $0 < S(x_0) < \Delta S$. Рассмотрим максимальную замкнутую окрестность $[x_1, x_2]$ точки x_0, в которой $S(x)$ убывает. Такая окрестность существует, так как в противном случае $S(x)$ убывала бы либо на промежутке $(-\infty, x_0)$, либо на промежутке $(x_0, +\infty)$. В первом случае имели бы $S(-\infty) > S(x_0) > 0$, а во втором, соответственно, $S(+\infty) < S(x_0) < \Delta S$, что противоречит свойствам функции $S(x)$. Концы отрезка $[x_1, x_2]$ являются точками экстремума для $S(x)$, причем $S(x_1) > S(x_2)$ и $S'(x_1) = S'(x_2) = 0$. С другой стороны, из (5.2) следует, что

$$\rho_1 u_1 [S(x_2) - S(x_1)] = \int_{x_1}^{x_2} T^{-1} \Phi^* dx$$

то есть $S(x_2) \geqslant S(x_1)$ - противоречие. Следовательно, $S'(x) \geqslant 0$ и $S(x)$ не убывает.

Предположим, что существует такое значение $x_0 \in \mathbb{R}$, что $S'(x_0) = 0$. Тогда x_0 является точкой гладкого локального минимума функции $S'(x)$ и поэтому $S''(x_0) = 0$. Дифференцируя тождество (5.2) по переменной x и полагая затем $x = x_0$, получим $\Phi^*(x_0) = 0$. Отсюда следует, что решение типа ударной волны проходит через стационарную точку, вопреки следствию из локальной теоремы единственности, приведенному в § 3. Таким образом, $S'(x) > 0$ и $S(x)$ возрастает на $\mathbb{R}$.

Утверждение о положительности производной от энтропии верно и для квазигазодинамических уравнений в случае бесконечно малой теплопроводности, что усиливает результат работы [I2]. Доказательство аналогично приведенному выше.

§ 6. О влиянии выбора коэффициента самодиффузии на существование решений типа ударной волны в случае $\varkappa = 0$.

При $\varkappa = 0$ с учетом (4.I) перейдем к эквивалентной (3.I)-(3.3) системе вида

$$\rho_x = \Delta I/\mathcal{D}, \tag{6.I}$$

$$u_x = \Delta\Sigma/(\rho\mathcal{D}), \tag{6.2}$$

$$S_x = (\Delta W - u\Delta\Sigma)/(\mathcal{D}\rho T). \tag{6.3}$$

Выбирая S в качестве независимой переменной, заключаем, что всякое решение типа ударной волны (6.I) - (6.3) порождает решение $\rho=\rho(S)$, $u=u(S)$ системы

$$\frac{d\rho}{dS} = (\rho T\Delta I)/(\Delta W - u\Delta\Sigma), \tag{6.4}$$

$$\frac{du}{dS} = (T\Delta\Sigma)/(\Delta W - u\Delta\Sigma) \tag{6.5}$$

на интервале (0 , ΔS) с граничными условиями

$$\rho(+0)=\rho_1, \qquad \rho(\Delta S)=\rho_2,$$
$$u(+0)=u_1, \qquad u(\Delta S)=u_2. \tag{6.6}$$

Это решение, в свою очередь, порождает серию решений системы (6.I) - (6.3) , отвечающих различным выборам функции $\mathcal{D}=\mathcal{D}(\rho,p)>0$.

Теорема 4. Пусть решение типа ударной волны системы (6.I)-(6.3) для $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 = const > 0$ существует. Тогда оно существует для любой положительной бесконечно дифференцируемой в $\mathbb{R}^2_+$ функции $\mathcal{D}=\mathcal{D}(\rho,p)>0$.

Доказательство. Если решение $\rho=\rho_*(x)$, $u=u_*(x)$, $S=S_*(x)$ при $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$ существует, то согласно теореме 3 энтропия $S=S_*(x)$ возрастает и, следовательно, существует

обратная функция $x=x_*(S)$. Функции $\rho_{**}(S)=\rho_*(x_*(S))$, $u_{**}(S)=u_*(x_*(S))$, удовлетворяют системе уравнений (6.4) - (6.5), явно не содержащей коэффициента $\mathcal{D}$, с граничными условиями (6.6). Зададим произвольную положительную функцию $\mathcal{D}\in\mathbb{R}^2_+$. На решении $\rho=\rho_{**}(S)$, $u=u_{**}(S)$ определим

$$x(S)=\int_{S_0}^{S}[(\mathcal{D}\rho T)/(\Delta W-u\Delta\Sigma)]\,d\tilde{s}.$$

Очевидно, $x(S)$ монотонно возрастает, причем с положительной производной на интервале (0 , ΔS) и $\lim_{S\to+0} x(S)=-\infty$, $\lim_{S\to\Delta S} x(S)=+\infty$.

Определяя $S(x)$ как обратную функцию к $x(S)$, получим, что $\rho=\rho_{**}(S(x))$, $u=u_{**}(S(x))$, $S=S(x)$ образуют решение (6.I) - (6.3).

Подобное теореме 4 предложение имеет место и для квазигазодинамических уравнений.

Теорема 5. Пусть решение типа ударной волны системы (I.2)-(I.4) из [I2] при $\varkappa = 0$ существует для $\tau = \tau_0 = const>0$. Тогда оно существует для любой положительной бесконечно дифференцируемой в $\mathbb{R}^2_+$ функции $\tau = \tau(\rho,p)>0$.

Выписанные в [I2] неравенства (4.3), (5.I) - (5.4) остаются в силе и для решений типа ударной волны системы (2.I) - (2.4), однако в оценках (4.3), (5.3) и (5.4) неравенства являются строгими.

В заключение отметим, что аналогичные изложенным в данной работе результаты могут быть получены для систем, возникающих из (I.2) - (I.4) при добавлении навье-стоксовских или квазигазодинамических вязких слагаемых.

Список литературы

I. Слезкин Н.А. О дифференциальных уравнениях движения газа // Докл. АН СССР. I95I. Т. 77. № 2. С. 205-208.
2. Валандер С.В. Уравнения движения вязкого газа // Докл. АН СССР. I95I. Т.78, № I. С. 25-27.
3. Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н. Использование кинетических алгоритмов для расчета газодинамических течений: Препринт № I65. М.: ИПМатем. им. М.В.Келдыша АН СССР, I984. 23 с.

4. Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н. Использование кинетических моделей для расчета газодинамических течений // Матем. моделирование. М.: Наука, 1986. С. 261-278.
5. Алексеев Б.В. Гидродинамические уравнения в кинетической теории реагирующих газов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.1987. Т. 27, № 5. С. 730-740.
6. Алексеев Б.В., Устюгов С.А. Численное решение обобщенных уравнений газовой динамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т.28, № 2. С. 286-289.
7. Климонтович Ю.Л. К кинетическому обоснованию уравнений гидродинамики с учетом самодиффузии // Письма в ж. техн. физ. 1990. Т.16. Вып. 9. С. 81-83.
8. Климонтович Ю.Л. Влияние самодиффузии на спектры гидродинамических флуктуаций // Письма в ж. техн. физ. 1990. Т. 16. Вып. 9. С. 77-80.
9. Климонтович Ю.Л. Кинетическое описание гидродинамического движения. Баланс энтропии и гидродинамические флуктуации с учетом самодиффузии // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 51. Вып. 11. С. 569-571.
10. Шеретов Ю.В. Уравнения Навье-Стокса как асимптотика обобщенной квазигазодинамической системы: Препринт № 46. М.: ИПМатем. им. М.В.Келдыша АН СССР, 1990. 12 с.
11. Шеретов Ю.В. Теорема об энтропии для квазигазодинамических уравнений: Препринт № 131. М.: ИПМатем. им. М.В.Келдыша АН СССР, 1990. 21 с.
12. Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В. О свойствах решений типа ударной волны для квазигазодинамических уравнений: Препринт № 156. М.: ИПМатем. им. М.В.Келдыша АН СССР, 1990. 15 с.
13. Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В. Инвариантный вид и асимптотические свойства обобщенной квазигазодинамической системы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т. 31, № 7. С.1042-1050.
14. Алексеев Б.В.,Полев В.В. Расчет структуры ударной волны на уравнениях гидродинамики повышенной точности / Механика и электродинамика сплошных сред. М.: МГУ, 1990. С. 37-43.
15. Алексеев Б.В. Обобщенные уравнения гидродинамики / Механика и электродинамика сплошных сред. М.: МГУ, 1990. С. 110-131.

Адрес: СССР, 125047, Москва, Миусская пл. 4-А, Всесоюзный Центр Математического Моделирования АН СССР; тел. 250-79-86, факс 972-07-23.

Adress: USSR, 125047, Moscow, Miusskaya sq. 4-A, the National Centre for Mathematical Modelling, the USSR Academy of Sciences; telephone 250-79-86, fax 972-07-23.