

Цена 1р. 98 коп.

ВСЕСОЮЗНЫЙ ЦЕНТР МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ  
Российской академии наук

И.А. Граур, Т.Г. Елизарова,  
Ю.В. Шеретов

РАСЧЁТ СТРУКТУРЫ  
НЕПОДВИЖНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА ОСНОВЕ  
КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Препринт № 42 за 1992 г.

Москва

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РАН

И.А. Граур, Т.Г. Елизарова, Ю.В. Шеретов

РАСЧЕТ СТРУКТУРЫ НЕПОДВИЖНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ  
НА ОСНОВЕ КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Москва - 1992

#### АННОТАЦИЯ

Численно исследована структура неподвижной ударной волны для квазигазодинамических уравнений. Проведено сопоставление с экспериментальными данными, а также с результатами по ударной волне, полученными в рамках других математических моделей.

#### ABSTRACT

The results of static shock structure simulation based on numerical solution of quasigasdynamic equations are presented. Shock profiles are compared with the experimental data and data, obtained from numerical solutions of Navier-Stokes equations and from direct computer simulation for Boltzmann models.

#### ВВЕДЕНИЕ

В газовой динамике ударные волны изучались в рамках математических моделей, основанных на системах уравнений Эйлера, Навье-Стокса, нелинейном кинетическом уравнении Больцмана, его БГК-приближении и других [1] - [3]. В задаче о неподвижной ударной волне при числах Маха  $M_1$  набегающего потока из промежутка  $(1, 2)$  гладкие навье-стоксовские профили хорошо соответствуют наблюдаемым экспериментально, однако при  $M_1 > 2$  имеется заметное расхождение [1], [2]. Использование уравнений Барнетта или тринадцатимоментных уравнений Грэда при небольших значениях  $M_1$  не улучшает навье-стоксовских результатов по ударной волне, а при  $M_1 > 2$  и  $M_1 > 1.65$ , соответственно, рассматриваемая задача для указанных систем становится неразрешимой [2].

На основе нелинейного уравнения Больцмана при различных предположениях о характере взаимодействия частиц и в большем диапазоне чисел Маха были получены профили, характеристики которых ближе к экспериментальным [1], [2], [4]. Однако численное решение таких задач сопряжено с трудностями, обусловленными их высокой размерностью, а также сложной структурой интеграла столкновений. С целью сокращения объемов вычислений применялись упрощенные формы интеграла столкновений. Среди подобных моделей, дающих хорошее описание структуры ударной волны, отметим кинетическую модель из [5].

Вместе с тем желательно получить хорошее описание структуры скачка уплотнения в широком диапазоне чисел Маха в рамках замкнутых макроскопических моделей, включающих только плотность, температуру и скорость и не содержащих дополнительных свободных параметров по сравнению с системой уравнений Навье - Стокса. Системы гидродинамического типа с вязкими возмущениями в уравнениях неразрывности, импульсов и энергии с различных позиций вводились в работах [6] - [10]. Одна из них - система квазигазодинамических уравнений [8] - используется в настоящей работе в качестве основной математической модели.

В §§ 1 - 2 для квазигазодинамических уравнений дана постановка задачи о неподвижной ударной волне и описан алгоритм ее численного решения. Проведенный в § 3 анализ результатов вычислений демонстрирует лучшее по сравнению с навье-стоксовской

моделью согласно с экспериментом по толщине ударной волны, особенно для  $M_1 > 2$ . Показана также конкурентоспособность предлагаемой модели с кинетическими.

Теоретический анализ свойств ударно-волновых решений исследуемой задачи проведен в [II], где, в частности, доказана теорема о строгом возрастании термодинамической энтропии на ударной волне в случае бесконечно малой теплопроводности, что нашло численное подтверждение в настоящей работе.

Варианты расчетов рассматриваемой задачи с постоянным временем релаксации и модельной сеточной вязкостью приведены, соответственно, в работах [I2], [I3].

### § I. Постановка задачи о неподвижной ударной волне для квазигазодинамических уравнений

Пусть  $\rho_1 > 0$ ,  $p_1 > 0$ ,  $u_1 > a_1$  - заданные размерные величины, трактуемые как значения макроскопических параметров газа - плотности, температуры и скорости перед неподвижной ударной волной,

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_1^2}, \quad p_2 = p_1 \frac{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1}{(\gamma+1)},$$

$$u_2 = u_1 \frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2},$$

соответственно, их значения за ударной волной, определяемые из условий Гюгонио. Здесь  $\gamma = 5/3$  - показатель адиабаты одноатомного идеального политропного газа,  $a_1 = (\gamma p_1 / \rho_1)^{1/2}$  - скорость звука в набегающем сверхзвуковом потоке,  $M_1 = u_1 / a_1$  - число Маха. Выпишем систему квазигазодинамических уравнений в одномерном стационарном случае

$$(I.Ia) \quad (\rho u)_x = [\tau(\rho u^2 + p)]_x,$$

$$(I.Iб) \quad (\rho u^2 + p)_x = [\tau(\rho u^3 + 3\rho u)]_x,$$

(I.Iв)

$$[(E+p)u]_x = \left\{ \tau \left[ \left( E + \frac{5}{2} p \right) u^2 \right]_x \right\} + \frac{\gamma}{(\gamma-1)} \left( \frac{p}{\rho} \right)_x + \frac{\gamma p_2^{-1}}{(\gamma-1)} \left[ p \tau \left( \frac{p}{\rho} \right)_x \right].$$

Здесь  $\rho$  - плотность,  $p$  - давление,  $u$  - макроскопическая скорость,  $E = \rho(u^2/2 + \varepsilon)$  - полная энергия,  $\varepsilon = p/[\rho(\gamma-1)]$  - внутренняя энергия,  $\tau$  - характерное время релаксации,  $Pz$  - число Прандтля. Выберем  $\tau = \lambda/a$ , где  $a = (\gamma RT)^{1/2}$  - скорость звука,  $T = p/(\rho R)$  - температура,  $R$  - газовая постоянная,  $\lambda = \lambda_1(\rho_1/p)(T/T_1)^{s-1/2}$  - длина свободного пробега,  $\lambda_1$  - заданная длина свободного пробега в набегающем потоке,  $s$  - заданный показатель степенной зависимости вязкости газа от температуры,  $0.5 \leq s \leq 1$ . При данном выборе зависимости  $\lambda = \lambda(\rho, T)$  для вязкости газа  $\mu$  получаем хорошо известную формулу температурной зависимости

$$\mu = \mu(T) = \rho \tau = \mu_1 (T/T_1)^s,$$

где  $\mu_1 = \rho_1 \tau_1 = \rho_1 \lambda_1 / a_1$ .

Система (I.I) замкнута и отличается от классической системы уравнений Навье-Стокса дополнительными членами в правых частях, имеющими формально более высокие порядки малости по безразмерной длине свободного пробега - числу Кнудсена [I4]. Считая, что при  $x \rightarrow -\infty$  макропараметры газа стремятся к своим предельным значениям перед фронтом, а их производные стремятся к нулю, проинтегрируем систему (I.I) по промежутку  $(-\infty, x]$ :

$$(I.2a) \quad \rho u - \rho_1 u_1 = \tau(\rho u^2 + p)_x,$$

$$(I.2б) \quad (\rho u^2 + p) - (\rho_1 u_1^2 + p_1) = \tau(\rho u^3 + 3\rho u)_x,$$

$$(I.2в) \quad (E+p)u - (E_1+p_1)u_1 = \tau \left[ \left( E + \frac{5}{2} p \right) u^2 \right]_x + \frac{\gamma}{(\gamma-1)} \frac{p}{\rho} p_x + \frac{\gamma p_2^{-1}}{(\gamma-1)} p \tau \left( \frac{p}{\rho} \right)_x.$$

Функции  $\rho = \rho(x) > 0$ ,  $p = p(x) > 0$ ,  $u = u(x) > 0$  класса  $C^1(\mathbb{R})$ , удовлетворяющие на  $\mathbb{R}$  системе уравнений (I.2) и заданным граничным условиям на бесконечности:

$$\rho(x) \rightarrow \rho_1, \quad p(x) \rightarrow p_1, \quad u(x) \rightarrow u_1 \quad \text{при } x \rightarrow -\infty,$$

$$\rho(x) \rightarrow \rho_2, \quad p(x) \rightarrow p_2, \quad u(x) \rightarrow u_2 \quad \text{при } x \rightarrow +\infty,$$

будем называть решениями типа ударной волны для системы (I.I).

В [11] было показано, что такие решения принадлежат классу  $C^\infty(R)$  и стремятся асимптотически к своим предельным значениям на  $\pm\infty$  таким образом, что зона ударного перехода совпадает со всей числовой прямой, хотя размер области резкого изменения параметров газа имеет порядок длины свободного пробега. Кроме того, ударно-волновые решения подчиняются некоторым соотношениям, аналоги которых имеют место и в навье-стоксовской модели. В предельном случае, отвечающем бесконечно малой теплопроводности ( $Pz^{-1} = 0$ ) доказана теорема о строгом возрастании энтропии на ударной волне.

Для построения вычислительного алгоритма удобно перейти в системе (I.I) к безразмерным величинам, выбирая в качестве основных размерных параметров  $\lambda_1, \rho_1, a_1, R$ :

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x} \lambda_1, \quad t = \tilde{t} (\lambda_1 / a_1), \quad \rho = \tilde{\rho} \rho_1, \quad p = \tilde{p} \rho_1 a_1^2, \\ u &= \tilde{u} a_1, \quad T = \tilde{T} (a_1^2 / \gamma R), \quad a = \tilde{a} a_1, \quad E = \tilde{E} \rho_1 a_1^2, \\ \tau &= \tilde{\tau} (\lambda_1 / a_1), \quad \lambda = \tilde{\lambda} \lambda_1. \end{aligned}$$

Процесс безразмеривания не меняет вида уравнений. В дальнейшем в системе (I.I) считаем все величины представленными в безразмерной форме и знак  $\sim$  над ними опускаем. Уравнения связи при этом примут вид

$$E = \rho \frac{u^2}{2} + \frac{p}{(\gamma-1)}, \quad T = \frac{\gamma p}{\rho}, \quad a = T^{1/2}, \quad \tau = \frac{(\gamma p)^{(s-1)}}{\rho^s}.$$

Асимптотические значения безразмерных величин вниз и вверх по потоку определяются по формулам

$$\rho_1 = 1, \quad p_1 = 1/\gamma, \quad u_1 = M_1,$$

$$\rho_2 = \frac{(\gamma+1) M_1^2}{2 + (\gamma-1) M_1^2}, \quad p_2 = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1}{(\gamma+1)},$$

$$u_2 = M_1 \cdot \frac{2 + (\gamma-1) M_1^2}{(\gamma+1) M_1^2}.$$

## § 2. Описание вычислительного алгоритма

Фиксируем положительное число  $L \gg 1$  и рассмотрим на  $[-L, L]$  начально-краевую задачу для безразмерной нестационарной квазигазодинамической системы

$$(2.1a) \quad \rho_t + (\rho u)_x = [\tau (\rho u^2 + p)_x]_x,$$

$$(2.1б) \quad (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = [\tau (\rho u^3 + 3\rho u)_x]_x,$$

$$(2.1в) \quad E_t + [(E+p)u]_x = \left\{ \tau \left[ \left( E + \frac{5}{2} p \right) u^2 \right]_x \right\}_x + \frac{\gamma}{(\gamma-1)} \left( \tau \frac{p}{\rho} p_x \right)_x + \frac{\gamma p z^{-1}}{(\gamma-1)} \left[ \rho \tau \left( \frac{p}{\rho} \right)_x \right]_x,$$

с начальными условиями

$$\rho(x, 0) = \rho_1, \quad p(x, 0) = p_1, \quad u(x, 0) = u_1 \quad \text{при } -L \leq x < 0,$$

$$\rho(x, 0) = \rho_2, \quad p(x, 0) = p_2, \quad u(x, 0) = u_2 \quad \text{при } 0 \leq x \leq L,$$

и граничными условиями

$$\rho(-L, t) = \rho_1, \quad p(-L, t) = p_1, \quad u(-L, t) = u_1,$$

$$\rho(L, t) = \rho_2, \quad p(L, t) = p_2, \quad u(L, t) = u_2.$$

Решение стационарной задачи для системы (2.1) на конечном отрезке  $[-L, L]$  будем искать как предел при  $t \rightarrow +\infty$  нестационарного решения поставленной здесь задачи, то есть используя метод установления. Так как  $L$  много больше безразмерной длины свободного пробега в набегающем потоке, можно ожидать (и это подтверждается расчетами), что стационарное решение в конечной области при  $L \gg 1$  хорошо аппроксимирует искомое ударно-волновое решение.

Введем на отрезке  $[-L, L]$  равномерную сетку  
 $\omega = \{x_i = -L + ih, i = \overline{0, N}, h = 2L/N\}$

и аппроксимируем во внутренних ее узлах систему (2.1) :

$$(2.2a) \quad \frac{\hat{p} - p}{\Delta t} + (\rho u)_x = [\tau(\rho u^2 + p)_{\bar{x}}]_x,$$

$$(2.2б) \quad \frac{\hat{p}u - pu}{\Delta t} + (\rho u^2 + p)_x = [\tau(\rho u^3 + 3pu)_{\bar{x}}]_x,$$

$$(2.2в) \quad \frac{\hat{E} - E}{\Delta t} + [(E + p)u]_x = \left\{ \tau \left[ \left( E + \frac{5}{2}p \right) u^2 \right]_{\bar{x}} \right\}_x + \\ + \frac{\gamma}{(\gamma - 1)} \left( \tau \frac{p}{\rho} \rho_{\bar{x}} \right)_x + \frac{\gamma p_2^{-1}}{(\gamma - 1)} \left[ p \tau \left( \frac{p}{\rho} \right)_{\bar{x}} \right]_x.$$

Для разностных производных здесь использованы стандартные обозначения

$$f_x = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}, \quad (\tau f_{\bar{x}})_x = \frac{1}{\Delta x} \left( \tau_{i+1/2} \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} - \tau_{i-1/2} \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} \right),$$

где  $\tau_{i+1/2} = 0.5(\tau_i + \tau_{i+1})$ .

Значения сеточных функций в граничных узлах поддерживаются постоянными. Начальные условия для разностной задачи получаются как следы на сетке  $\omega$  соответствующих начальных условий аппроксимируемой задачи. Шаг по времени  $\Delta t$  вычисляется по формуле

$$\Delta t = (\alpha \Delta x) / (\max_{0 \leq i \leq N} a_i),$$

где  $a_i = (\gamma p_i / \rho_i)^{1/2}$ ,  $\alpha$  - числовой параметр, подбираемый из соображений устойчивости счета. В большинстве выполненных расчетов  $\alpha = 0.01$ . Итерации прекращались при выполнении условий:

1) Число шагов по времени не меньше двух;

$$2) \quad \max_{1 \leq i \leq N-1} \left| \frac{\hat{p}_i - p_i}{\Delta t} \right| \leq \varepsilon$$

где  $\varepsilon$  - заданная точность.

Для определения величины  $\lambda_1/\delta$ , представляющей собой отношение длины свободного пробега частиц в набегавшем потоке к толщине волны, использовалась приближенная формула

$$\frac{\lambda_1}{\delta} = \frac{\max_{1 \leq i \leq N-1} [(p_{i+1} - p_{i-1}) / (2\Delta x)]}{(p_2 - p_1)}.$$

### § 3. Результаты расчетов

По описанному в § 2 вычислительному алгоритму проведена серия расчетов при различных значениях входных данных. Для  $S = 0.72$ ,  $\Delta x = 0.5$ ,  $\alpha = 0.01$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$  при различных значениях  $M_1$  и  $Pz$  некоторые результаты представлены в таблице I.

ТАБЛИЦА I

Входные параметры	Размер расчетной области $[-L, L]$	Число точек $N+1$	Число шагов по времени до сходимости	$\lambda_1/\delta$
$Pz = 2/3$				
$M_1 = 1.5$	-25, 25	101	6131	0.177
	-25, 25	101	7478	0.284
	-50, 50	201	10670	0.388
	-80, 80	321	17850	0.407
	-80, 80	321	34296	0.411
	-100, 100	401	45210	0.405
	-100, 100	401	47587	0.395
	-120, 120	481	57844	0.383
$Pz^{-1} = 0.0$				
$M_1 = 2.0$	-25, 25	101	12181	0.474
	-80, 80	321	34950	0.576
	-120, 120	481	69524	0.577

В случае бесконечно малой теплопроводности ( $Pz^{-1} = 0$ ) процесс установления идет значительно дольше по сравнению с аналогичным расчетом для  $Pz = 2/3$ . При удвоении размеров расчетной области либо числа шагов по времени, а также при расчетах с половинным шагом по пространству значения величины  $\lambda_1/\delta$  по сравнению с основным вариантом изменяются в третьем знаке после запятой.

На рис. 1, 2 приведены зависимости величины  $\lambda_1/\delta$  от числа  $M_1$ , отвечающие различным значениям  $Pz$  и  $S$ . Для  $Pz = 2/3$  и  $S = 0.72$  или 1.0 подобные графики построены в [5] и имеют такое же качественное поведение. На рис. 2 расчетная кривая для  $Pz = 2/3$ ,  $S = 0.72$  дана в сравнении с экспериментальной кривой, а также кривыми, рассчитанными по навье-стоксовской и бoльцмановской моделям. Данные для сравнения взяты из работ [4], [5]. Отметим, что при  $M_1 > 2$  результаты расчетов данной работы по толщине волны как качественно, так и количественно согласуются с экспериментальными данными лучше, чем таковые для уравнений Навье-Стокса, и сравнимы по точности с аналогичными расчетами в бoльцмановской модели. Графики распределения плотности  $\rho$ , температуры  $T$  и нормированной энтропии

$$h = \ln(\rho/\rho^\infty) / \ln(\rho_1/\rho_1^\infty)$$

вдоль ударной волны, представленные на рис. 3, имеют качественно правильное поведение. В случае бесконечно малой теплопроводности (рис. 3 б) нормированная энтропия строго возрастает в согласии с теоретическим результатом из [11].

Распределения макропараметров  $\rho$ ,  $T$ ,  $h$  на ударной волне для квазигазодинамической и навье-стоксовской моделей при  $M_1 = 2.0$ ,  $S = 0.72$ ,  $Pz = 2/3$  изображены на рис. 4 (а) и 4 (б), соответственно. Кривые на рис. 4 (б) рассчитаны с помощью алгоритма, аналогичного описанному в § 2. Небольшие осцилляции плотности за ударной волной типичны при использовании подобных схем с центрально-разностными аппроксимациями первых пространственных производных для уравнений Навье-Стокса.

#### Список литературы

1. Берд Г. Молекулярная газовая динамика. М.: Мир, 1981.
2. Ланфорд О.Э. и др. Неравновесные явления. Уравнение Больцмана. М.: Мир, 1986.
3. Великович А.Л., Либерман М.А. Физика ударных волн в газах и плазме. М.: Наука, 1987.

4. Аристов В.В., Черемисин Ф.Г. Структура ударной волны в одноатомном газе при степенных потенциалах взаимодействия // Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа. 1982. № 6. С.179-183.
5. Honma H., Xu DQ., Oguchi H. Kinetic model approach to shock structure problem revisited. 17-th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics. Aachen, 1990.
6. Слезкин Н.А. О дифференциальных уравнениях движения газа // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 2. С. 205-208.
7. Валландер С.В. Уравнения движения вязкого газа // Докл. АН СССР. 1951. Т. 78, № 1. С. 25-27.
8. Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н. Использование кинетических моделей для расчета газодинамических течений / Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. М.: Наука, 1986. С. 261-278.
9. Алексеев Б.В. Гидродинамические уравнения в кинетической теории реагирующих газов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27, № 5. С. 730-740.
10. Климонтович Ю.Л. К кинетическому обоснованию уравнений гидродинамики с учетом самодиффузии // Письма в ж. техн. физ. 1990. Т. 16. Вып. 9. С. 81-83.
11. Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В. О свойствах решений типа ударной волны для квазигазодинамических уравнений: Препринт № 156. М.: ИПМатем. им. М.В.Келдыша АН СССР, 1990. 15 с.
12. Алексеев Б.В., Полев В.В. Расчет структуры ударной волны на уравнениях гидродинамики повышенной точности / Механика и электродинамика сплошных сред. М.: Изд-во МГУ, 1990. С. 37 - 43.
13. Абалакин И.В., Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н. Неявные кинетически-согласованные разностные схемы для расчета стационарных задач газовой динамики: Препринт № 36. М.: ИПМатем. им. М.В.Келдыша АН СССР, 1990. 23 с.
14. Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В. Инвариантный вид и асимптотические свойства обобщенной квазигазодинамической системы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 31, № 7. С.1042 - 1050.

312

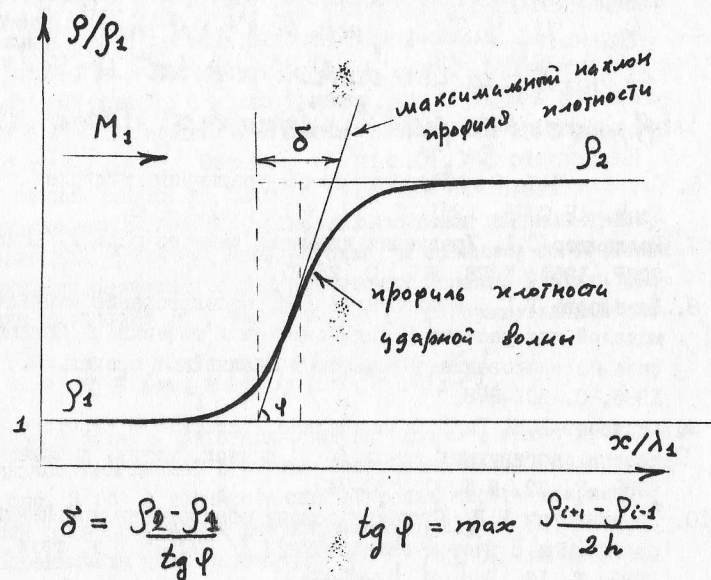


Рис. 1 (а). Определение толщины ударной волны.

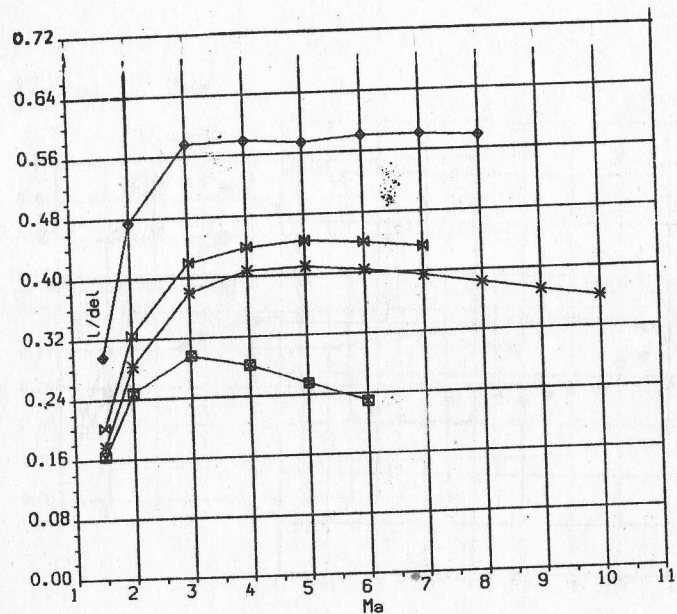


Рис. 1. Результаты расчетов для вариантов

- \* -  $P_2 = 2/3$ ,  $S = 0.72$ ,
- ⊠ -  $P_2 = 1$ ,  $S = 0.72$ ,
- ◇ -  $P_2^{-1} = 0$ ,  $S = 0.72$ ,
- ⊞ -  $P_2 = 2/3$ ,  $S = 1$ .



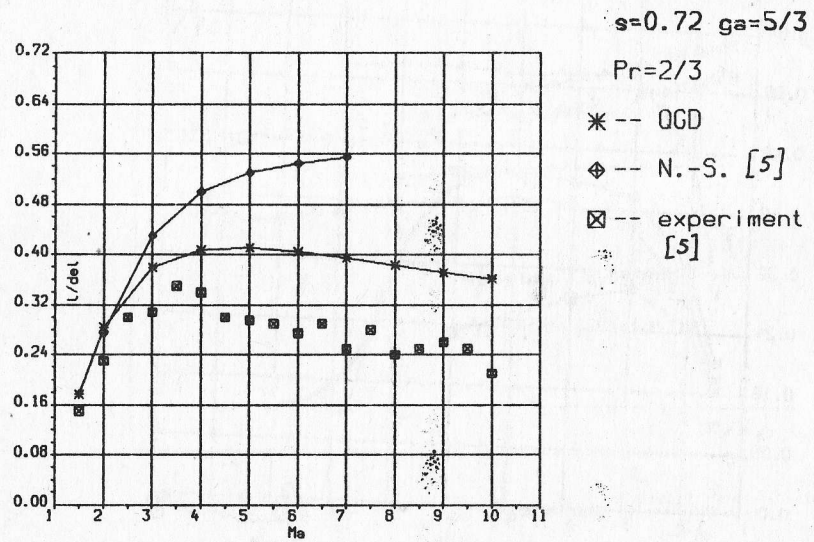


Рис. 2. (а)

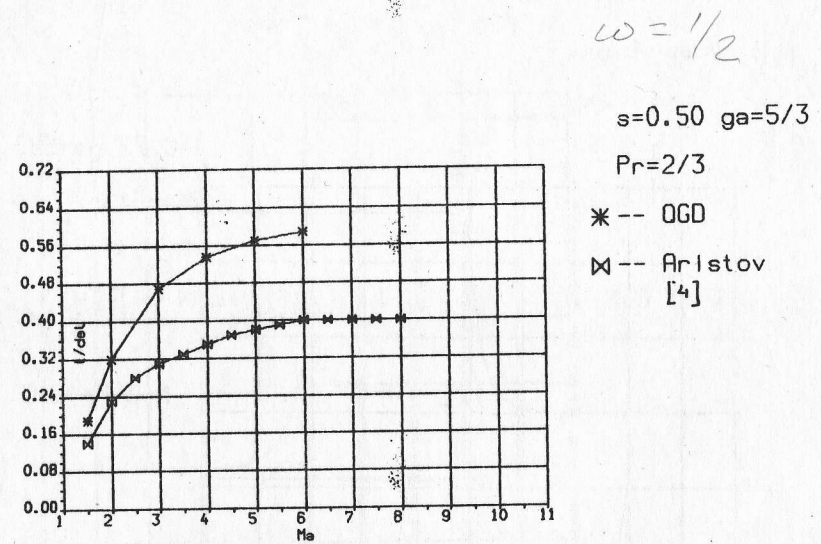


Рис. 2. (б)

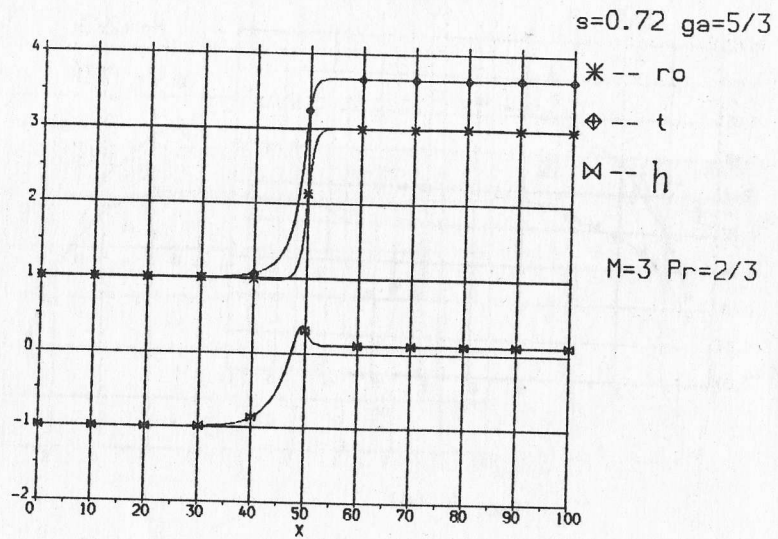


Рис. 3(a).  $M_1 = 3, S = 0.72, Pr = 2/3,$

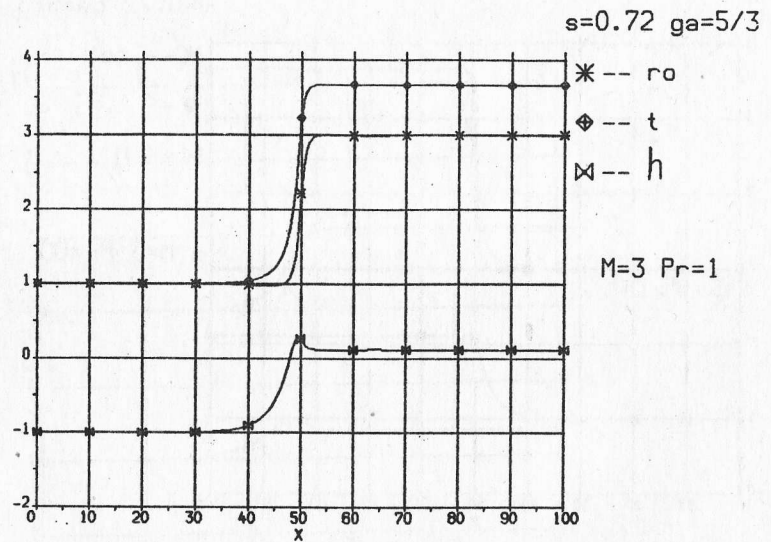


Рис. 3(б).  $M_1 = 3, S = 0.72, Pr = 1,$

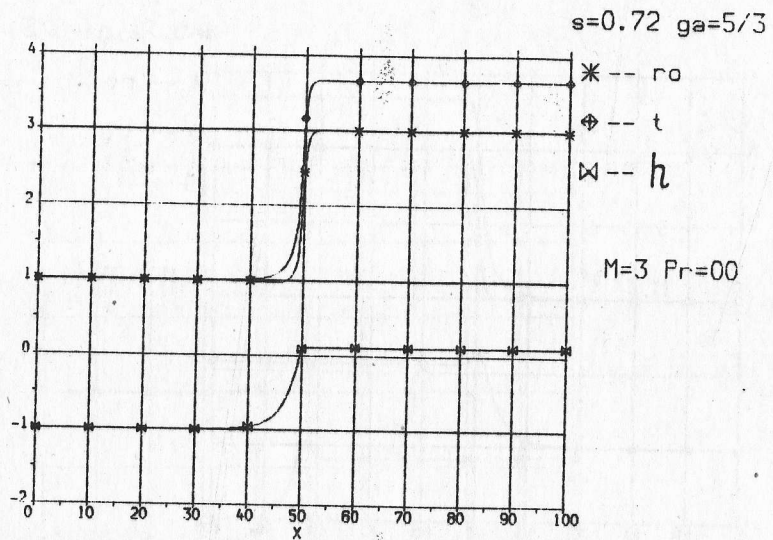


Рис. 3(в).  $M_1 = 3, S = 0.72, Pz^{-1} = 0,$

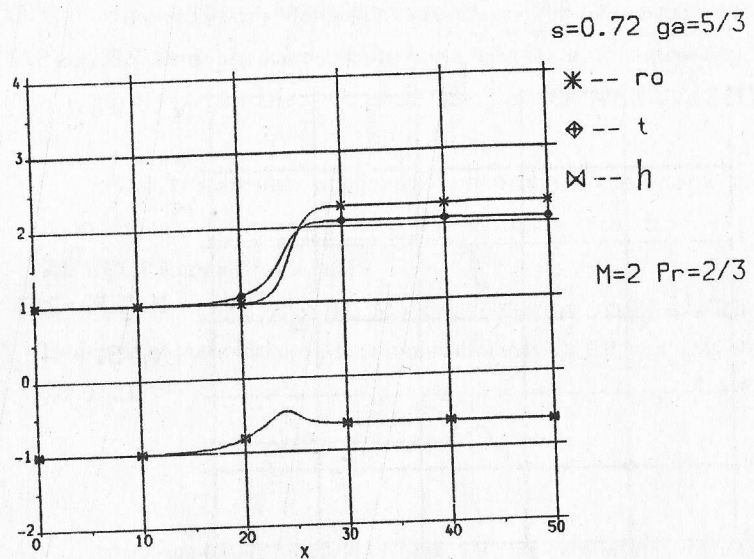


Рис. 4(а). КГД модель.  $M_1 = 2, S = 0.72, Pz = 2/3.$

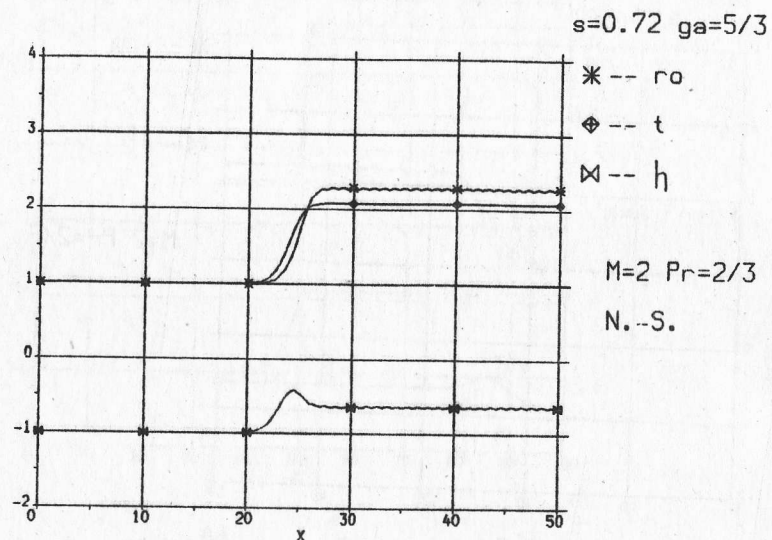


Рис. 4(б). Модель Навье-Стокса.

$$M_1 = 2, \quad S = 0.72, \quad Pr = 2/3.$$

И.А. Граур, Т.Г. Елизарова, Ю.В. Шеретов \* Расчет структуры неподвижной ударной волны на основе квазигазодинамических уравнений\*.

Редактор Н.Г. Чурбанова. Корректор А.Г. Чурбанов.

Подписано в печать 29.12.92г. Заказ № 61.

Формат бумаги 60x90 1/16. Тираж 30 экз.

Объем 0,9 уч.-изд.л. Цена 1р. 98 коп.

055 (02)2



Отпечатано на ротационных в Институте прикладной математики АН  
 Москва, Миусская пл. 4.

Все авторские права на настоящее издание принадлежат Всесоюзному Центру Математического Моделирования АН СССР.

Ссылки на издание рекомендуется делать по следующей форме: и.о., фамилия, название, - М.: Всес. Центр Матем. Модел. АН СССР, год, N.

Распространение: препринты института продаются в магазинах Академкниги г.Москвы, а также распространяются через Библиотеку АН СССР в порядке обмена.

Адрес: СССР, 125047, Москва, Миусская пл. 4-А, Всесоюзный Центр Математического Моделирования АН СССР; тел. 250-79-86, факс 972-07-23.

Publication and distribution rights for this preprint are reserved by the National Centre for Mathematical Modelling, the USSR Academy of Sciences.

The references should be typed by the following form: initials, name, title, - Moscow, Nat. Cent. Math. Model., year, preprint N.

Distribution. These preprints are sold in the Moscow bookstores "Academkniga" and are distributed by the USSR Academy of sciences Library as an exchange.

Address: USSR, 125047, Moscow, Miusskaya sq. 4-A, the National Centre for Mathematical Modelling, the USSR Academy of Sciences; telephone 250-79-86, fax 972-07-23.