



Елизарова Т.Г., Устюгов С.Д.

Квазигазодинамический  
алгоритм решения  
уравнений магнитной  
гидродинамики.  
Одномерный случай

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Елизарова Т.Г., Устюгов С.Д. Квазигазодинамический алгоритм решения уравнений магнитной гидродинамики. Одномерный случай // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 1. 20 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-1>



Елизарова Т.Г., Устюгов С.Д.

Квазигазодинамический  
алгоритм решения  
уравнений магнитной  
гидродинамики.  
Одномерный случай

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Елизарова Т.Г., Устюгов С.Д. Квазигазодинамический алгоритм решения уравнений магнитной гидродинамики. Одномерный случай // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 1. 20 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-1>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ  
МАТЕМАТИКИ имени М.В.КЕЛДЫША

**Т.Г. Елизарова, С.Д. Устюгов**

**Квазигазодинамический алгоритм  
решения уравнений магнитной гидродинамики.  
Одномерный случай**

Москва 2011

**Т.Г. Елизарова, С.Д. Устюгов**

**Квазигазодинамический алгоритм решения уравнений магнитной гидродинамики. Одномерный случай.**

**Аннотация**

В данной работе представлена методика решения уравнений идеальной магнитогидродинамики в одномерном случае с помощью квазигазодинамического алгоритма. Проведено тестирование алгоритма на примере нескольких задач одномерной магнитогидродинамики. Показано, что численное решение для всех случаев сходится к автомодельному при измельчении пространственной сетки.

**T.G. Elizarova, S.D. Ustyugov**

**Quasi-gas dynamic algorithm of solution of magnetohydrodynamic equations. One dimensional case.**

**Abstract**

In the given work the technique of the solution of the equations ideal magnetohydrodynamic in a one-dimensional case by means of quasi-gas dynamic algorithm is presented. Algorithm testing for an example of several problems one-dimensional magnetohydrodynamic was conducted. It is shown that the numerical solution for all cases converges to self-similar ones by refinement of a spatial grid.

**Содержание**

1. Введение.....	3
2. Система квазигазодинамических уравнений магнитной гидродинамики и численный алгоритм.....	3
3. Тестирование .....	6
4. Заключение .....	19

## 1. Введение

Квазигазодинамический (КГД) алгоритм решения уравнений гидродинамики успешно применялся для численного моделирования широкого круга течений вязкого сжимаемого газа. В работе [1] было представлено решение нескольких одномерных тестовых задач для течений невязкого сжимаемого газа методом КГД. Для всех примеров показано, что численное решение уверенно сходится к эталонному решению при сгущении пространственной сетки. Благодаря простоте численной реализации этот алгоритм дает возможность получать решение одномерных задач с высоким качеством на подробных сетках. В работе [2] представлена система уравнений магнитной гидродинамики (КМГД), описывающая течения сжимаемой электропроводной жидкости на основе квазигазодинамической модели. В данной работе рассмотрено применение КМГД для численного моделирования одномерных течений сжимаемой электропроводной жидкости в магнитном поле. Проведен анализ КМГД алгоритма на примере нескольких задач одномерной магнитогидродинамики.

## 2. Система квазигазодинамических уравнений магнитной гидродинамики и численный алгоритм

Квазигазодинамические уравнения магнитной гидродинамики для одномерного плоского течения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx}}{\partial x} = 0 \\
 & \frac{\partial \rho u_x}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx} u_x}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\rho_*}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{B^2}{2} - B_x B_x \right) = \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} \\
 & \frac{\partial \rho u_y}{\partial t} + \frac{\partial j_{my} u_x}{\partial x} - \frac{\rho_*}{\rho} \frac{\partial B_x B_y}{\partial x} = \frac{\partial \Pi_{yx}}{\partial x} \\
 & \frac{\partial \rho u_z}{\partial t} + \frac{\partial j_{mz} u_x}{\partial x} - \frac{\rho_*}{\rho} \frac{\partial B_x B_z}{\partial x} = \frac{\partial \Pi_{zx}}{\partial x} \\
 & \frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{j_{mx} B_y - j_{my} B_x}{\rho} \right) = 0 \\
 & \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{j_{mx} B_z - j_{mz} B_x}{\rho} \right) = 0 \\
 & \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial j_m H}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{B_x (j_{mx} B_x + j_{my} B_y + j_{mz} B_z)}{\rho} \right] + \frac{\partial q}{\partial x} = \\
 & \quad = \frac{\partial (\Pi_{xx} u_x + \Pi_{yx} u_y + \Pi_{zx} u_z)}{\partial x}
 \end{aligned}$$

$$E = \rho\varepsilon + \frac{\rho v^2}{2} + \frac{B^2}{2}, \quad H = \frac{E + p}{\rho}$$

$$v^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2, \quad B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2, \quad \bar{p} = p + \frac{B^2}{2},$$

где  $\rho$  – плотность,  $u_x, u_y, u_z$  – компоненты скорости,  $B_x, B_y, B_z$  – компоненты магнитного поля,  $E$  и  $H$  – полная энергия единицы объёма, и полная удельная энтальпия,  $p$  – давление,  $\varepsilon$  – удельная внутренняя энергия,  $\rho_* = \rho(1 - w_\tau)$  – приближенное значение плотности в точке  $(\vec{x}, t + \tau)$ ,  $w_\tau = \tau/\rho d(\rho u_x)/dx$ . Вектор плотности потока массы вычисляется как

$$\vec{j}_m = \rho(\vec{u} - \vec{w})$$

где

$$w_i = \frac{\tau}{\rho} \left[ \nabla_j \rho u_i u_j + \nabla_i p + \nabla_j \left( \frac{B^2}{2} I_{ij} - B_i B_j \right) \right]$$

Система уравнений дополняется уравнением состояния, которое в случае идеального газа имеет вид

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$$

где  $\gamma$  – показатель адиабаты.

Компоненты тензора вязких напряжений, входящих в систему уравнений, определяются как

$$\Pi_{xx} = \frac{4}{3}\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_x \tau \left( \rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) + \tau \left( u_x \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)$$

$$\Pi_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + u_y \tau \left( \rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right)$$

$$\Pi_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + u_z \tau \left( \rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right)$$

Вектор теплового потока  $q$  равен

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial x} - \tau \rho u_x \left[ \frac{u_x}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho} \right) + \rho u_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right],$$

где  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости,  $k = \mu\gamma R/((\gamma - 1)Pr)$  – коэффициент теплопроводности,  $Pr$  – число Прандтля,  $\tau = \mu/(p \cdot Sc)$  – релаксационный параметр, имеющий размерность времени,  $Sc$  – число Шмидта.

Введем равномерную сетку по координате  $x$  с шагом  $h$  и сетку по времени с шагом  $\Delta t$ . Значения всех физических величин – плотности, скорости, давления, магнитного поля будем определять в узлах сетки. Значения потоков всех величин определяются на границах ячеек в полуцелых узлах. Для решения исходной системы уравнений используем явную по времени разностную схему следующего вида:

$$\begin{aligned}\widehat{\rho}_i &= \rho_i - \frac{\Delta t}{h} (j_{mi+1/2} - j_{mi-1/2}) \\ \widehat{\rho}_i \widehat{u}_i &= \rho_i u_i + \frac{\Delta t}{h} \left[ \left( \Pi_{xx_{i+1/2}} - \Pi_{xx_{i-1/2}} \right) - \left( \bar{p}_{i+1/2} - \bar{p}_{i-1/2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( j_{mx_{i+1/2}} u_{x_{i+1/2}} - j_{mx_{i-1/2}} u_{x_{i-1/2}} \right) + w_{\tau_i} (B^2_{i+1/2} - B^2_{i-1/2}) / 2 \right] \\ \widehat{\rho}_i \widehat{v}_i &= \rho_i v_i + \frac{\Delta t}{h} \left[ \left( \Pi_{yx_{i+1/2}} - \Pi_{yx_{i-1/2}} \right) + B_{x_i} (B_{y_{i+1/2}} - B_{y_{i-1/2}}) \right. \\ &\quad \left. - \left( j_{my_{i+1/2}} u_{x_{i+1/2}} - j_{my_{i-1/2}} u_{x_{i-1/2}} \right) - w_{\tau_i} B_{x_i} (B_{y_{i+1/2}} - B_{y_{i-1/2}}) \right] \\ \widehat{\rho}_i \widehat{w}_i &= \rho_i w_i + \frac{\Delta t}{h} \left[ \left( \Pi_{zx_{i+1/2}} - \Pi_{zx_{i-1/2}} \right) + B_{x_i} (B_{z_{i+1/2}} - B_{z_{i-1/2}}) \right. \\ &\quad \left. - \left( j_{mz_{i+1/2}} u_{x_{i+1/2}} - j_{mz_{i-1/2}} u_{x_{i-1/2}} \right) - w_{\tau_i} B_{x_i} (B_{z_{i+1/2}} - B_{z_{i-1/2}}) \right] \\ \widehat{B}_{x_i} &= B_{x_i} - \frac{\Delta t}{h} \left[ \left( \frac{j_{mx} B_y - j_{my} B_x}{\rho} \right)_{i+1/2} - \left( \frac{j_{mx} B_y - j_{my} B_x}{\rho} \right)_{i-1/2} \right] \\ \widehat{B}_{y_i} &= B_{y_i} - \frac{\Delta t}{h} \left[ \left( \frac{j_{mx} B_z - j_{mz} B_x}{\rho} \right)_{i+1/2} - \left( \frac{j_{mx} B_z - j_{mz} B_x}{\rho} \right)_{i-1/2} \right] \\ \widehat{E}_i &= E_i + \frac{\Delta t}{h} \left[ \left( PW_{i+1/2} - PW_{i-1/2} \right) - \left( q_{i+1/2} - q_{i-1/2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( j_{mx_{i+1/2}} H_{i+1/2} - j_{mx_{i-1/2}} H_{i-1/2} \right) + B_{x_i} (BW_{i+1/2} - BW_{i-1/2}) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}PW &= \Pi_{xx} u_x + \Pi_{yx} u_y + \Pi_{zx} u_z \\ BW &= B_x (j_{mx} B_x + j_{my} B_y + j_{mz} B_z)\end{aligned}$$

Компоненты дискретного аналога вектора потока массы  $J_{mk}$  имеют вид

$$J_{mk_{i+1/2}} = \rho_{i+1/2} (u_{k_{i+1/2}} - w_{k_{i+1/2}})$$

где компоненты добавки к скорости вычисляются как

$$w_{x_{i+1/2}} = \frac{\tau_{i+1/2}}{\rho_{i+1/2}} \frac{1}{h} (\rho_{i+1/2} u_{x_{i+1/2}}^2 + \bar{p}_{i+1/2} - \rho_{i-1/2} u_{x_{i-1/2}}^2 - \bar{p}_{i-1/2})$$

$$w_{y_{i+1/2}} = \frac{\tau_{i+1/2}}{\rho_{i+1/2}} \frac{1}{h} (\rho_{i+1/2} u_{x_{i+1/2}} u_{y_{i+1/2}} - B_{x_{i+1/2}} B_{y_{i+1/2}} - \rho_{i-1/2} u_{x_{i-1/2}} u_{y_{i-1/2}} + B_{x_{i-1/2}} B_{y_{i-1/2}})$$

$$w_{z_{i+1/2}} = \frac{\tau_{i+1/2}}{\rho_{i+1/2}} \frac{1}{h} (\rho_{i+1/2} u_{x_{i+1/2}} u_{z_{i+1/2}} - B_{x_{i+1/2}} B_{z_{i+1/2}} - \rho_{i-1/2} u_{x_{i-1/2}} u_{z_{i-1/2}} + B_{x_{i-1/2}} B_{z_{i-1/2}})$$

Дискретные выражения для  $\Pi_{xx}, \Pi_{yx}, \Pi_{zx}$  и  $q$  выписываются аналогично. При численном решении исходной системы уравнений магнитной гидродинамики все диссипативные слагаемые, содержащие коэффициенты  $\mu, k$  и  $\tau$ , рассматриваются как искусственные регуляризаторы. При этом релаксационный параметр и коэффициенты вязкости и теплопроводности связаны между собой и в безразмерном виде вычисляются как

$$\tau = \alpha \frac{h}{c_f}, \quad \mu = \tau \cdot \rho \cdot Sc, \quad k = \frac{\tau \cdot p \cdot Sc}{\text{Pr}(\gamma - 1)}$$

где  $\alpha$  – численный коэффициент, который выбирался в пределах 0.2 – 0.5, числа Прандтля и Шмидта были равны единице. Шаг по времени  $\Delta t$  определялся из условия Куранта

$$\Delta t = \beta \cdot \frac{h}{\max_i (|u_{x_i}| + c_{f_i})}$$

где  $\beta$  – численный коэффициент, равный в расчетах 0.1 – 0.4 в большинстве случаев,  $c_f$  – быстрая магнитозвуковая скорость.

### 3. Тестирование

Представленная численная схема была протестирована на примере нескольких характерных задач МГД. Все вычисления проводились на отрезке  $x \in [0,1]$ .



Начальные значения компонент вектора  $\vec{V}$  физических переменных задавались слева и справа от середины отрезка в следующем виде:

$$\vec{V} = \begin{cases} \vec{V}^L, & x \leq 0.5 \\ \vec{V}^R, & x > 0.5 \end{cases}$$

Количество разностных ячеек было равно  $N$ , момент времени окончания вычислений обозначался как  $T$ . Граничные условия совпадали с соответствующими начальными условиями на концах расчетной области. Во всех тестах число Куранта  $\beta = 0.2$ , коэффициент  $\alpha = 0.4$ . Для каждого значения  $N$  мы вычисляем относительную ошибку  $\delta_N$  и аппроксимацию порядка точности  $R_N$ , используя следующие определения:

$$\delta_N = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{i=8} E_N(V_i)$$

$$E_N(V_i) = \frac{\sum_{k=1}^{k=N} |V_{i_k} - V_{exact_k}|}{\sum_{k=1}^{k=N} |V_{exact_k}|}$$

$$R_N = \log_2(\delta_{N/2} / \delta_N)$$

**Тест 1.** В этой задаче решение системы уравнений КМГД состоит из быстрой волны разрежения,двигающейся налево, промежуточной ударной волны и медленной волны разрежения, контактного разрыва, медленной ударной волны и еще одной быстрой волны разрежения,двигающейся направо. Подробное обсуждение данного решения содержится в [3]. Начальные условия имеют вид:

$$(\rho^L, u_x^L, u_y^L, u_z^L, B_y^L, B_z^L, p^L) = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$$

$$(\rho^R, u_x^R, u_y^R, u_z^R, B_y^R, B_z^R, p^R) = (0.125, 0, 0, 0, -1, 0, 0.1)$$

Компонента магнитного поля  $B_x = 0.75$ , показатель адиабаты  $\gamma = 2, N = 512, T = 0.1$ . Результаты расчетов представлены на рис. 1-5.

Таблица относительной ошибки и порядка точности для теста 1.

$N$	$\delta_N$	$R_N$
128	6.91e-2	-
256	4.34e-2	0.67
512	2.74e-2	0.67
1024	1.52e-2	0.85

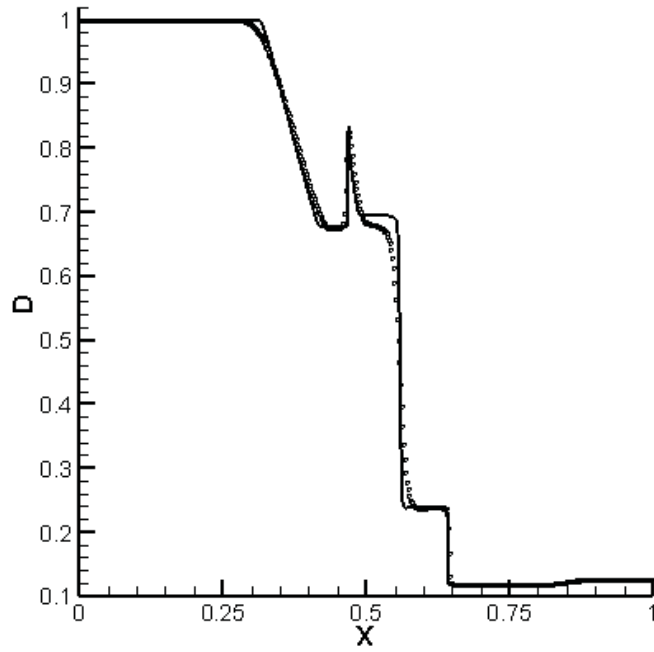


Рис. 1. Тест 1: плотность  $\rho$ .

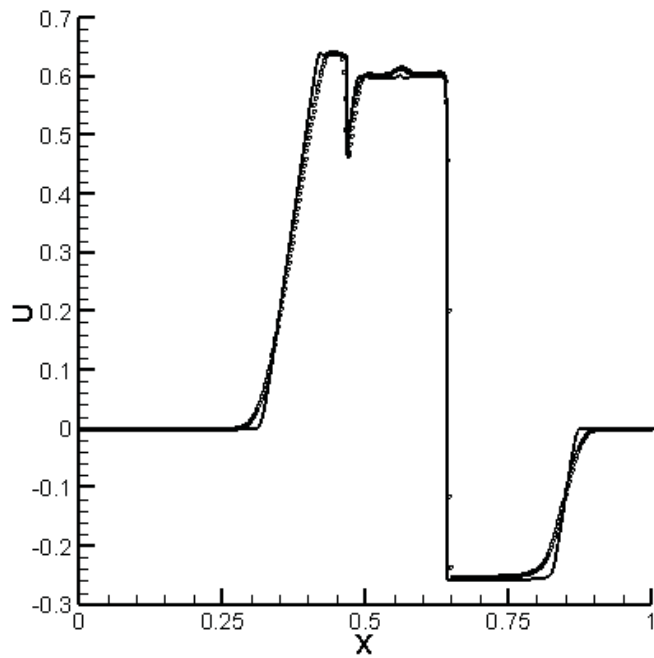


Рис. 2. Тест 1: компонента  $u_x$  скорости.

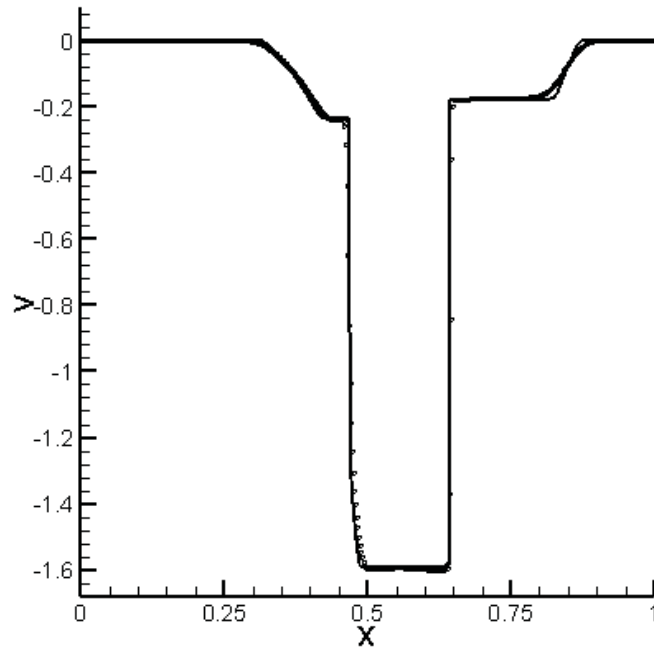


Рис. 3. Тест 1: компонента  $u_y$  скорости.

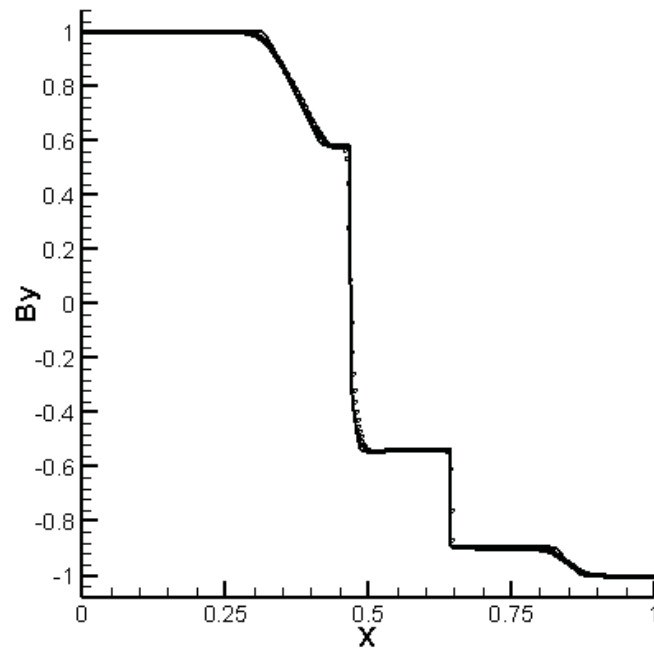


Рис. 4. Тест 1: компонента  $B_y$  магнитного поля.

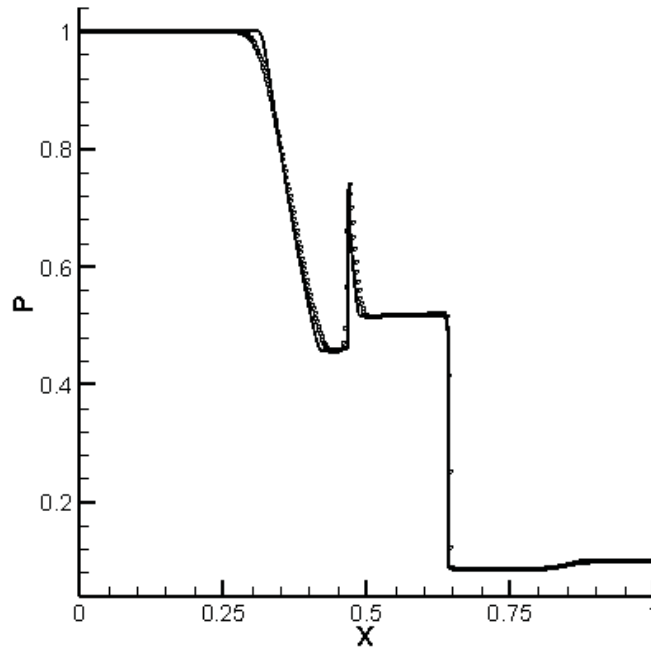


Рис. 5. Тест 1: давление  $p$ .

**Тест 2.** Задача представляет ситуацию с вращением компонент магнитного поля. Решение состоит из двух быстрых ударных волн, скорости которых равны 1.22 и 1.28 чисел Маха, двух медленных ударных волн, имеющих скорости 1.09 и 1.07 чисел Маха, двух вращательных и одного контактного разрыва. Начальные условия имеют вид [4]:

$$(\rho^L, u_x^L, u_y^L, u_z^L, B_y^L, B_z^L, p^L) = (1.08, 1.2, 0.01, 0.5, 3.6, 2, 0.95)$$

$$(\rho^R, u_x^R, u_y^R, u_z^R, B_y^R, B_z^R, p^R) = (1, 0, 0, 0, 4, 2, 1)$$

Компонента магнитного поля  $B_x = 2$ , показатель адиабаты  $\gamma = 5/3, N = 512, T = 0.2$ . Результаты расчетов представлены на рис. 6-10.

Таблица относительной ошибки и порядка точности для теста 2.

$N$	$\delta_N$	$R_N$
128	3.94e-2	-
256	2.60e-2	0.60
512	1.63e-2	0.68
1024	9.62e-3	0.76

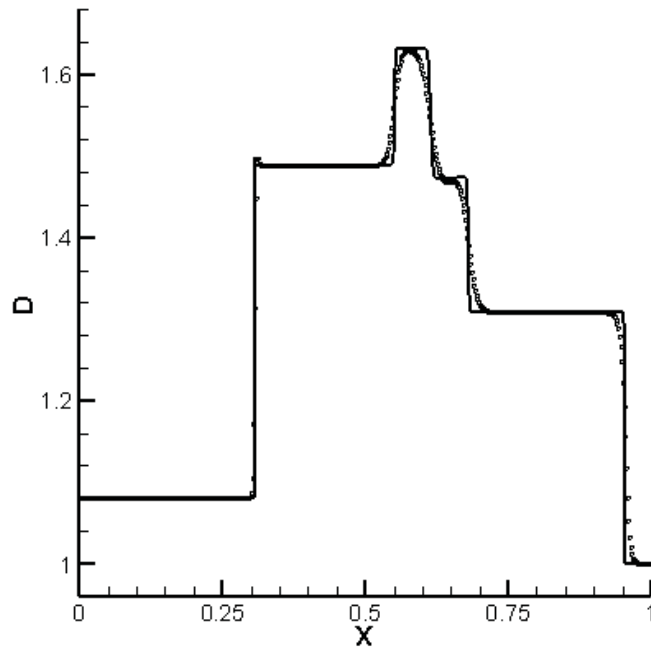


Рис. 6. Тест 2: плотность  $\rho$ .

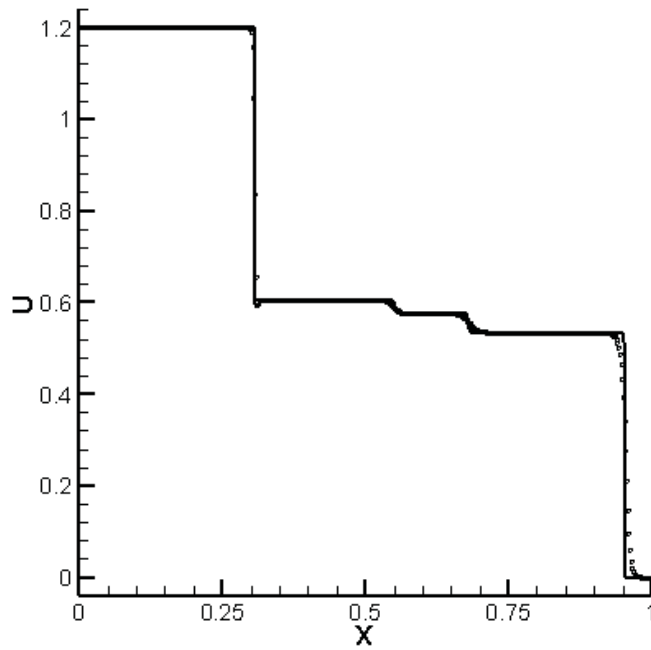


Рис. 7. Тест 2: компонента  $u_x$  скорости.

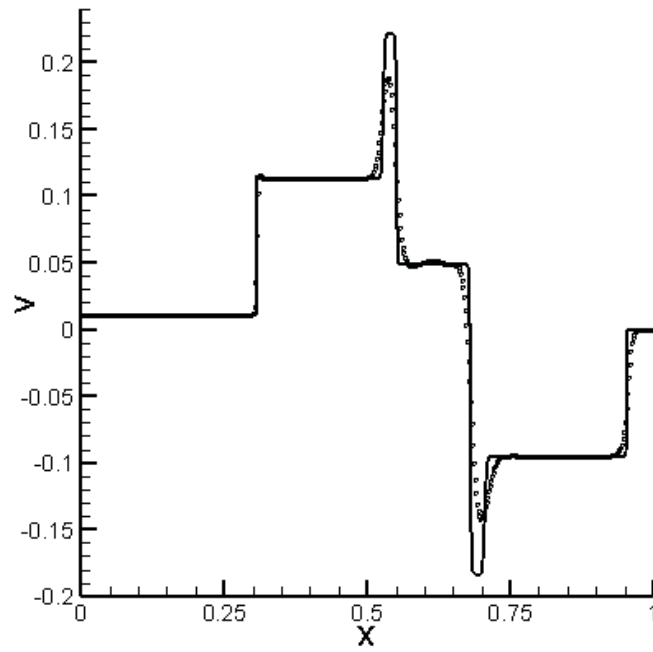


Рис. 8. Тест 2: компонента  $u_y$  скорости.

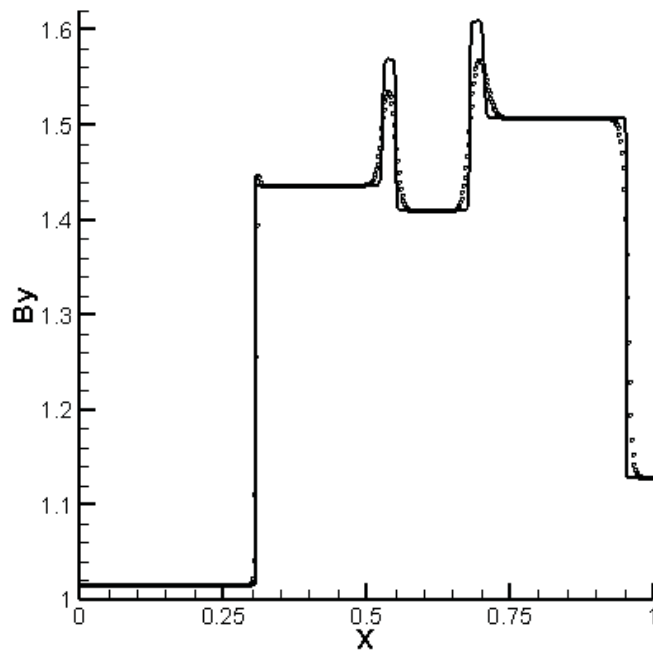


Рис. 9. Тест 2: компонента  $B_y$  магнитного поля.

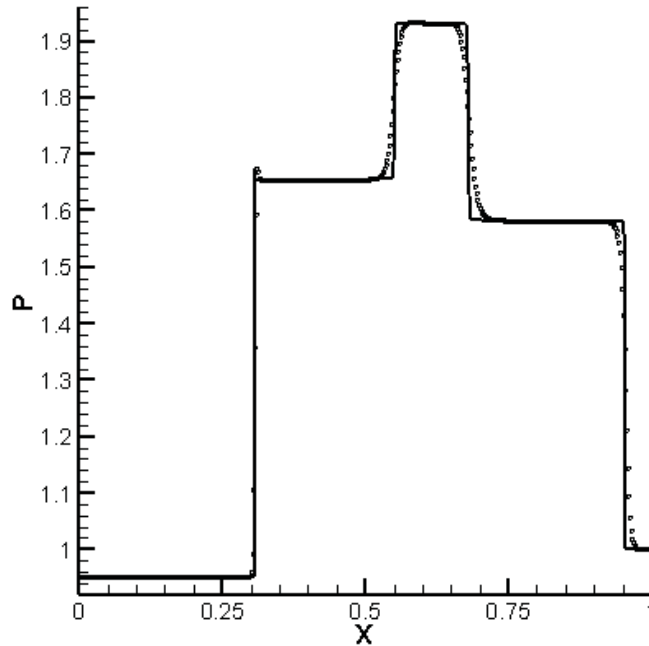


Рис. 10. Тест 2: давление  $p$ .

**Тест 3.** Решение состоит из двух быстрых ударных волн, скорости которых равны 1.84 и 1.28 чисел Маха и направленных налево и направо соответственно, двух медленных ударных волн,двигающихся налево и направо со скоростями 1.38 и 1.49 чисел Маха соответственно, одного вращательного и двух контактных разрывов. Начальные условия имеют вид [5]:

$$(\rho^L, u_x^L, u_y^L, u_z^L, B_y^L, B_z^L, p^L) = (0.18405, 3.8964, 0.5361, 2.4866, 2.394, 1.197, 0.3641)$$

$$(\rho^R, u_x^R, u_y^R, u_z^R, B_y^R, B_z^R, p^R) = (0.1, -5.5, 0, 0, 2, 2, 0.1)$$

Компонента магнитного поля  $B_x = 4$ , показатель адиабаты  $\gamma = 5/3, N = 512, T = 0.15$ . Результаты расчетов представлены на рис. 13-19.

Таблица относительной ошибки и порядка точности для теста 3.

$N$	$\delta_N$	$R_N$
128	6.47e-2	-
256	3.65e-2	0.83
512	2.05e-2	0.84
1024	1.09e-2	0.91

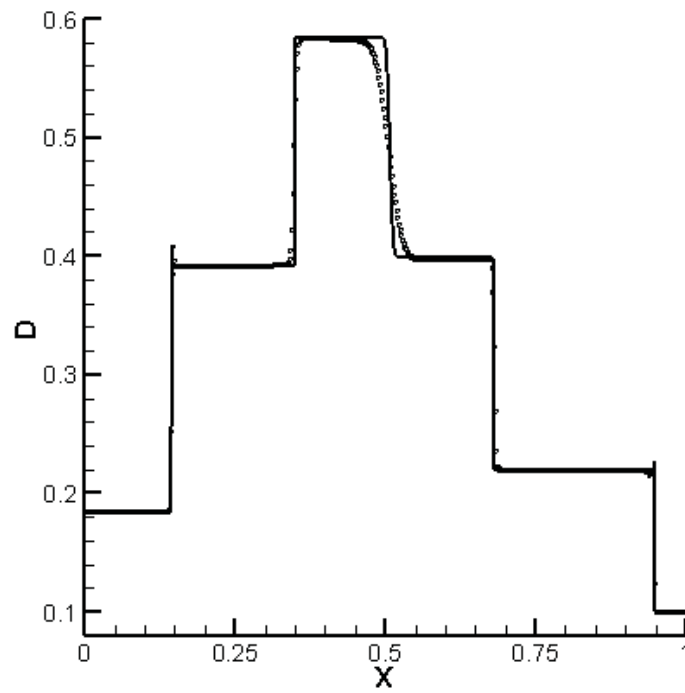


Рис. 11. Тест 3: плотность  $\rho$ .

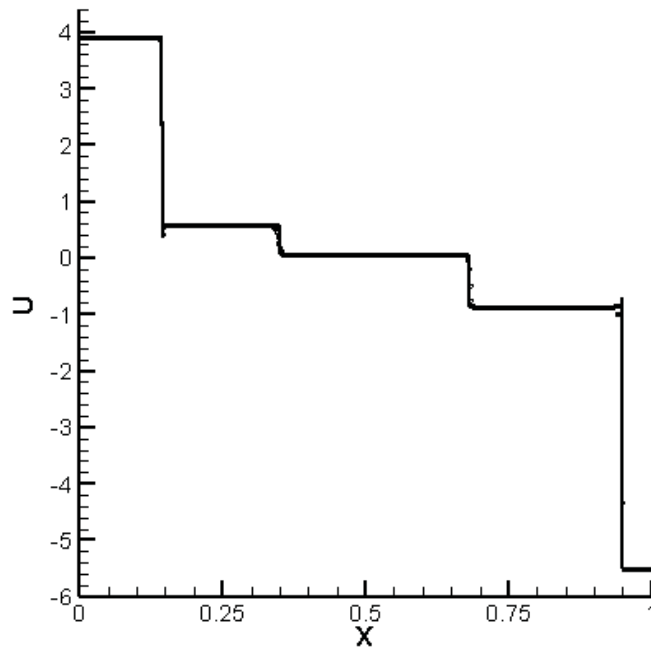


Рис. 12. Тест 3: компонента  $u_x$  скорости.



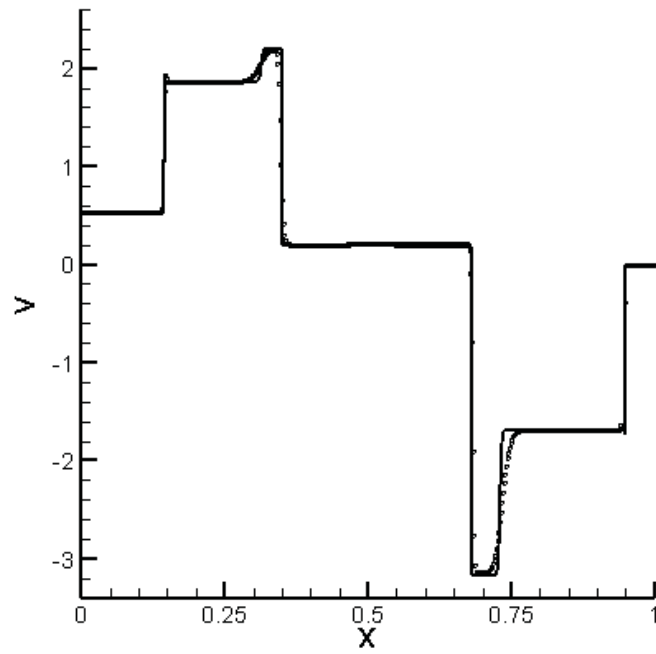


Рис. 13. Тест 3: компонента  $u_y$  скорости.

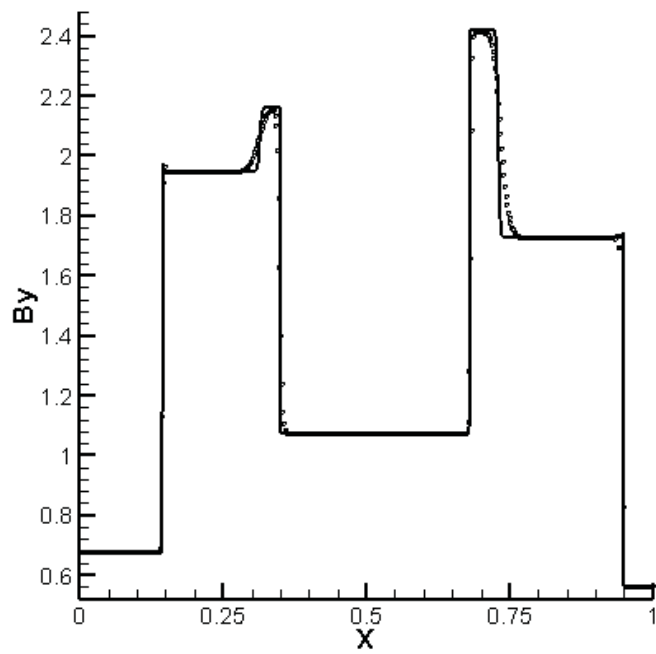


Рис. 14. Тест 3: компонента  $B_y$  магнитного поля.

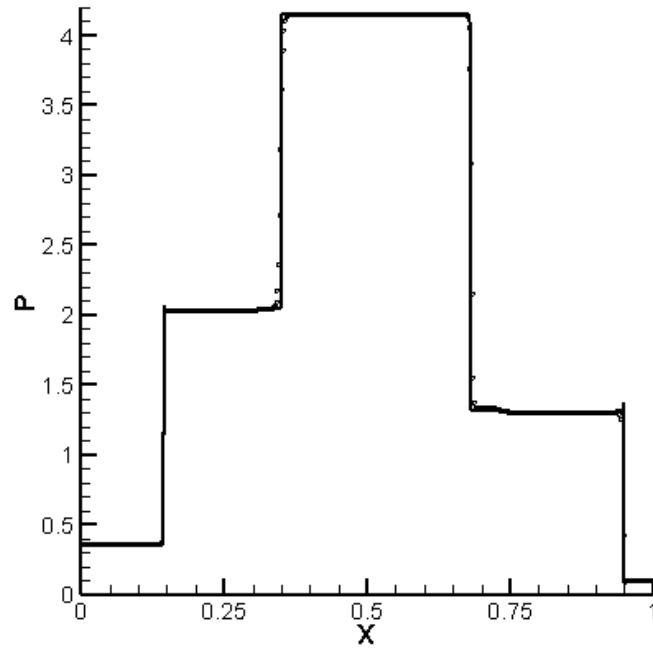


Рис. 15. Тест 3: давление  $p$ .

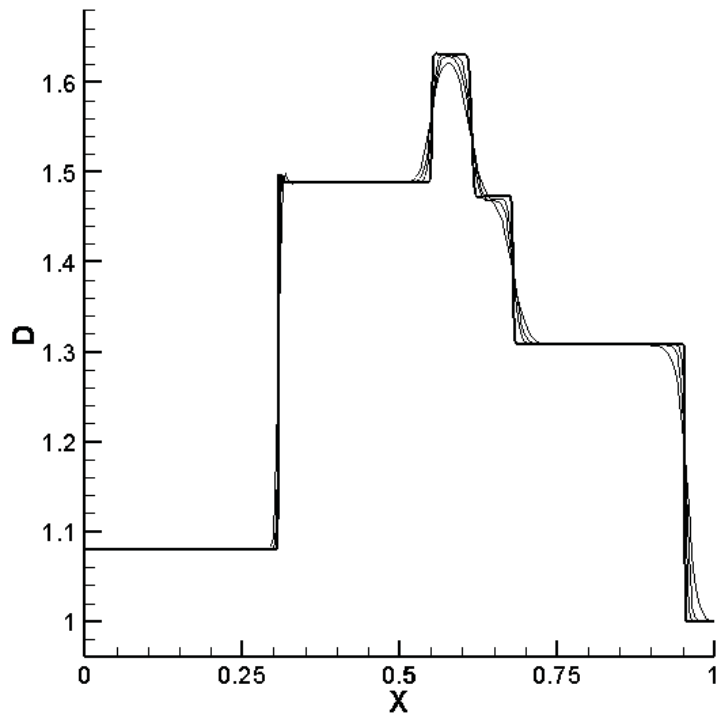


Рис. 16. Распределение плотности  $\rho$ . Сходимость по сетке.

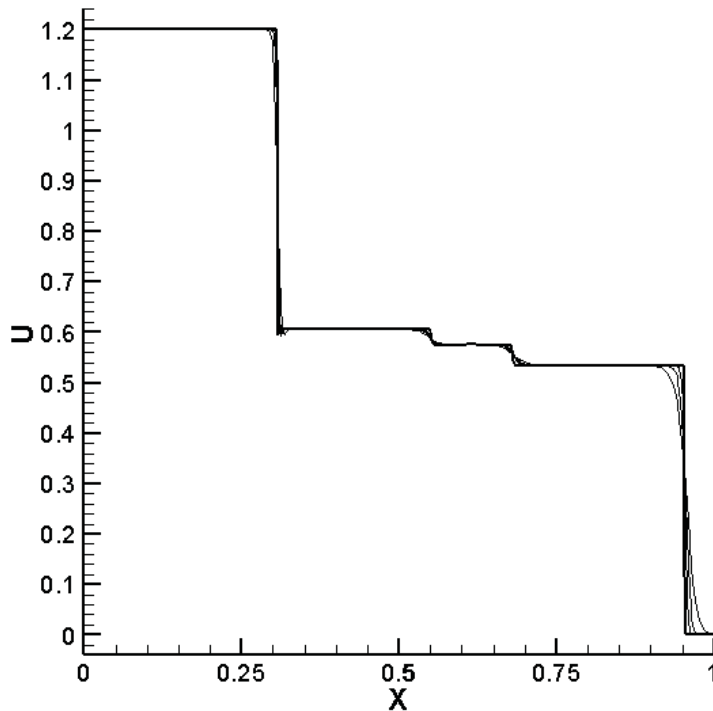


Рис. 17. Распределение компоненты  $u_x$  скорости. Сходимость по сетке.

Сходимость решения при последовательном уменьшении шага сетки в два раза к точному решению задачи для профилей плотности и скорости показана на рис. 16 и 17. Так как схема имеет первый порядок точности, из расчетов следует, что достаточно точное распределение плотности достигается лишь на подробных сетках, в то время как профиль скорости и давления хорошо разрешаются на грубых сетках.

**Тест 4.** Это отличный количественный тест для определения точности и порядка сходимости численного алгоритма. Все физические переменные во всей расчетной области равны постоянным значениям, которые выбраны так, чтобы основные волны были хорошо отделены и волновой вектор был направлен под некоторым углом к магнитному полю. Волны заданы как возмущения к начальным постоянным значениям физических величин в следующем виде:

$$\delta U = A \cdot R \cdot \sin(2\pi x)$$

Здесь  $U$  – вектор консервативных переменных,  $A$  – амплитуда,  $R$  – вектор правых собственных векторов матрицы гиперболической системы МГД с заданными числовыми значениями для каждой волны. Для всех случаев амплитуда  $A = 10^{-6}$ . Размер вычислительной области равен одной длине

волны. Используются периодические граничные условия для всех переменных. После того как волна пройдет один раз расчётную область, измеряется ошибка в численном решении с помощью вычисления нормы

$$\|\Delta U\| = \sqrt{\sum_{k=1}^N (\Delta U_k)^2}, \quad \Delta U_k = \sum_i |U_{k,i}^n - U_{k,i}^0| / N$$

Здесь  $U_{k,i}^n$  – численное решение для  $k$ -ой компоненты вектора консервативных переменных для каждой точки  $i$  в момент времени  $n$ ,  $U_{k,i}^0$  – начальное решение и  $N$  – число точек в области. Начальные условия имеют вид [6]:

$$\rho = 1, P = \frac{1}{\gamma}, b_x = 1, b_y = \sqrt{2}, b_z = 0.5,$$

где  $b = B/\sqrt{4\pi}$  и  $\gamma = 5/3$ .

Значения компонент правых собственных векторов равны:

для идущей влево быстрой магнитозвуковой волны

$$\vec{R} = (4.472135954999580e-01, -8.944271909999160e-01, 4.216370213557840e-01, 1.490711984999860e-01, 2.012457825664615e+00, 8.432740427115680e-01, 2.981423969999720e-01),$$

для идущей влево альвеновской волны

$$\vec{R} = (0.000000000000000e+00, 0.000000000000000e+00, -3.333333333333333e-01, 9.428090415820634e-01, 0.000000000000000e+00, -3.333333333333333e-01, 9.428090415820634e-01),$$

для идущей влево медленной магнитозвуковой волны

$$\vec{R} = (8.944271909999159e-01, -4.472135954999579e-01, -8.432740427115680e-01, -2.981423969999720e-01, 6.708136850795449e-01, -4.216370213557841e-01, -1.490711984999860e-01),$$

где компоненты правых векторов соответствуют упорядочиванию вектора консервативных переменных  $\vec{U}$  в виде  $\vec{U} = [\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, E, B_y, B_z]$ .

Скорость быстрой магнитозвуковой волны равна 2, скорость альвеновской волны равна 1, и скорость медленной магнитозвуковой волны равна 0.5. Абсолютная ошибка в распространении каждой из этих волн и порядок точности численного алгоритма представлены в следующих таблицах:

для быстрой магнитозвуковой волны

$N$	$\delta_N$	$R_N$
64	1.5395e-7	
128	8.1368e-8	0.9231
256	4.1871e-8	0.9618
512	2.1243e-8	0.9823
1024	1.0700e-8	0.9928
2048	5.3696e-9	0.9981

для альвеновской волны

$N$	$\delta_N$	$R_N$
64	5.6148e-8	
128	2.9196e-8	0.9467
256	1.4920e-8	0.9718
512	7.5461e-9	0.9868
1024	3.7953e-9	0.9949
2048	1.9033e-9	0.9991

для медленной магнитозвуковой волны

$N$	$\delta_N$	$R_N$
64	1.2508e-7	
128	6.6601e-8	0.9124
256	3.4399e-8	0.9564
512	1.7485e-8	0.9796
1024	8.8157e-9	0.9914
2048	4.4262e-9	0.9974

#### 4. Заключение

В данной работе показано, что КМГД метод расчета уравнений сжимаемой магнитной гидродинамики позволяет на основе единого подхода моделировать широкий круг нестационарных МГД задач. При подобранных параметрах настройки КМГД алгоритма одномерные расчеты дают аккуратное представление распределений для всех физических переменных в гладкой части решения и на разрывах. Для всех рассмотренных примеров расчеты показывают уверенную сходимость численного решения к точному решению при сгущении пространственной сетки. Простота численной реализации, однородность алгоритма делают КМГД подход конкурентноспособным по сравнению с

существующими численными методами решения уравнений идеальной магнитогидродинамики.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 10-01-00136).

### Список литературы

1. *Т. Г. Елизарова, Е. В. Шильников* Анализ вычислительных свойств квазигазодинамического алгоритма на примере решения уравнений Эйлера, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 49:11 (2009), 1953–1969.
2. *Ю.В. Шеретов* Динамика сплошных сред при пространственно—временном осреднении. Москва—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.
3. *G.-S. Jiang, C.C. Wu* A high-order WENO finite difference scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics. J. Comp. Phys. **150**, 1999, p. 561.
4. *W. Dai, P. Woodward* An approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics. J. Comp. Phys. **111**, 1994, p. 354.
5. *W. Dai, P. Woodward* Extension of the piecewise parabolic method to multidimensional ideal magnetohydrodynamics. J. Comp. Phys. **115**, 1994, p. 485.
6. *P. A. Sturrock* Plasma Physics: An Introduction to the Theory of Astrophysical, Geophysical, and Laboratory Plasmas. Cambridge University Press, 1994.