

УДК 532.517

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В ТАНКАХ ГАЗОВОЗОВ

Елизарова Татьяна Геннадьевна, профессор, доктор физико-математических наук
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН
Москва, Россия
E-mail: telizar@mail.ru

Сабурин Дмитрий Сергеевич, аспирант
Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова
Москва, Россия
E-mail: ndmitry@list.ru

Ткаченко Игорь Вячеславович, доктор технических наук,
профессор кафедры гидроаэромеханики и морской акустики
Санкт-Петербургский государственный морской технический университет
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: igor.v.tkachenko@mail.ru

Тряскин Никита Владимирович, аспирант кафедры гидроаэромеханики
и морской акустики
Санкт-Петербургский государственный морской технический университет
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: nikita.tryaskin@smtu.ru

АННОТАЦИЯ

В работе приводятся результаты численного моделирования колебаний сжиженного газа в грузовом танке газовоза мембранного типа при его соударении с ледовой преградой. Основная цель настоящей работы состоит в разработке метода моделирования колебательных движений жидкости на основе двухмерных регуляризованных уравнениях мелкой воды. Для настройки параметров численного алгоритма использовалось одномерное приближение. Расчёты были выполнены для 10% заполнения бака с учётом формы его дна для случая направления скорости судна вдоль плоскости симметрии бака и под углом к ней. Полученные картины течения и распределение нагрузок на стенки танка как качественно, так и количественно хорошо согласуются с результатами расчетов по модели движения вязкой жидкости, в основе которой лежат уравнения Рейнольдса, дополненные стандартной $k-\epsilon$ моделью турбулентности, и метод Volume of Fluid (VoF), позволяющий эффективно отслеживать поверхность раздела сжиженный газ – газ.

Ключевые слова: регуляризация, уравнения мелкой воды, колебания в топливных баках, танк, колебания сжиженного газа, нагрузки.

NUMERICAL MODELING OF LIQUID FLUCTUATIONS IN FUEL TANKS

Elizarova Tatyana Gennadievna, professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Institute for Mathematical Modelling of the Russian Academy of Sciences
Moscow, Russia
E-mail: telizar@mail.ru

Saburin Dmitriy Sergeevich, PhD student
M. V. Lomonosov Moscow State University
Moscow, Russia
E-mail: ndmitry@list.ru

Tkachenko Igor Vyacheslavovich, Dr.Sci.Tech.,
the professor of DEPARTMENT OF HYDROMECHANICS AND MARINE ACOUSTICS
State Marine Technical University of Sankt-Petersburg
Sankt-Petersburg, Russia
E-mail: igor.v.tkachenko@mail.ru

Tryaskin Nikita Vladimirovich, PhD Student of DEPARTMENT OF HYDROMECHANICS AND
MARINE ACOUSTICS
State Marine Technical University of Sankt-Petersburg
Sankt-Petersburg, Russia
E-mail: nikita.tryaskin@smtu.ru

ABSTRACTS

In the current work the results of numerical simulation for oscillations of liquefied gas in the cargo tanks of the membrane type Liquefied Natural Gas (LNG) carrier due to impact interaction with the ice barrier are presented. The main goal of the present study is development the new method for simulation of the oscillating flow based on the two-dimensional regularized Shallow-Water equations. The one-dimension approach is applied to setting the parameters of the numerical algorithm. The calculations performed for 10% filling of the tank. The obtained flow patterns and hydrodynamic pressure loads on the tank walls either qualitative or quantitatively good agree with the results of another simulations. The last were obtained using the Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes equations (URANS), which coupled by standard $k-\epsilon$ turbulence model, and Volume of Fluid method (VoF). VoF allows to predict the interface between liquefied-gas and gas correctly.

Key words: regularization, shallow-water equation, sloshing.

Введение

Россия является одним из ведущих современных экспортеров нефти и газа. Важнейшим аспектом экспорта, наряду с непосредственно добычей топлива, является его транспортировка, которая осуществляется самым экономичным способом доставки груза - морским путем. При этом газ сжижается и закачивается в специальный топливный танк (рис. 1 и 2). Большинство месторождений находится за полярным кругом или в непосредственной близости от него, что определяет дополнительные сложности для транспортировки топлива. Поэтому суда-газовозы, работающие в арктических условиях, должны иметь ледовый класс, чтобы иметь возможность расчищать себе путь. При столкновении со льдиной жидкость в танке приходит в движение, и это движение может вызвать не только повреждения, но и разрушение стенки бака. Поэтому своевременной и важной является задача расчета колебаний жидкости в танках газовоза, их качественное описание и количественный расчет предельных нагрузок на стенки танка, вызванных сложными маневрами судна [1,2,3].

Согласно условиям технической безопасности, учитывающим конструкцию баков и толщину его стенок, транспортировка сжиженных газов допустима при заполнении бака меньше 15% и при его заполнении больше 75%. В первом случае помимо полных уравнений Навье-Стокса расчет возможен и с помощью двумерных уравнений мелкой воды [4]. Последнее позволяет существенно сократить времена счета, которые в этом случае составляют менее часа на персональном компьютере.



Рис. 1. Транспортировка газа морским путём

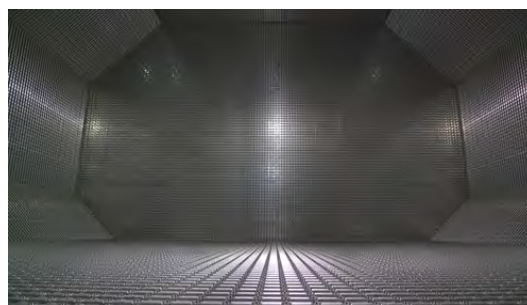


Рис. 2. Внутренний вид топливного бака

В данной работе рамках приближения мелкой воды проведено численное моделирование колебаний топлива в танке газовоза при его остановке после столкновения со льдиной. Расчеты выполнены для 10% заполнения бака с учетом формы его дна для случая направления скорости судна вдоль плоскости симметрии бака и под углом к ней. Получены картины течения и вычислены

распределения нагрузки на стенки бака. Проведено сопоставление расчета с данными, полученными при моделировании симметричного течения в приближении одномерных уравнений мелкой воды и в рамках трехмерных осредненных уравнений Навье-Стокса.

1. Результаты численного моделирования

1.1. Основные параметры задачи

Расчётной областью является ёмкость танка со следующими размерами: длина - 33.6 м, ширина - 29.8 м, высота - 23 м. Внешний вид ёмкости показан на рис. 2. Выберем неинерциальную систему координат, связанную с самим баком. В этой системе направим ось X вдоль движения судна, ось Z - противоположно ускорению свободного падения g , и ось Y - перпендикулярно осям X и Z (рис. 3).

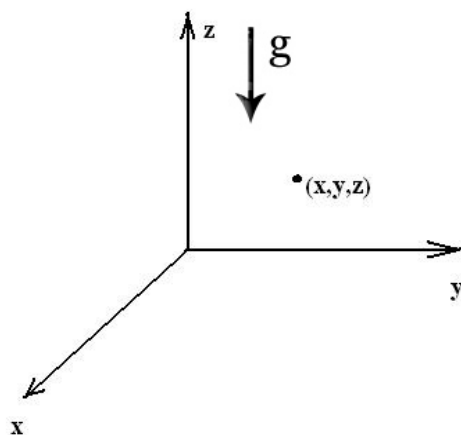


Рис. 3. Система координат

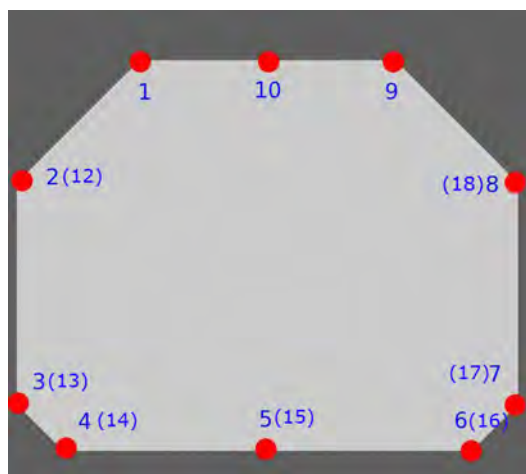


Рис. 4. Вертикальное сечение танка и обозначение реперных точек

На рис. 4 изображён поперечный срез ёмкости танка. В нижней части функция рельефа дна выглядит следующим образом:

$$b(x, y) = \begin{cases} 2.9 - y, & 0 \leq y \leq 2.9; \\ 0, & 2.9 \leq y \leq 26.9; \\ y - 26.9, & 26.9 \leq y \leq 29.8 \end{cases} \quad (1)$$

Размеры приведены в метрах.

Обозначим момент столкновения судна со льдиной $t = 0$. В этот начальный момент времени полагаем уровень жидкости $H(x, y) = b(x, y) + h(x, y) = 1.46$ м, что соответствует 10% заполнению бака. Здесь h - высота уровня жидкости над профилем дна.

Изменения во времени скорости движения судна-газовоза при его соударении с ледовым препятствием описываются полиномами шестой степени (рис. 5). Из графиков наглядно видно, что для всех трёх вариантов остановка судна происходит за время порядка 1 сек.

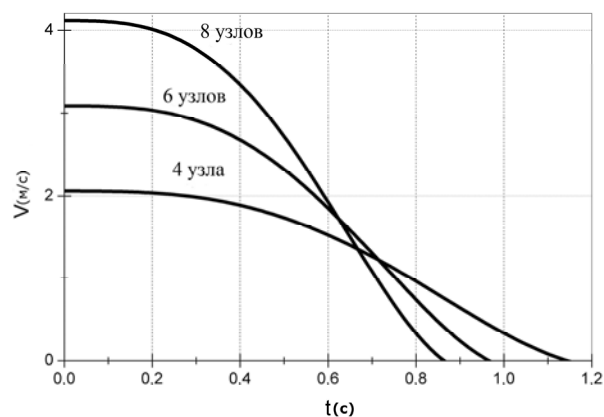


Рис. 5. Законы торможения судна-газовоза при его соударением с ледовым препятствием

Поведение жидкости в баке при внезапном торможении судна будем рассматривать в неинерциальной системе координат с помощью введения внешней силы $\vec{f} = (f_x, f_y)$, которая вычисляется на основе известного закона изменения скорости (рис. 5):

$$\vec{f}(t) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad (2)$$

С практической точки зрения интерес представляет величина нагрузки на стенки бака в процессе остановки судна. Давление в баке P вычисляется как $P(x, t) = P_{atm} + gh(x, t)\rho$, где $\rho = 700$ кг/м³ - плотность жидкости, P_{atm} атмосферное давление, включая давление паров жидкости.

1.2. Уравнения гидродинамики в приближении мелкой воды

Данная задача может быть решена в рамках уравнений гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости, записанных в приближении мелкой воды. В декартовой системе координат уравнения мелкой воды имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial u_x h}{\partial x} + \frac{\partial u_y h}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u_x h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (hu_x^2 + \frac{gh^2}{2}) + \frac{\partial}{\partial y} (hu_x u_y) &= \\ = hf_x - gh \frac{\partial b}{\partial x} - \mu u_x |u_x| & \quad (3) \\ \frac{\partial u_y h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hu_x u_y) + \frac{\partial}{\partial y} (hu_y^2 + \frac{gh^2}{2}) &= \\ = hf_y - gh \frac{\partial b}{\partial y} - \mu u_y |u_y| & \end{aligned}$$

где $h(x, y, t)$ - высота жидкости над уровнем дна, $u_x(x, y, t)$ и $u_y(x, y, t)$ - компоненты скорости течения, $f_x(x, y, t)$ и $f_y(x, y, t)$ - составляющие внешней силы, $b(x, y)$ - рельеф дна, g - ускорение силы тяжести, μ - коэффициент трения, задаваемый из эмпирических соображений. Схема течения и обозначения приведены на рис. 6.

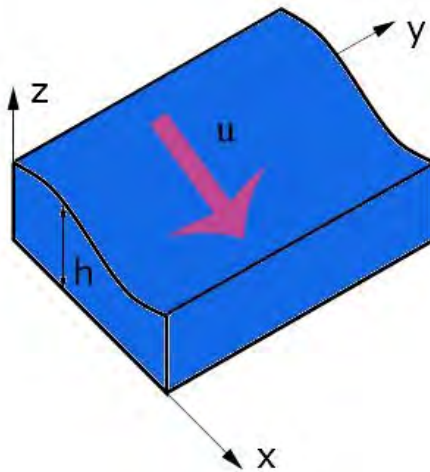


Рис. 6. Переменные уравнений мелкой воды

В начальный момент времени полагаем, что жидкость в танке неподвижна $u = 0$. Величина уровня жидкости известна и определяется из соотношения $H(x, y) = b(x, y) + h(x, y) = 1.46$ м, что соответствует 10% заполнению бака. В качестве граничных условий используем условия не-

протекания со скольжением для скорости и отражения для величины h :

$$u_n = 0, \quad \frac{\partial u_\tau}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial n} = 0$$

Здесь обозначено n - направление, перпендикулярное к границе области, τ - направление по касательной к границе области.

При колебаниях жидкости в баке могут образовываться зоны течения, в которых высота жидкости обращается в ноль - так называемые зоны сухого дна. Для описания течения с учётом таких зон с подвижной границей используется специальный алгоритм, позволяющий отслеживать границу с областями сухого дна.

2. Построение численного решения

2.1. Регуляризованные уравнения мелкой воды

Для численного решения уравнений мелкой воды будем использовать регуляризованный вид этих уравнений, который получается путём усреднения уравнений мелкой воды по некоторому малому промежутку времени [5]. Система регуляризованных уравнений мелкой воды (РУМВ) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx}}{\partial x} + \frac{\partial j_{my}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial hu_x}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx} u_x}{\partial x} + \frac{\partial j_{my} u_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh^2}{2} \right) &= \\ = h^* \left(f_x - g \frac{\partial b}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yx}}{\partial y} - \mu u_x |u_x| & \quad (4) \\ \frac{\partial hu_y}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx} u_y}{\partial x} + \frac{\partial j_{my} u_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{gh^2}{2} \right) &= \\ = h^* \left(f_y - g \frac{\partial b}{\partial y} \right) + \frac{\partial \Pi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yy}}{\partial y} - \mu u_y |u_y| & \end{aligned}$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned} h^* &= h - \tau \left(\frac{\partial hu_x}{\partial x} + \frac{\partial hu_y}{\partial y} \right) \\ j_{my} &= h(u_y - w_y), \quad j_{mx} = h(u_x - w_x) \\ w_x &= \frac{\tau}{h} \left(\frac{\partial (hu_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial (hu_x u_y)}{\partial y} + gh \frac{\partial h}{\partial x} + gh \frac{\partial b}{\partial x} - hf_x \right) \\ w_y &= \frac{\tau}{h} \left(\frac{\partial (hu_x u_y)}{\partial x} + \frac{\partial (hu_y^2)}{\partial y} + gh \frac{\partial h}{\partial y} + gh \frac{\partial b}{\partial y} - hf_y \right) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{xx} &= u_x w_x^* + R^* + \Pi_{NSxx}, & \Pi_{yx} &= u_y w_x^* + \Pi_{NSyx} \\
\Pi_{xy} &= u_x w_y^* + \Pi_{NSxy}, & \Pi_{yy} &= u_y w_y^* + R^* + \Pi_{NSyy} \\
w_x^* &= \tau(hu_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + hu_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{gh^2}{2}) + gh \frac{\partial b}{\partial x} - hf_x) \\
w_y^* &= \tau(hu_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + hu_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{gh^2}{2}) + gh \frac{\partial b}{\partial y} - hf_y) \\
R^* &= g\tau(u_x \frac{\partial}{\partial x}(\frac{h^2}{2}) + u_y \frac{\partial}{\partial y}(\frac{h^2}{2}) + h^2(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y})) \\
\Pi_{NSxx} &= \tau \frac{gh^2}{2} 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} \\
\Pi_{NSxy} &= \Pi_{NSyx} = \tau \frac{gh^2}{2} (\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}) \\
\Pi_{NSyy} &= \tau \frac{gh^2}{2} 2 \frac{\partial u_y}{\partial y}
\end{aligned} \tag{6}$$

При $\tau = 0$ система уравнений (4) - (6) переходит в систему уравнений мелкой воды (3). При проведении численных расчётов слагаемые с коэффициентом τ рассматриваются как регуляризирующие добавки, обеспечивающие точность и устойчивость численного решения. Примеры применения указанного алгоритма к широкому кругу течений в приближении мелкой воды изложены, например, в [5,6,7,8].

2.2. Разностная аппроксимация регуляризованных уравнений мелкой воды

Для численного решения регуляризованных уравнений мелкой воды будем использовать явную по времени разностную схему с аппроксимацией всех пространственных производных центральными разностями [9]. Значения искомых переменных $h(x, y, t)$ и $u(x, y, t)$ отнесены к узлам пространственной сетки. Устойчивость численного алгоритма обеспечивается слагаемыми с коэффициентом τ , величина которого связывается с шагами пространственной сетки Δx и Δy и вычисляется в виде:

$$\tau = \frac{\Delta x + \Delta y}{2c}, \quad c = \sqrt{gh(x, y, t)} \tag{7}$$

где c - скорость распространения малых возмущений, рассчитанная в приближении модели мелкой воды, $0 < \alpha < 1$ численный коэффициент, выбираемый из условий точности и устойчивости счета. Шаг по времени выбирается в соответствии с условием Куранта, которое для данной задачи имеет вид:

$$\Delta \tau = \beta \frac{\Delta x + \Delta y}{2c_{\max}} \tag{8}$$

Здесь число Куранта $0 < \beta < 1$ зависит от величины параметра регуляризации τ в виде $\beta = \beta(\alpha)$ и подбирается в процессе вычислений для обеспечения монотонности численного решения. В расчётах использовались равномерные пространственные сетки.

Существенной особенностью задачи является существование подвижной границы между областью, занятой жидкостью, и зонами сухого дна, конфигурация которых меняется во времени. Последнее усложняет вычислительный процесс и делает его менее устойчивым. Численный алгоритм для расчёта движения зоны сухого дна для регуляризованных уравнений мелкой воды был предложен в [6] и имеет следующий вид: если в процессе расчёта оказывается, что $h(x, y) < \varepsilon$, то полагаем $u(x, y) = 0$ и $\tau = 0$. Величина параметра отсечения ε связывается с величиной наклона дна соотношением

$$\varepsilon(x, y) = \Delta x \left| \frac{db}{dx} \right|_{x,y} + \Delta y \left| \frac{db}{dy} \right|_{x,y} \tag{9}$$

Аппроксимация условия (9) для двумерных уравнений строится следующим образом:

$$\varepsilon_{i,j} = k \max \{ \Delta_{i,j}, \Delta_{i\pm 1,j}, \Delta_{i,j\pm 1}, \Delta_{i\pm 1,j\pm 1} \}$$

где $\Delta_{i,j} = |b_{i+1,j} - b_{i-1,j}| + |b_{i,j+1} - b_{i,j-1}|$.

Значение коэффициента $0 < k < 1$ и, соответственно, предельного уровня отсечки ε , подбирается в процессе вычислений из соображений разумной точности описания зон сухого дна.

2.3. Регуляризованные уравнения мелкой воды

Разностный алгоритм решения задачи включает в себя несколько настроечных параметров - это размер шагов по пространству Δx и Δy , шаг по времени Δt , который определяется числом Куранта β , параметр регуляризации α , и величины для расчёта движения границы области сухого дна - параметр отсечения ε или коэффициент k , связанный с наклоном дна. Все эти величины определяют точность и трудоёмкость численного решения.

Оптимальное значение пространственного шага обусловлено выбором между быстротой решения, его точностью и устойчивостью расчёта, поскольку уменьшение шага по пространству требует пропорционального уменьшения шага по времени.

Предварительная настройка параметров разностного алгоритма была выполнена при численном моделировании данной задачи в одномерном

приближении, когда решение рассчитывалось только в плоскости симметрии резервуара без учёта наклона дна [8]. Для двумерного расчёта потребовалась дополнительная калибровка полученных ранее значений с учётом наклона дна бака, то есть величин ε и k .

Зависимости давления жидкости на стенку бака в точке 5 (рис.4) при сгущении пространственной сетки приведён на рис. 7. Здесь $\alpha = 0.3$, $k = 0.5$. Графики показывают сходимость численного решения задачи при дроблении пространственной сетки. В качестве оптимального шага было выбрано значение $\Delta x = \Delta y = 0.2$ м.

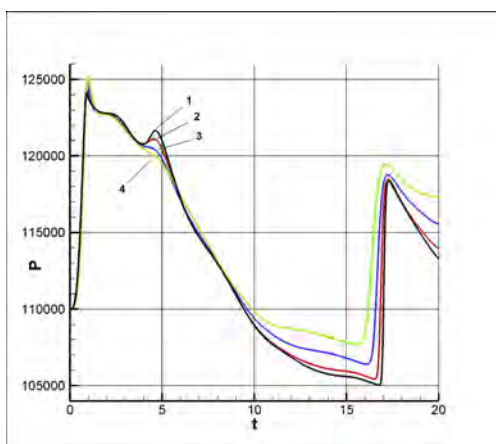


Рис. 7. Зависимость давления от времени для реперной точки 5 при изменении шага пространственной сетки Δ :

$$\Delta = 0.2(1), 0.3(2), 0.5(3), 0.7(4) \text{ для } \alpha = 0.3, k = 0.5$$

Для этого шага было исследовано поведение решения при различных значениях параметра регуляризации α : чем меньше параметр регуляризации, тем точнее решение. С другой стороны, при малом значении α в решении появляются нефизичные осцилляции и в дальнейшем решение может терять устойчивость. На рисунке 8 хорошо видна сходимость решения в той же точке 5 при различных значениях коэффициента α . В результате проведённого анализа было выбрано минимальное из приемлемых решений - параметр $\alpha = 0.3$.

Дополнительная сложность задачи заключается в том, что в начальный момент времени из-за наклона нижней части стенок бака в 1/4 части расчётной области имеется зона сухого дна. При численном решении задачи этот факт вызывает сильные нефизичные осцилляции решения в начальные моменты времени вблизи границы сухого дна. Для исключения этого численного эффекта в начальный момент времени удобно положить, что в указанных областях высота уровня жидкости имеет малое, но не нулевое значение $h(x, y) = \delta\varepsilon = 0.0001$ м. При дальнейшем

уменьшении $\delta\varepsilon$ погрешность решения практически не изменяется, в то время как устойчивость алгоритма, то есть шаг по времени, уменьшается. Для рассматриваемого течения оптимальное значение $k = 0.2$.

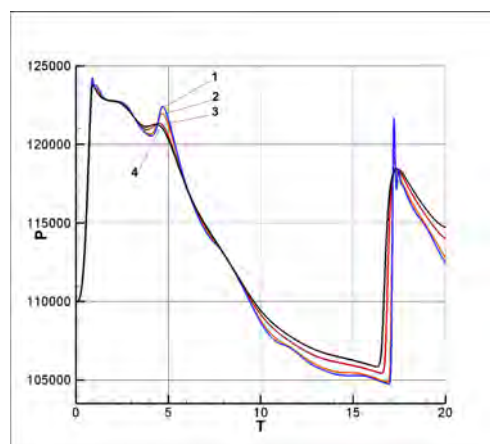


Рис. 8. Зависимость давления от времени для реперной точки 5 при изменении параметра α : $\alpha = 0.1(1), 0.2(2), 0.3(3), 0.5(4)$ для $\Delta = 0.2$, $k = 0.2$

Указанные параметры расчёта соответствуют числу Куранта $\beta = 0.01$. Выбор столь малого числа Куранта β , и, соответственно, малого шага по времени, обусловлен жёсткими разрывами, возникающими в задаче в начальные моменты времени. Для ускорения расчёта шаг по времени может быть сделан переменным, в зависимости h_{\max} , что позволяет существенно увеличить его на больших временах расчёта, когда начальные градиенты решения достаточно сгладились. Изучение свойств численного алгоритма для задачи колебания жидкости в резервуаре в одномерном приближении и подбор оптимальных параметров разностной схемы приведён в [8].

Таким образом оптимальными параметрами решения задачи является следующий набор величин:

- Равномерная пространственная сетка с шагами: $\Delta x = \Delta y = \Delta = 0.2$ м;
 - Параметр регуляризации: $\alpha = 0.3$;
 - Шаг по времени: $\Delta t = \beta \frac{\Delta}{\sqrt{gh_{\max}}} \approx 10^{-3}$ с,
- что соответствует числу Куранта $\beta = 0.01$;
- Параметры сухого дна: $\delta\varepsilon = 0.0001$ м, $k = 0.2$.

В этом случае вычислительная погрешность решения составляет 0.08 м.

Величина коэффициента трения составляет $\mu = 0.001$. Исключение силы трения $\mu = 0$ мало меняет результаты численного расчёта, что

свидетельствует о слабом влиянии силы трения в данной задаче.

3. Результаты численного моделирования

3.1. Столкновение по направлению оси судна

Предполагаем, что перед столкновением скорость судна направлена вдоль оси OX , то есть в плоскости симметрии вдоль продольной оси судна, и скорость судна перед соударением составляет 8 узлов.

Общая картина течения и его особенности отражены на рис. 9–12. На указанных рисунках приведены линии тока на последовательные моменты времени, цветом обозначены линии уровня жидкости $H(x, y) = h(x, y) + b(x, y)$. Рисунки показывают характерный заброс жидкости вверх по передней стенке бака и постепенное понижение этого максимума с течением времени. Виден также существенно двумерный характер течения вне плоскости симметрии, формирование и эволюция вихревых зон и линий растекания. Эти вихревые зоны образуются в результате жёсткого торможения судна, а также из-за наличия сложной геометрии стенок бака и не плоского профиля его дна. С течением времени амплитуда колебаний жидкости в баке уменьшается, колебания приобретают гармонический вид, который соответствует распространению гравитационных волн в жидкости [4]. С течением времени колебания полностью затухают [8]. Детальное исследование развития течения и его структуры было проанализировано на основе фильмов, построенных авторами по результатам расчётов.

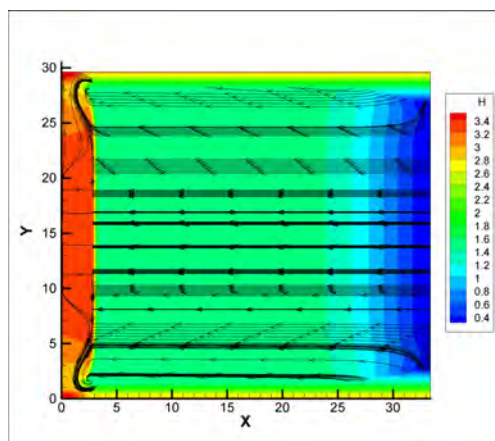


Рис. 9. Линии тока и изолинии уровня поверхности при столкновении вдоль оси OX , $t=1.5$ с

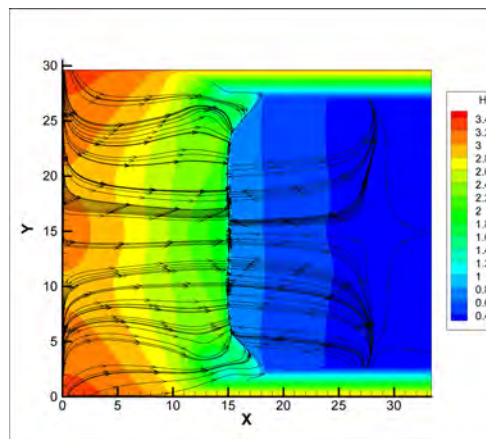


Рис. 10. Линии тока и изолинии уровня поверхности при столкновении вдоль оси OX , $t=5$ с

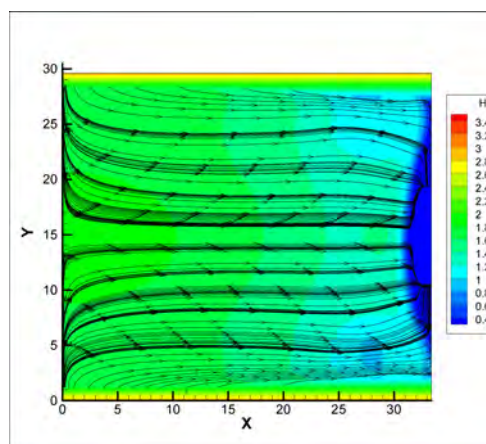


Рис. 11. Линии тока и изолинии уровня поверхности при столкновении вдоль оси OX , $t=8$ с

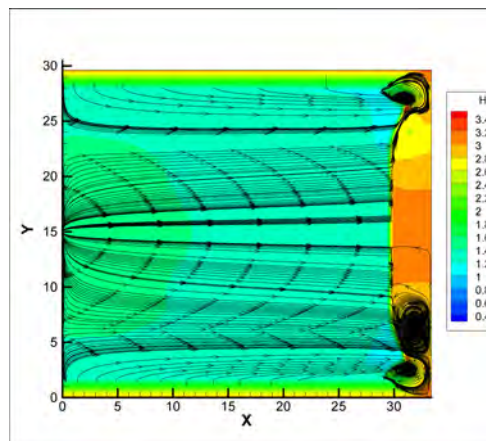


Рис. 12. Линии тока и изолинии уровня поверхности при столкновении вдоль оси OX , $t=10$ с

Схожая топология движения свободной поверхности жидкости для этого варианта течения была получена в рамках использования осреднённых уравнений Навье-Стокса, когда дополнительно учитывалась вихревая динамика фракций газа, образующихся над поверхностью жидкости. При этом обнаружено, что в газообразной среде над поверхностью происходит активное формирование вихревых структур, которые образуются

не только вблизи поверхности раздела фаз, но и во всем объеме танка, заполненного газом.

Графики для величин нагрузок на стенки танка для характерных реперных точек, расположенных в плоскости симметрии, приведены на рис. 13 для двумерных уравнений мелкой воды, на рис. 14 для трёхмерных осреднённых уравнений Навье-Стокса [3] и на рис. 15 для решения этой задачи в плоскости симметрии на основе одномерных уравнений мелкой воды [8]. Из графиков видно, что решения, рассчитанные в трёх указанных постановках, в плоскости симметрии (точки 5 и 15) очень близко совпадают между собой не только по значению максимального пика давления, но и по времени его появления, а также по времени появления второго и третьего пиков, и их высоты. Сравнение решения задач в рамках двумерных уравнений мелкой воды и трёхмерных уравнений Навье-Стокса вне плоскости симметрии (точки 4 и 14) также показывает, что полученные течения практически идентичны. Исключение составляет небольшие отличия поведения решения на границе в реперных точках 3 и 7 (рис. 6), где расположена граница жидкости с областью сухого дна (здесь не приведены). Замеченные различия согласуются с общей картиной движения топлива, и тем самым не представляют особого практического интереса, так как в этих зонах не наблюдаются существенные нагрузки на стенки.

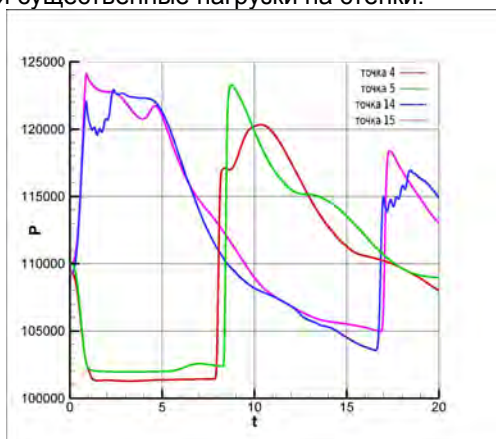


Рис. 13. Эволюция давления. Двумерные уравнения мелкой воды

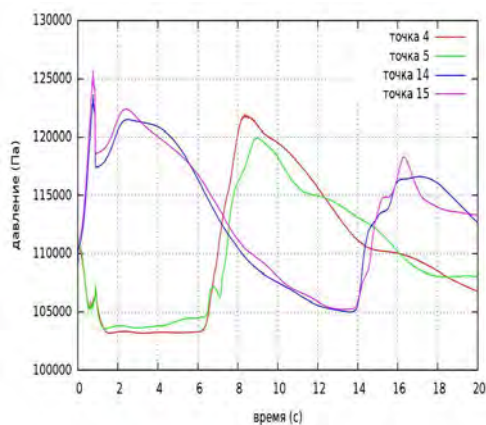


Рис. 14. Эволюция давления. Трёхмерные уравнения Навье-Стокса

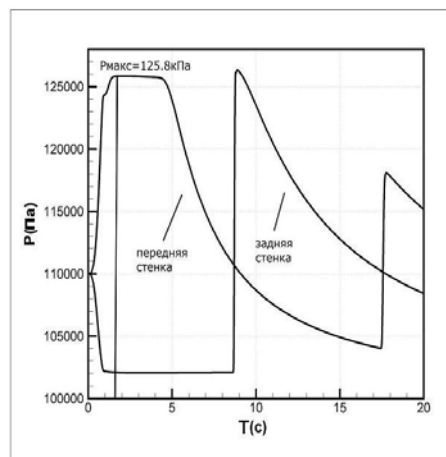


Рис. 15. Эволюция давления. Одномерные уравнения мелкой воды, расчёт в плоскости симметрии

Далее в таблице 1 приведены максимальные значения давлений на стенку бака, полученные с помощью трёх указанных подходов для трёх значений начальной скорости судна:

Таблица 1

Максимальные (пиковые) значения давления в контрольных точках

	8 узлов	6 узлов	4 узла
3D Н	125 кПа	121 кПа	117 кПа
1D РУМВ	125.8 кПа	121.5 кПа	116.6 кПа
2D РУМВ	124.2 кПа	120 кПа	116.2 кПа

Таблица показывает, что все полученные значения пиковых нагрузок на стенки бака оказываются весьма близкими.

Таким образом, мы получили подтверждения адекватности решения задачи о колебаниях топлива на основе решения полных уравнений Навье-Стокса и в рамках приближения мелкой воды. Хорошее соответствие данных, полученных в рамках разных математических моделей и различной алгоритмической реализации для трёх значений начальной скорости судна, подтверждает правильность результатов математического моделирования поставленной задачи.

3.2. Столкновение под углом к оси судна

Важным практическим случаем столкновений является вариант столкновения с льдиной, происходящее под небольшим углом к продольной оси судна. Такой вид остановки судна является частным случаем двойного столкновения с ледовым препятствием, при котором корабль, ударяясь об одну льдину, затем сталкивается уже под некоторым ненулевым углом с другим препятствием. Здесь мы не будем рассматривать конкретный случай двойного столкновения, а рассмотрим его модельный вариант, для чего направим скорость $V(t)$ под некоторым углом к оси судна ОХ, что приводит к появлению отличной от

нуля компоненты силы инерции f_y . Далее приведён расчёт для столкновения под углом 20 градусов.

Данное течение является существенно двумерным и несимметричным. Линии тока этого течения на те же последовательные моменты времени, как и в варианте с нулевым углом столкновения, приведены на рис. 16 - 19. Цветом обозначены линии уровня жидкости $H(x, y) = h(x, y) + b(x, y)$. Наличие ненулевой компоненты силы инерции f_y приводит к кардинальной перестройке течения и перераспределению нагрузок на стенки бака по сравнению со случаем симметричного течения.

При этом наблюдаются колебания жидкости, которые являются результатом нелинейного взаимодействия колебаний вдоль осей OX и OY . В частности, максимальные значения уровня в начальные моменты времени сосредоточены только в левой нижней части плоскости XY , а наибольшие значения достигаются в точке 4. Интересен и другой факт - так как размеры резервуара по осям x и y близки, $L_x \approx L_y$, то следующий максимум уровня жидкости возникает на противоположной стенке бака в точке 16. Это наглядным образом видно на рис. 16 и 19. Между этими двумя пиками уровня жидкости движение представляет собой два поперечных колебания, которые сосуществуют практически независимо друг от друга (рис. 17 и 18). Графики нагрузок на стенки бака в этих точках, а также для сравнения в точке 5 приведены на рис. 20. Отметим, что по сравнению с вариантом симметричного течения, здесь образуется более высокое максимальное давление на стенку - 127.5 кПа. Детальное исследование развития этого сложного течения и его структуры было изучено с использованием фильмов, построенных по результатам расчётов.

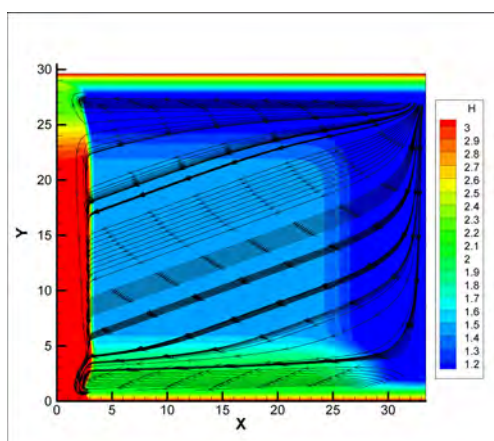


Рис. 16. Линии тока и изолинии уровня поверхности при столкновении под углом к оси OX , $t=1.5$ с

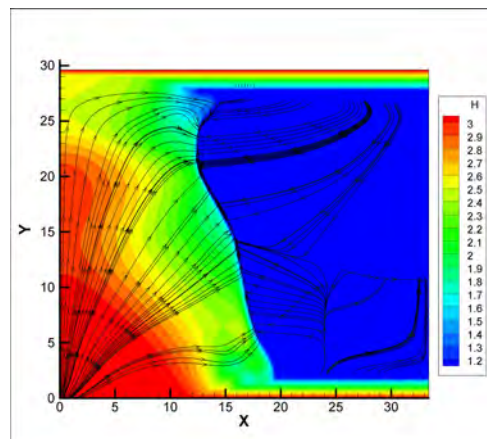


Рис. 17. Линии тока и изолинии уровня поверхности при столкновении под углом к оси OX , $t=5$ с

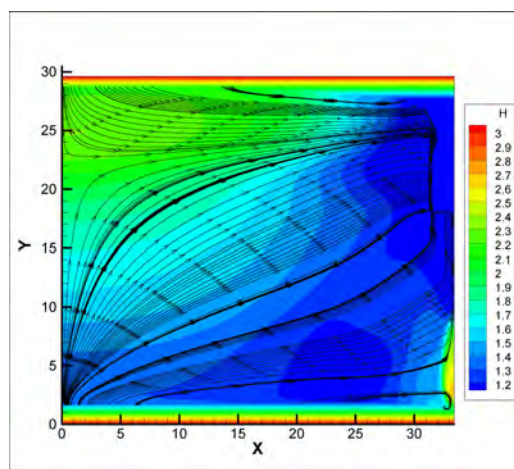


Рис. 18. Линии тока и изолинии уровня поверхности при столкновении под углом к оси OX , $t=8$ с

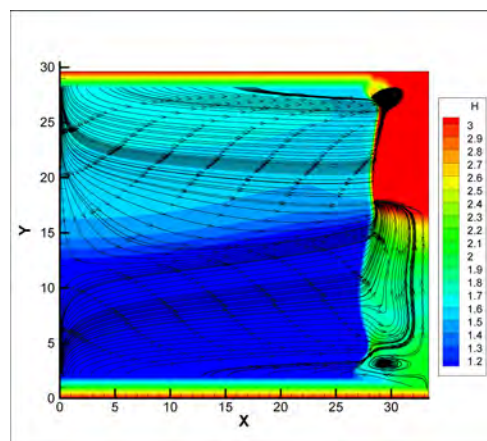


Рис. 19. Линии тока и изолинии уровня поверхности при столкновении под углом к оси OX , $t=10$ с

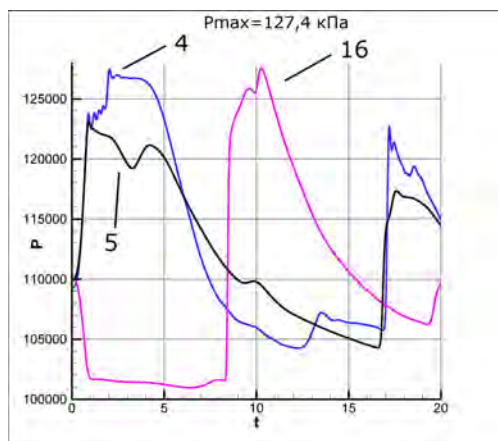


Рис. 20. Зависимость давления сжиженного газа на стенку при столкновении под углом. Реперные точки 4, 5, 16

Заключение

В настоящей работе были выполнены расчеты колебаний сжиженного газа в танке газове́за. Использовались две математических модели: на основе уравнений Навье-Стокса и регуляризованных уравнениях мелкой воды. Результаты расчетов показали, что оба подхода дают схожую картину колебательных процессов как по топологии течения, так и по нагрузкам на стенки танков.

Литература

1. Гурьев Ю.В., Ткаченко И.В., Якушенко Е.И. Компьютерные технологии в корабельной гидродинамике: состояние и перспективы // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*, Сб. научн. трудов. Т 4, № 3, 2011, с. 8-21.
2. Сафрай А.С., Ткаченко И.В. Численное моделирование гравитационных течений жидкости в наклонных каналах // *Изв. РАН, Механика жидкости и газа*. 2009. № 1. № 3, с. 8-21.
3. Дукарский А.О., Кисилев Д.Б., Ткаченко И.В., Тряскин В.Н., Тряскин Н.В., Якимов В.В. Математическое моделирование колебаний жидкости в грузовых емкостях газове́зов при соударении с ледовым препятствием // *Морские интеллектуальные технологии*. 2011. № 4. с. 69-75.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*. Наука, М., 1986.
5. Булатов О.В., Елизарова Т.Г. Регуляризованные уравнения мелкой воды и эффективный метод численного моделирования течений в неглубоких водоемах // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2011, т.51, № 1, с.170–184.
6. Елизарова Т.Г., Истомина М.А., Шелковников Н.К. Численное моделирование формирования уединенной волны в кольцевом аэрогидроканале. *Математическое моделирование*, 2012, том 24, № 4, с.107-116.
7. Елизарова Т.Г., Сабурин Д.А. Численное моделирование колебаний жидкости в топливных баках. *Математическое моделирование*, 2013, том 25, № 3, с.75-88.
8. Елизарова Т.Г. *Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений*. Москва, Научный мир, 2007 -- 351 с.

References

1. Gur'ev Yu.V., Tkachenko I.V., Yakushenko E.I. Komp'yuternye tekhnologii v korabel'noy gidrodinamike: sostoyaniye i perspektivy // *Fundamental'naya i prikladnaya gidrofizika*,. Sb. nauchn. trudov. T 4, № 3, 2011, s. 8-21.
2. Safray A.S., Tkachenko I.V. Chislennoe modelirovaniye gravitatsionnykh techeniy zhidkosti v naklonnykh kanalakh. *Izv. RAN, Mekhanika zhidkosti i gaza*. 2009. № 1. № 3, s. 8–21.
3. Dukarskiy A.O., Kisilev D.B., Tkachenko I.V., Tryaskin V.N., Tryaskin N.V., Yakimov V.V. Matematicheskoye modelirovaniye kolebaniy zhidkosti v gruzovykh emkostyakh gazovozov pri soudarenii s ledovym prepyatstviem. *Morskie intellektual'nye tekhnologii*. 2011. № 4. s. 69–75.
4. Landau L.D., Lifshits E.M. *Gidrodinamika*. Nauka, M., 1986.
5. Bulatov O.V., Elizarova T.G. Regulyaryzovannyye uravneniya melkoy vody i effektivnyy metod chislennogo modelirovaniya techeniy v neglubokikh vodoemakh. *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.*, 2011, t.51, № 1, s.170–184.
6. Elizarova T.G., Istomina M.A., Shelkovnikov N.K. Chislennoye modelirovaniye formirovaniya uedinennoy volny v kol'tsevom aerogidrokhanale. *Matematicheskoye modelirovaniye*, 2012, tom 24, № 4, s.107–116.
7. Elizarova T.G., Saburin D.A. Chislennoye modelirovaniye kolebaniy zhidkosti v toplivnykh bakakh. *Matematicheskoye modelirovaniye*, 2013, tom 25, № 3, s.75–88.
8. Elizarova T.G. *Kvazigazodinamicheskiye uravneniya i metody rascheta vyazkikh techeniy*. Moskva, Nauchnyy mir, 2007. 351 s.