

# ВЕРИФИКАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО АЛГОРИТМА НА ОСНОВЕ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ПРИМЕРЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ ТЕРМОГРАВИТАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ

© 2024 г. М.А. Кирюшина<sup>1, \*</sup>, Т.Г. Елизарова<sup>1</sup>, А.С. Епихин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. Келдыша РАН, Россия

<sup>2</sup>109004 Москва, ул. А. Солженицына, 25, ИСП им. В.П. Иванникова РАН, Россия

\*e-mail: m\_ist@mail.ru

Поступила в редакцию 23.11.2023 г.

Переработанный вариант 18.04.2024 г.

Принята к публикации 28.06.2024 г.

Показано, что квазигидродинамический алгоритм позволяет моделировать течения вязкой несжимаемой жидкости в задачах термогравитационной конвекции при больших числах Грасгофа, включая корректное описание возникновения колебательного процесса. Приведены тесты для квадратной и прямоугольной областей. Расчеты выполнены в рамках реализации квазигидродинамического алгоритма в открытом пакете OpenFOAM. Библ. 16. Фиг. 12. Табл. 3.

**Ключевые слова:** метод контрольного объема, открытый пакет OpenFOAM, квазигидродинамический алгоритм, вязкая несжимаемая жидкость, гравитационная конвекция.

DOI: 10.31857/S0044466924100143, EDN: JYUUMW

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Оценки возможностей алгоритмов в задачах моделирования термогравитационной конвекции привлекают интерес исследователей для последующего адекватного выбора численного алгоритма. Особенный интерес представляют течения, в которых возможно возникновение нестационарных режимов, которые могут предшествовать зарождению ламинарно-турбулентного перехода. Теоретические исследования порога устойчивости и параметров вторичных конвективных течений в задачах термогравитационной конвекции изучены, например, в классической монографии [1]. Экспериментальное изучение устойчивости течений проводилось в широком диапазоне чисел Грасгофа  $G_r$  и Прандтля  $P_r$ . В частности, в экспериментах с этиловым спиртом [2] неустойчивость термогравитационной конвекции наблюдалась при больших  $P_r$  порядка 20, в задачах о течении расплавов [3] неустойчивые течения возникали при малых значениях  $P_r$  порядка 0.01.

Для задач термогравитационной конвекции в приближении Буссинеска показательными и удобными численными тестами для определения зарождения колебаний служат течения в квадратной и прямоугольной областях в двумерной постановке для чисел  $P_r$  порядка 1. Использование именно этих тестовых задач обусловлено простотой их постановок и одновременной сложностью возникающих течений. Большое количество полученных для этих задач результатов позволяет объективно оценивать тестируемые методы. Особый интерес в данных задачах представляет переход от стационарного течения к нестационарному, который имеет место с ростом числа Грасгофа или Рэлея. Детальный обзор имеющихся результатов моделирования задач термогравитационной конвекции в прямоугольных областях с использованием разнообразных алгоритмов не представляется возможным. Среди результатов отметим несколько последних работ [4–9] и библиографии к ним. Здесь применялись методы высокого порядка точности по времени и пространству с использованием записи уравнений в переменных функция тока-вихрь скорости и скорость – давление [4, 5], подходы в рамках Лэттис-Больцман (Lattice-Boltzmann) алгоритмов для сжимаемого газа при малых числах Маха [6, 9], спектральные методы [7] и методы с локально-сгущающимися пространственными сетками [8]. Эти тесты использовались и для верификации отдельных аспектов открытого программного обеспечения для задач гидродинамики, обзор которых можно найти в [10].

В данной статье авторы используют задачу моделирования термогравитационной конвекции в квадратной и прямоугольной областях для проверки работы численного алгоритма, основанного на регуляризованных, или

квазигидродинамических (КГидД), уравнениях для описания течений вязкой несжимаемой жидкости. Описание КГидД-уравнений изложено, например, в [11–13]. Ряд результатов по тестированию численного алгоритма для указанных задач, проведенного в рамках исследовательских программ, приведено в [11–14]. Здесь рассматривались двумерные течения в плоской и цилиндрической геометрии, аппроксимация строилась на прямоугольных сетках, распараллеливание расчетов не проводилось. Позднее была создана усовершенствованная версия алгоритма, которая позволяет проводить расчеты на трехмерных неструктурированных сетках и допускает использование параллельных вычислений. Этот вариант алгоритма был включен в качестве отдельного вычислительного ядра в открытый программный комплекс OpenFOAM [15]. Последнее позволяет описывать сложные конфигурации расчетной области и использовать многопроцессорные вычислительные комплексы для ускорения вычислений. Первый вариант использования КГидД алгоритма для расчета термогравитационной конвекции в новой версии изложен в [16]. В данной работе проведено тестирование этого доработанного алгоритма на примере известных двумерных задач термогравитационной конвекции, включающих переход к нестационарному режиму течения при больших числах Грасгофа.

В первом разделе приведено описание КГидД-уравнений для задач термогравитационной конвекции в приближении Буссинеска и краткое описание численного алгоритма. Во втором разделе рассмотрена соответствующая задача при больших числах Грасгофа в квадратной каверне. Прослежен переход от стационарного течения к нестационарному. Полученные результаты позволяют уточнить параметры настройки алгоритма, оценить сходимость численного решения на последовательности сгущающихся сеток и сопоставить полученные результаты с имеющимися в литературе данными. В третьем разделе рассматривается задача о нестационарном течении в прямоугольной каверне размером 1:8 с числом Рэлея  $Ra = 3.4 \times 10^5$ . Полученные выводы приведены в заключении.

## 2. КГидД-УРАВНЕНИЯ И ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ

Для численного моделирования используется КГидД-метод, основой которого является регуляризация системы уравнений Навье–Стокса. Регуляризация уравнений основана на предположении, что массовая плотность потока жидкости отличается от среднего импульса единицы объема на малую величину. Это отличие приводит к появлению малых диссипативных добавок в исходной системе уравнений. Эти слагаемые имеют физичный характер и позволяют использовать условно устойчивую явную разностную схему с аппроксимацией всех пространственных производных центральными разностями.

Приведем вид КГидД-системы уравнений в приближении Обербека–Буссинеска согласно [11–14]:

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{w}) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}((\mathbf{u} - \mathbf{w}) \otimes \mathbf{u}) + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = \frac{1}{\rho_0} \operatorname{div} \Pi - \beta \mathbf{g}(T - T_0), \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}((\mathbf{u} - \mathbf{w})T) = \chi \Delta T. \tag{3}$$

Вектор поправки к скорости  $\mathbf{w}$  и тензор вязких напряжений  $\Pi$  вычисляются как

$$\mathbf{w} = \tau \left[ (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p + \beta \mathbf{g}(T - T_0) \right], \quad \Pi = \Pi_{NS} + \rho_0 \mathbf{u} \otimes \mathbf{w}. \tag{4}$$

Здесь  $\tau$  – параметр регуляризации, который имеет размерность времени. КГидД-система тесно связана с исходной системой уравнений Навье–Стокса и имеет ряд точных решений, совпадающих с точными решениями исходной системы. В частности, точное решение стационарной задачи о течении между двумя вертикальными бесконечными разнонагретыми пластинами в поле силы тяжести в рамках уравнений Навье–Стокса, приведенное в [1] является также и точным решением этой задачи для КГидД-уравнений [11]. При  $\tau = 0$  регуляризованная система переходит в исходную систему уравнений.

Опыт численного моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости показал, что при больших скоростях вынужденной конвекции и малых значениях коэффициента теплопроводности в численном решении уравнения переноса для температуры (3) могут появляться нефизичные осцилляции. Это свидетельствует о недостаточности введенного в уравнение регуляризатора, который определяется величиной  $\mathbf{w}$  (4). Эти численные осцилляции сглаживаются при введении еще одного сглаживающего слагаемого в правую часть уравнения (3), которое принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}T) = \operatorname{div}(\mathbf{w}T) + \chi \Delta T + \operatorname{div}(\tau \mathbf{u} \cdot \nabla T). \tag{5}$$

Именно такой вид регуляризации для уравнения переноса использован при реализации алгоритма в открытом комплексе OpenFOAM [12, 13].

В отличие от системы уравнений Навье–Стокса в КГидД-системе уравнение Пуассона для давления непосредственно следует из уравнения неразрывности. Действительно, подставляя в уравнение неразрывности (1) выражение для  $\mathbf{w}$  (4), сразу получаем уравнение для давления при постоянных значениях  $\rho_0$  и  $\tau$ :

$$\frac{1}{\rho_0} \Delta p = -\operatorname{div}[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] + \frac{1}{\tau} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{div}(\beta \mathbf{g}(T - T_0)). \quad (6)$$

Граничные условия для давления в этом случае являются прямым следствием поставленных в задаче граничных условий для векторов скорости  $\mathbf{u}$  и добавки к скорости  $\mathbf{w}$ . Например, для твердой непроницаемой стенки в качестве граничного условия можно поставить равенства нулю нормальных к границе компоненты скорости  $\mathbf{u}_n = 0$  и добавки  $\mathbf{w}_n = 0$ . Из этих двух условий непосредственно следует граничное условие для давления в виде

$$\nabla p = -\rho_0 \beta \mathbf{g}(T - T_0). \quad (7)$$

Для проведения расчетов с применением КГидД-системы необходимо подбирать параметр регуляризации  $\tau$ . При слишком больших значениях  $\tau$  слагаемые, пропорциональные этому коэффициенту (регуляризаторы), начинают доминировать, что приводит сначала к искажению численного решения, а затем к его разрушению. Если  $\tau$  слишком мало, то для устойчивости численного решения требуется неприемлемо малый шаг по времени. Как показывает опыт вычислений, начиная с некоторого значения уменьшение параметра  $\tau$  перестает влиять на точность численного решения. Выбор параметра регуляризации определяет устойчивость алгоритма, его точность и трудоемкость, поэтому в расчете следует подбирать его оптимальное значение.

Как показывает вычислительная практика, шаг интегрирования по времени  $\Delta t$ , обеспечивающий условную устойчивость разностного алгоритма, близок к величине  $\tau$ .

Порядок базового значения коэффициента  $\tau_0$  определим из условия, чтобы коэффициент перед вязкими слагаемыми превосходил величину параметра регуляризации. Для этого приведем уравнение импульса (2) к безразмерному виду и оценим величины коэффициентов в правой части уравнения. Координаты, время, скорость, давление и температуру будем нормировать, соответственно, на величины  $H$ ,  $\frac{H}{u_0}$ ,  $u_0$ ,  $\rho_0 u_0^2$ ,  $\Delta T$ , где  $H$  и  $u_0$  — характерный размер и скорость в задаче,  $\Delta T$  — перепад температур между стенками. При переходе к безразмерным переменным уравнение (2) сохранит свой вид, но в слагаемых в его правой части появятся безразмерные коэффициенты, соответственно  $\frac{\nu}{H u_0} = \frac{1}{\operatorname{Re}}$  — коэффициент перед вязкими слагаемыми,  $\frac{\tau u_0}{H}$  — коэффициент перед дополнительными слагаемыми, и  $\frac{\beta g \Delta T H}{u_0^2}$  — коэффициент перед слагаемым с силой плавучести. Сравнивая коэффициенты перед первым и вторым слагаемым, в правой части уравнения получим условие на величину параметра  $\tau_0$ :

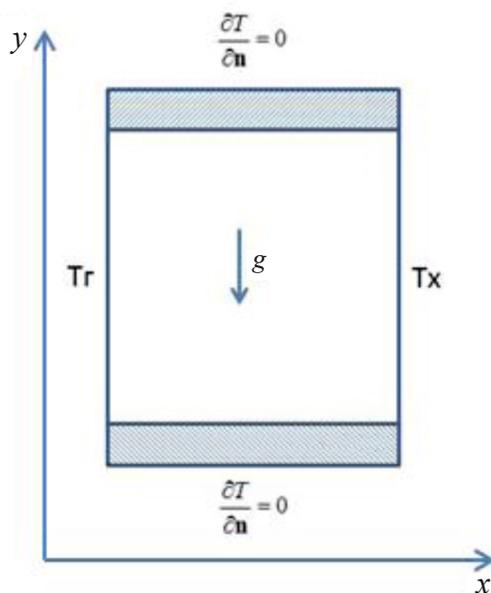
$$\tau = \tau_0 = \frac{\nu}{u_0^2} = \frac{\nu}{\beta g \Delta T H}. \quad (8)$$

Здесь значение характерной скорости течения выбрано в виде  $u_0^2 = \beta g \Delta T H$ , что принято в задачах естественной конвекции. При этом безразмерный коэффициент в слагаемом с выталкивающей силой обращается в 1. При выбранном способе обезразмеривания безразмерное значение параметра  $\tau_{0nd}$  связано с числом Грасгофа  $\operatorname{Gr} = \frac{\beta g \Delta T H^3}{\nu^2}$  в виде  $\tau_{0nd} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Gr}}}$ . Для проведения вычислений параметр  $\tau$  следует выбирать в виде  $\tau \leq \tau_0$ .

Пространственная аппроксимация строится с помощью метода конечных объемов с вычислением всех пространственных производных с помощью центральных разностей. Используется явная по времени разностная схема, а слагаемые с молекулярной вязкостью аппроксимируются в неявном виде. Устойчивость алгоритма обеспечивает искусственная диссипация, нелинейная структура которой подстраивает ее величину в зависимости от градиентов давления, температуры и скорости.

### 3. ЗАДАЧА О ГРАВИТАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ В КВАДРАТНОЙ ОБЛАСТИ

Моделирование гравитационной конвекции в квадратной области в силу простоты постановки и наглядности результатов долгое время является удобной тестовой задачей для демонстрации свойств численных алгоритмов, см., например, недавние работы [4, 5, 8]. При малых числах Грасгофа течение является стационарным, при значениях  $\operatorname{Gr} \geq 2 \cdot 10^8$  в области устанавливаются незатухающие колебания, которые в дальнейшем могут преобразоваться в двумерный аналог турбулентного течения.



Фиг. 1. Расчетная область. Слева горячая стенка с температурой  $T_{\Gamma}$ , справа – холодная с температурой  $T_x$ .

Ранее КГидД-алгоритм тестировался на этой задаче для небольших значений чисел Грасгофа  $Gr = 10^3, 10^4, 10^5$  соответствующих стационарному течению [11–14]. Результаты расчета сопоставлялись с данными, полученными на основе метода второго порядка точности, построенного в переменных функции тока – вихрь скорости, и с данными эксперимента. Была показана высокая точность КГидД-алгоритма даже на сетках с небольшим количеством узлов, сходимость решения при сгущении сетки и влияние на решение параметра регуляризации  $\tau$ . А именно, оптимальным значением параметра регуляризации является величина (8). При уменьшении коэффициента  $\tau$  точность решения не увеличивается, при его увеличении решение искажается. Далее приведено численное решение этой задачи в рамках пакета OpenFOAM при больших числах Грасгофа. Схема расчетной области и постановка граничных условий для температуры представлена на фиг. 1.

Расчетная область представляет из себя квадрат со стороной  $H$ . Система находится в поле силы тяжести  $g = 9.81$  м/сек<sup>2</sup>. Сверху и снизу находятся адиабатические стенки, слева стенка является горячей, справа – холодной. На границах области ставятся условия прилипания и непротекания для скорости. Граничные условия для давления выбираются в виде (7). Последнее означает, что на вертикальных стенках задается равная нулю нормальная производная давления, на горизонтальных стенках производная давления по нормали определяется величиной температуры. То есть для давления на нижней и верхней стенках ставится условие  $\frac{\partial p}{\partial n} = -\beta\rho_0g(T - T_0)$ , на боковых стенках ставится  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ . Для скорости на всех границах ставится условие прилипания для скорости  $\mathbf{U} = 0$ . Верхняя и нижняя стенки полагаются теплоизолированными  $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ .

При численном моделировании течения вязкой несжимаемой жидкости с помощью солвера `mulesQNDFoam`, имплементированного в открытый программный комплекс OpenFOAM, используются величины в размерном виде в системе Си. Результаты расчетов также представлены в системе Си, за исключением данных в табл. 3, которые представлены в безразмерном виде для сопоставления с эталонными данными.

Двумерный вариант расчета получен на основе пространственного алгоритма, в котором третье пространственное направление задается одной ячейкой. Все расчеты проведены на равномерных пространственных сетках с квадратными ячейками.

В начальный момент жидкость покоится, давление выбирается равным атмосферному, температура в области равна  $T = T_0 = 293.15^\circ\text{K}$  ( $20^\circ\text{C}$ ), температура стенки слева  $T_{\Gamma} = 313.15^\circ\text{K}$ , стенка справа  $T_x = 273.15^\circ\text{K}$ .

В качестве рабочего флюида выбирается воздух. Значения необходимых для расчета параметров воздуха приведены в табл. 1.

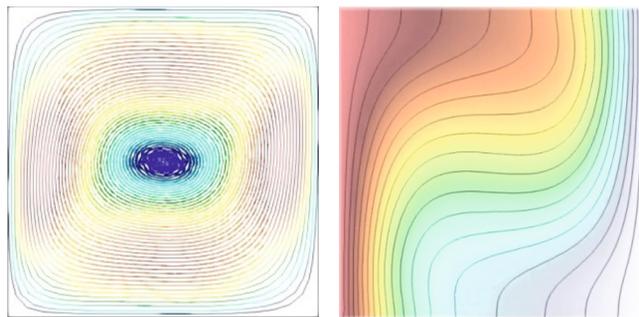
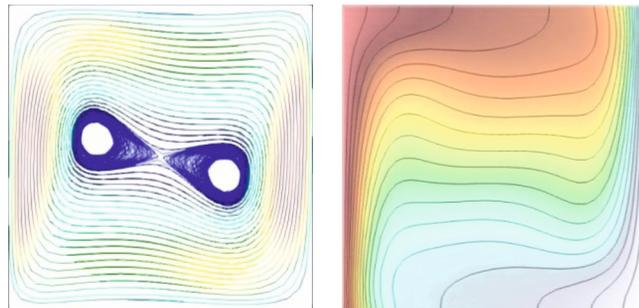
Число Грасгофа вычисляется по формуле  $Gr = \frac{\beta g \Delta T H^3}{\nu^2}$  для  $\Delta T = 40^\circ$ . Число Прандтля в расчетах было выбрано равным единице, поэтому число Рэлея  $Ra = Pr \cdot Gr = Gr$ . Как показывают результаты [4], для воздуха отличия в числе  $Pr = 0.7$  и  $Pr = 1$  очень мало влияют на величины скоростей в данной задаче.

**Таблица 1.** Параметры воздуха в размерном виде при нормальном давлении и температуре 20°C.

|  |  |
|--|--|
| Динамическая вязкость $\mu$                | $18.1 \times 10^{-6}$ кг/(м*сек)         |
| Кинематическая вязкость $\nu$              | $15.06 \times 10^{-6}$ м <sup>2</sup> /с |
| Коэффициент теплового расширения $\beta$   | $3.43 \times 10^{-3}$ К <sup>-1</sup>    |
| Плотность $\rho_0$                         | 1.205 кг/м <sup>3</sup>                  |
| Теплоемкость при постоянном давлении $C_p$ | 1005 Дж/(кг*К)                           |

**Таблица 2.** Размер расчетной области для разных чисел Грасгофа.

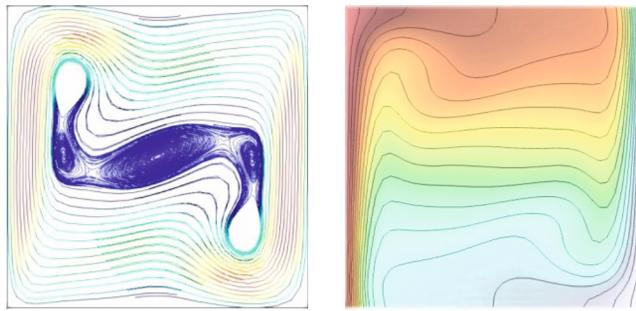
| № | Gr             | H, см  | $\tau$ , сек        |
|---|----------------|--------|---------------------|
| 1 | $10^4$         | 1.190  | $9.4 \cdot 10^{-4}$ |
| 2 | $10^5$         | 2.565  | $4.3 \cdot 10^{-4}$ |
| 3 | $10^6$         | 5.530  | $2.0 \cdot 10^{-4}$ |
| 4 | $10^7$         | 11.900 | $9.4 \cdot 10^{-5}$ |
| 5 | $10^8$         | 25.650 | $4.3 \cdot 10^{-5}$ |
| 6 | $2 \cdot 10^8$ | 32.300 | $3.5 \cdot 10^{-5}$ |
| 7 | $10^9$         | 55.300 | $2.0 \cdot 10^{-5}$ |

**Фиг. 2.** Gr =  $10^4$ .**Фиг. 3.** Gr =  $10^5$ .

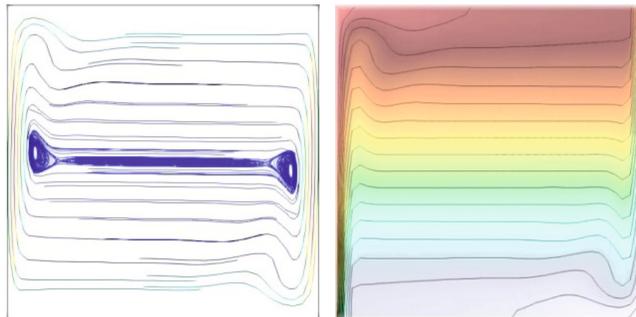
Изменение числа Gr достигается путем изменения размера области. Согласованные значения числа Грасгофа, параметра  $\tau$  и размера области приведены в табл. 2.

В расчетах использовались следующие заниженные значения  $\tau$ : для Gr =  $10^4$ ,  $10^5$  и  $10^6$  параметр  $\tau = 10^{-4}$ . Для Gr =  $10^7$ ,  $10^8$  и  $10^9$  —  $\tau = 10^{-5}$ . Шаг расчета по времени составлял  $2 \cdot 10^{-4}$  для Gr =  $10^4$ ,  $10^5$ ,  $10^6$ ,  $10^7$ ,  $10^8$  и  $2 \cdot 10^{-5}$  для Gr =  $2 \cdot 10^8$ ,  $10^9$ . В качестве начальных условий в вариантах 1–3 использовались нулевые значения скоростей и начальное значение температуры в области  $T = T_0 = 20^\circ\text{C}$ , в вариантах 4 и 5 использовались как эти же начальные условия, так и результаты расчета задачи при меньшем значении Gr на соответствующей сетке. Стационарные режимы течения не зависят от принятых начальных условий.

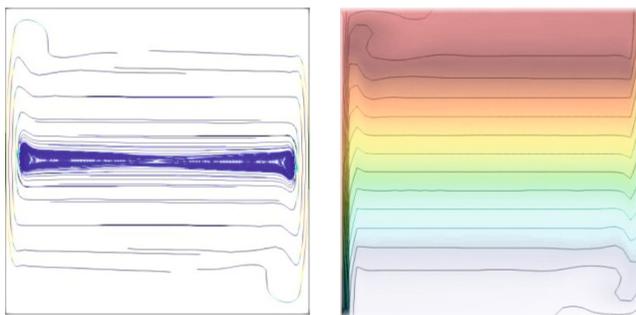
На фиг. 2 и 3 показаны установившиеся поля скорости и температуры в задаче о термогравитационной конвекции для указанных в табл. 2 чисел Грасгофа для сетки  $40 \times 40$ . Линии тока (слева) и изотермы (справа) для чисел Грасгофа Gr =  $10^4$ ,  $10^5$  приведены на момент времени  $t = 40$  сек, а для Gr =  $10^6$ ,  $10^7$ ,  $10^8$  — для  $t = 100$  сек.



Фиг. 4.  $Gr = 10^6$ .



Фиг. 5.  $Gr = 10^7$ .



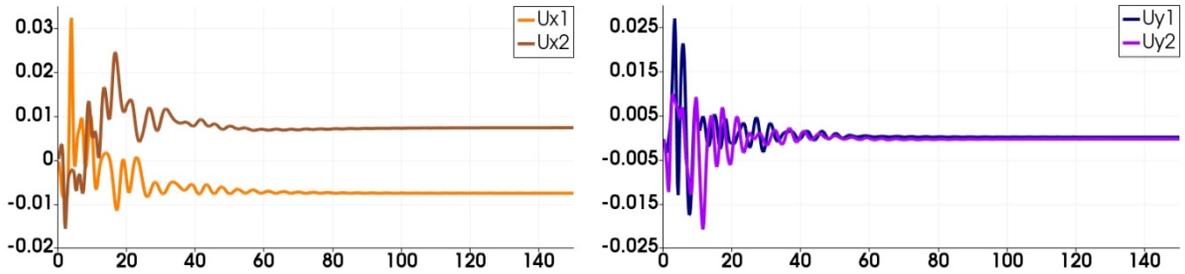
Фиг. 6.  $Gr = 10^8$ .

Рисунки 2–6 подтверждают известную из целого ряда работ картину эволюции течения с ростом числа  $Gr$ , а именно, что при  $Gr = 10^4$  течение представляет собой близкий к окружности вихрь, который искажает поле температуры. С увеличением числа Грасгофа форма вихревого течения также начинает искажаться, при  $Gr = 10^8$  вихрь сильно вытягивается по горизонтали и сжимается по вертикали. При этом вдали от стенок градиент температуры по горизонтали практически исчезает, в то время как градиент вблизи вертикальных стенок сильно возрастает. В ядре течения температура фактически меняется только по вертикали.

Типичный вид установления по времени компонент скорости приведен на фиг. 7 на примере установления стационарного режима для  $Gr = 10^8$  в точках 1 и 2 с координатами  $(0.064, 0.064, 0.0)$  и  $(0.064, 0.192, 0.0)$ .

Для количественной оценки полученных результатов было проведено их сравнение с данными расчетов [4, 5]. В этих работах расчеты термогравитационной конвекции в квадратной области выполнены в переменных функции тока - вихрь скорости с использованием подробных сеток. В [4] алгоритм высокого порядка точности с применением квазиволновой сингулярной свертки (DSC) сравнивался с методом конечных элементов Галлеркина. В [5] в переменных функции тока – вихрь скорости использовалась противоточная схема третьего порядка (opt-UCD3). В [4] показано, что при  $Gr \leq 10^8$  течение флюида является стационарным, при  $Gr = 2 \cdot 10^8$  формируется не устанавливающийся колебательный режим течения.

В табл. 3 приведено сопоставление полученных нами результатов по скорости течения с данными [4, 5] и результатами цитируемых там работ. Сравнение проведено для максимальной величины горизонтальной скоро-



Фиг. 7. Распределения компонент скорости в точках 1 и 2 для  $Gr = 10^8$ , сетка  $40 \times 40$ .

Таблица 3. Сводная таблица проведенных расчетов и их сравнение с результатами [4, 5].

| Число Грасгофа $Gr$ | Максимальная безразмерная горизонтальная скорость данный расчет | Максимальная безразмерная горизонтальная скорость $\tilde{u}_x$ , диапазон скоростей для цитированных в [4] методов |
|---------------------|---|---|
| $10^4$              | 16.02, сетка $40 \times 40$                                     | 15.967, 15.967–16.2   |
| $10^5$              | 33.30, сетка $40 \times 40$                                     | 33.51, 33.39–34.81  |
| $10^6$              | 52.36, сетка $40 \times 40$                                     | 65.55, 64.6912–65.55  |
| $10^7$              | 125.11, сетка $40 \times 40$                                    | 145.06, 139.7–145.266   |
| $10^8$              | 250.00, сетка $40 \times 40$                                    | 295.67, 283.689–296.71  |
| $2 \cdot 10^8$      | 282.46, сетка $40 \times 40$                                    | Колебания [5]   |

сти, которая приведена к безразмерному виду согласно [4, 5]  $\tilde{u}_x = u_{x \text{ разм}} \cdot \frac{H}{v}$ ,  $t = \tilde{t} \frac{H^2}{v}$ . Безразмерные величины обозначены знаком “тильда”.

Далее в табл. 3 приведены значения максимальной безразмерной скорости  $\tilde{u}_x$  по координате  $y$  при  $x = 0.5 \cdot H$ .

Из табл. 3 следует, что при  $Gr = 10^4, 10^5$  на сетке  $40 \times 40$  КГидД-результаты хорошо соответствуют данным [4], полученным на сетке  $101 \times 101$ . Для  $Gr = 10^6$  для КГидД-алгоритма требуется сетка  $80 \times 80$ , чтобы соответствовать результатам [4], полученным на сетке  $101 \times 101$ . Для этого варианта показана сходимость по сетке КГидД-результатов. Для  $Gr = 10^7$  для достижения нужной точности требуется более подробная пространственная сетка. В [4] использовалась сетка  $301 \times 301$ . Для  $Gr = 10^8$  точность на сетке  $160 \times 160$  соответствует сетке  $301 \times 301$  из [4].

В [5] расчеты данной задачи проводились на сетках  $129 \times 129$  для  $Gr = 10^4, 10^5, 10^6$  и  $257 \times 257$  для  $Gr = 10^8$ . Для стационарных режимов результаты работ [4] и [5] близки между собой.

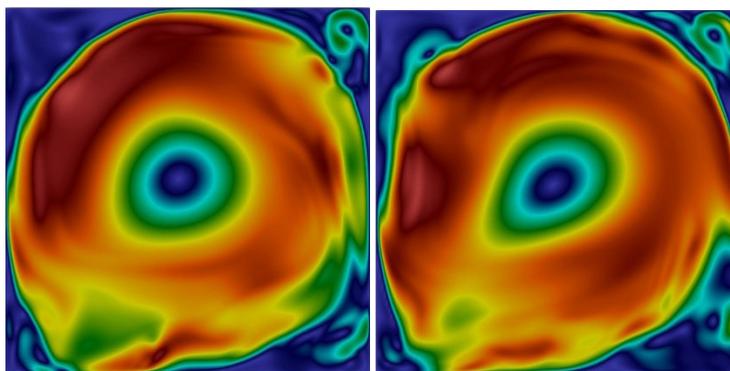
В [5] были получено и проанализировано возникновение нестационарных режимов течения в квадратной полости для чисел Грасгофа  $Gr = 2 \cdot 10^8$  и  $Gr = 10^9$ . Эти режимы удалось получить и в рамках КГидД-уравнений при сгущении пространственной сетки.

Для  $Gr = 2 \cdot 10^8$  на сетках  $40 \times 40$  и  $80 \times 80$  формируется стационарное течение. В расчете на сетке  $160 \times 160$  получено незатухающее непериодическое решение, вид которого соответствует данным [5], полученным на сетке  $257 \times 257$ . В качестве начального условия использовалось поле течения, полученное в расчете для  $Gr = 10^6$ . Характерные картины полей скорости и температуры на разные моменты времени для этого случая приведены на фиг. 8–9.

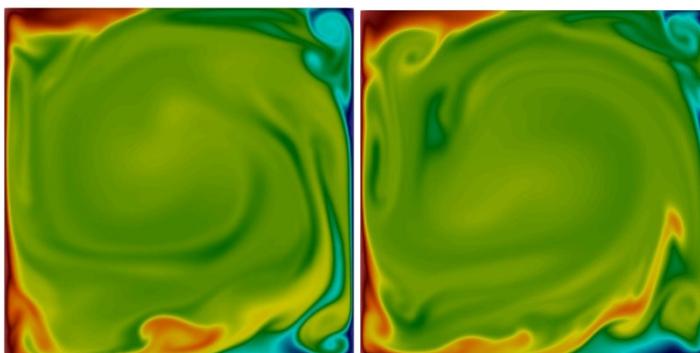
На фиг. 10 приведены зависимости от времени компонент скоростей и температуры в точках 1 и 2 с координатами  $(0.08, 0.08, 0.0)$  и  $(0.08, 0.242, 0.0)$  для  $Gr = 2 \cdot 10^8$ . Расчет проведен на сетке  $320 \times 320$ . В качестве начального условия также использовалось стационарное решение, полученное при  $Gr = 10^6$ .

#### 4. ЗАДАЧА ТЕРМОГРАВИТАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ $H:8H$

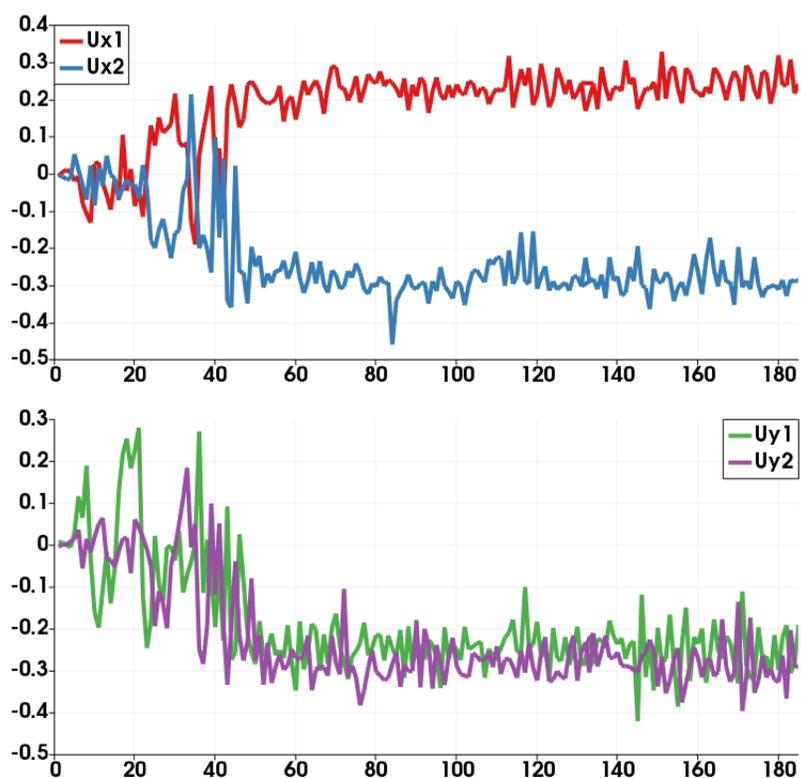
В каверне, представляющей собой вытянутый вверх прямоугольник, колебательные режимы возникают при меньших числах Грасгофа. Экспериментальные и численные исследования таких течений изложены в [2, 6–9]. В эксперименте с этиловым спиртом [2] ( $Pr$  порядка 20) наиболее интенсивные хаотические колебания наблюдались вблизи верхней и нижней границ каверны, а в центре области формировалась застойная зона с более слабыми осцилляциями.



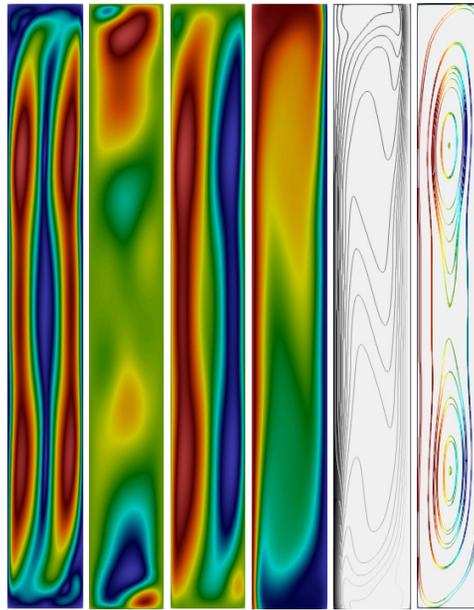
Фиг. 8. Модуль скорости. Максимальные значения 0.53 и 0.51 м/с.



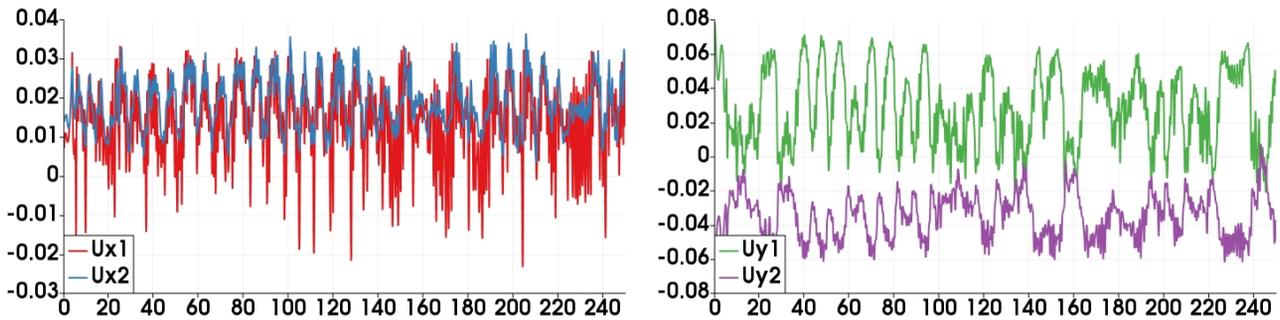
Фиг. 9. Температура. Пределы изменения от 2700 до 3100.



Фиг. 10. Зависимость от времени компонент скоростей в точках 1 и 2.  $Gr = 2 \cdot 10^8$ , сетка  $320 \times 320$ .



Фиг. 11. Картина осредненного течения. Модуль скорости,  $U_x$ ,  $U_y$ ,  $T$ , изотермы, линии тока.



Фиг. 12. Зависимость от времени для компонент скоростей в точках 1 и 2.

Постановка приведенной далее задачи соответствует классическому вычислительному тесту, детально изложенному в [6–8]. В этих работах изучены варианты незатухающих хаотических осцилляций течения при числе Рэлея  $Ra = 3.4 \cdot 10^5$  в каверне с соотношением ширины и высоты  $H:8H$ .

В описанном далее расчете использовалась такая же конфигурация области с параметрами флюида  $Pr = 1.0$ ,  $Ra = Gr = 3.4 \cdot 10^5$ . В размерном виде стороны прямоугольника составляют 0.03855 и 0.3084 м, соответственно. Оценка (8) для параметра регуляризации в размерном виде дает величину  $\tau = \frac{\nu}{\beta g \Delta T H} = 3 \cdot 10^{-4}$ . Шаг по времени составлял  $10^{-4}$ . Использовались сетки  $48 \times 240$  и  $96 \times 240$ .

При выборе параметра регуляризации  $\tau = 3 \cdot 10^{-4}$  в расчете было получено стационарное распределение параметров течения. Уменьшение параметра численного сглаживания до значения  $\tau = 5 \cdot 10^{-5}$  позволяет моделировать неустанавливающееся, близкое к хаотическому, течение в области. Начальным значением для расчета является стационарный режим, полученный при  $\tau = 3 \cdot 10^{-4}$ . Изолинии для скоростей  $u_x$ ,  $u_y$ , температуры  $T$  и траектории частиц для осредненного по времени решения на интервале 250–270, приведены на фиг. 11 для сетки  $96 \times 240$ . При варьировании интервала осреднения в пределах 120–250 результаты осреднения практически не меняются.

На фиг. 12 представлена эволюция во времени компонент скорости в точках 1 (0.00698 0.28411 0.0) – вблизи левого верхнего угла каверны, и 2 (0.03 0.29 0.0) – вблизи правого верхнего угла каверны на момент времени 270.

Численное моделирование нестационарного течения в данной задаче было выполнено в [6] на существенно более подробных сетках с минимальным числом узлов  $75 \times 600$ . В [7] и [8] нестационарное течение в данной задаче на сетках  $252 \times 252$  и  $96 \times 480$  соответственно носит практически регулярный характер. Картина осредненного течения, приведенного на фиг. 11, качественно соответствует полям, приведенным в [6], [8] и [9]. Изотермы, приведенные в [6], [8] и [9] наилучшим образом соответствуют КГидД-расчетам в центре и по кра-

ям прямоугольной области. Эволюционные кривые фиг. 12 качественно соответствуют работе [9], в которой расчет проводился на сетке  $100 \times 800$ .

### 5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Численные эксперименты показали, что для задач термогравитационной конвекции КГидД-алгоритм позволяет моделировать как стационарные течения так и формирование нестационарных режимов, которое наблюдается при увеличении числа Грасгофа. Для адекватного моделирования указанных задач требуется соответствующий выбор шага сетки для разрешения пограничных слоев и выбор параметра регуляризации, который определяет сглаживание в алгоритме.

При сравнении полученных численных решений с эталонными результатами для течений в квадратной и прямоугольной полостях показано, что КГидД-алгоритм по точности не уступает взятым за эталон методам. При этом требуемая точность вычисления скорости достигается на менее подробных сетках, чем в алгоритмах более сложной структуры с повышенным порядком аппроксимации. Возникновение колебательных режимов также получается в рамках КГидД-алгоритма для известных из эталонных расчетов числах Грасгофа.

Таким образом, реализованный в комплексе OpenFOAM КГидД-алгоритм представляется перспективным для решения задач термогравитационной конвекции.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А.* Устойчивость конвективных течений. М.: Физматлит, 1989. 320 с. ISBN 5-02-014004-X.
2. *Бердников Б.С., Гришков В.А.* Ламинарно-турбулентный переход в свободном конвективном пограничном слое и теплоотдача вертикальных стенок // Труды 4-й РНКТ. 2006. Т. 3. Свободная конвекция. Тепломассообмен при химических превращениях. С. 67–70.
3. *Простомолотов А.И., Верезуб Н.А.* Механика процессов получения кристаллических материалов. М.: НИТУ “МИСиС”, 2023, ISBN 978-5-907560-57-4, 568 с.
4. *Wan D.C., Patnaik B.S., Wei G.W.* A new benchmark quality solution for the buoyancy-driven cavity by discrete singular convolution // Numerical heat transfer, Part B. 2001. 40: P. 199–228.
5. *Bingxin Zhao, Zhenfu Tian.* High-resolution high-order upwind compact scheme-based numerical computation of the natural convection flows in a square cavity // Internat. Journal of Heat and Mass Transfer. 2016. 98. P. 313–328.
6. *Trouette B.* Lattice Boltzmann simulations of a time-dependent natural convection problem Computers-and-mathematics-with-applications Volume 66, Issue 8, November 2013. P. 1360–1371.
7. *Oder J., Tisely I.* Spectral Benchmark for Natural Convection Flow in a Tall Differentially Heated Cavity // 22nd International Conference Nuclear Energy for New Europe, September 9-12 BLED-SLOVENIA 2013. 227 p.
8. *Nader Ben Cheikh, Brahim Ben Beya & Taieb Lili.* Benchmark Solution for Time-Dependent Natural Convection Flows with an Accelerated Full-Multigrid Method // Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals: An International Journal of Computation and Methodology. 2007. 52:2. P. 131–151. DOI: 10.1080/10407790701347647
9. *Yong-Liang Feng, Shao-Long Guo, Wen-Quan Tao, Pierre Sagaut.* Regularized thermal lattice Boltzmann method for natural convection with large temperature differences // Internat. Journal of Heat and Mass Transfer. 2018. 125. P. 1379–1391. 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.05.051. hal-02114047.
10. *Поляков С.В., Чурбанов А.Г.* Свободное программное обеспечение для математического моделирования // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша 2019, № 145. 32 с.
11. *Шеретов Ю.В.* Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. М.: Ижевск, 2009.
12. *Елизарова Т.Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета газодинамических течений. М.: Научный мир, 2007. Перевод Elizarova T.G., Quasi-Gas Dynamic equations // Springer, Berlin, 2009)
13. *Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В.* Теоретическое и численное исследование квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. N 2. С. 239–255. Translation: Elizarova T.G., Sheretov Yu.V. (2001) Theoretical and Numerical Analysis of Quasi-Gasdynamic and Quasi-Fluid-Dynamic Equations // J. Comput. Math. and Math. Phys. 2001. V. 41. N 2. P. 219–234.

14. *Елизарова Т.Г., Калачинская И.С., Ключникова А.В., Шеретов Ю.В.* Использование квазигидродинамических уравнений для моделирования тепловой конвекции при малых числах Прандтля // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. N 10. С. 1732–1742.
15. *Kraposhin M.V., Ryazanov D.A., Elizarova T.G.* Numerical algorithm based on regularized equations for incompressible flow modeling and its implementation in OpenFOAM // Comp. Phys. Commun. 2022. V. 271. P. 108216.
16. *Кiryushina M.A., Elizarova T.G., Epihin A.S.* Моделирование течения расплава в методе Чохральского в рамках открытого пакета OpenFOAM с применением квазигидродинамического алгоритма // Матем. моделирование. 2023. Т. 35. N 8. С. 79–96.

## VERIFICATION OF A NUMERICAL ALGORITHM BASED ON QUASI-HYDRODYNAMIC EQUATIONS USING THE EXAMPLE OF MODELING THERMOGRAVITATIONAL CONVECTION PROBLEMS

M. A. Kiryushina<sup>a,\*</sup>, T. G. Elizarova<sup>a</sup>, A. S. Yepikhin<sup>b</sup>

<sup>a</sup> 125047 Moscow, Miusskaya pl., 4, Keldysh IAM RAS, Russia

<sup>b</sup> 109004 Moscow, A. Solzhenitsyn str., 25, V.P.Ivannikov ISP RAS, Russia

\*e-mail: m\_ist@mail.ru

Received: 23.11.2023

Revised: 18.04.2024

Accepted: 28.06.2024

**Abstract.** It is shown that the quasi-hydrodynamic algorithm makes it possible to simulate the flow of a viscous incompressible fluid in problems of thermogravitational convection at large Grashof numbers, including a correct description of the occurrence of an oscillatory process. The tests for square and rectangular areas are given. The calculations were performed within the framework of the implementation of the quasi-hydrodynamic algorithm in the open package OpenFOAM.

**Keywords:** s: control volume method, OpenFOAM open package, quasi-hydrodynamic algorithm, viscous incompressible liquid, gravitational convection.