

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ В ЗАДАЧЕ О МОДЕЛИРОВАНИИ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В ТРУБЕ

© 2025 г. Т. Г. Елизарова^{1,*}, М. А. Кирюшина^{1,**}

Представлено академиком РАН Б. Н. Четверушкиным

Получено 08.04.2025 г.

После доработки 06.06.2025 г.

Принято к публикации 02.09.2025 г.

Рассмотрена задача о развитии гидродинамической неустойчивости в круглой трубе при умеренных числах Рейнольдса для течения вязкой несжимаемой жидкости. Численное моделирование выполнено на основе регуляризованных или квазигидродинамических уравнений. Моделирование проведено с применением метода конечного объема, реализованного авторами в рамках открытого программного комплекса с применением параллельных технологий. В прямом численном эксперименте показано, что случайные возмущения входной скорости в трубе затухают для докритических чисел Рейнольдса и приводят к формированию турбулентного режима для сверхкритических значений. Данный результат показывает перспективность применения регуляризованных уравнений гидродинамики в качестве новой альтернативной модели в расчетах ламинарно-турбулентных течений несжимаемой жидкости и газа в трубопроводных системах, включая оценки коэффициента сопротивления трубы.

Ключевые слова: регуляризованные уравнения, квазигидродинамические уравнения, вязкая несжимаемая жидкость, круглая труба, переход к турбулентности

DOI: 10.7868/S3034504925050097

1. ВВЕДЕНИЕ

Известным и наглядным примером гидродинамической неустойчивости с образованием ламинарного или турбулентного режимов является развитие течения в круглой трубе. Эта задача впервые демонстрировалась в опытах Рейнольдса, где было показано существование перехода от ламинарного течения к турбулентному при увеличении скорости потока [1–4]. Однако до настоящего времени поиск однородных и эффективных численных алгоритмов для описания ламинарно-турбулентного перехода является актуальной задачей вычислительной математики.

Алгоритмы численного моделирования ламинарно-турбулентного перехода, основанные на прямом численном решении уравнений Навье–Стокса (DNS), требуют подробных пространственно-временных сеток и налагают высокие требования к точности вычислительных методов, e.g. [5–8]. Методы моделей крупных

вихрей (LES) снижают требования к сетке, но требуют введения специальных фильтров для сглаживания подсеточных пульсаций течения, что требует подбора как самих фильтров, так и входящих в них численных коэффициентов, что осложняет моделирование ламинарно-турбулентного перехода (см., например, [9]). Оригинальная модель для описания турбулентных течений, построенная на базе кинетической модели газа, разрабатывается в [10].

В данной работе используется новый алгоритм для единообразного моделирования ламинарных и турбулентных течений, который базируется на регуляризованных или квазигазодинамических (КГД) уравнениях. Здесь применяется вариант КГД-системы для моделирования течений в приближении вязкой несжимаемой жидкости, названный квазигидродинамическим. По аналогии с DNS-подходом используется прямое численное моделирование задачи, но на основе КГД-уравнений.

Регуляризованные, или КГД-уравнения газовой динамики (см, например, [11–14]) тесно связаны с системой уравнений Навье–Стокса и от-

¹ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

* E-mail: telizar@mail.ru

** E-mail: m_ist@mail.ru

личаются от нее присутствием во всех уравнениях системы нелинейных диссипативных слагаемых с малым параметром размерности времени в качестве коэффициента. Диссипативный характер добавок в КГД-уравнениях подтверждается существованием для этой системы уравнения переноса энтропии с неотрицательной диссипативной функцией в правой части. В частности, в приближении вязкой несжимаемой жидкости заложенная в КГД-уравнениях дополнительная диссипация обеспечивает невозрастание кинетической энергии системы. КГД-уравнения записываются в виде законов сохранения и имеют ряд общих математических свойств с системой уравнений Навье–Стокса.

Разностный алгоритм решения КГД-уравнений построен с применением метода конечно-го объема на пространственной декартовой сетке, что в данной задаче позволяет избежать трудностей с аппроксимацией уравнений вблизи оси трубы. Реализация алгоритма в рамках открытой платформы OpenFOAM [15] позволяет использовать неструктурированные пространственные сетки и ускорять расчеты путем распараллеливания задачи.

Как показал предыдущий опыт практического применения, преимущества КГД-алгоритмов видны при расчетах нестационарных и не установившихся течений. В частности, для течений вязкой несжимаемой жидкости эти уравнения применялись при моделировании спонтанно возникающих нестационарных режимов при конвекции Марангони [11, 13, 16], течениях за обратным уступом [13] и термогравитационной конвекции в прямоугольной области [17].

Система КГД-уравнений для описания течений вязкого сжимаемого газа ранее использовалась для численного моделирования задачи о затухании свободного турбулентного течения, определяемого в начальный момент в виде вихрей Тейлора–Грина [13, 19]. Здесь было показано, что на одинаковых пространственных сетках КГД результаты существенно лучше соответствуют эталонному решению, чем LES-модель. В задаче моделирования турбулентного пограничного слоя в течении Куэтта [20] было получено, что применение КГД-алгоритма позволяет сократить число пространственных точек при описании ламинарного подслоя по сравнению с DNS-моделью. Моделировались также струйные

течения с формированием турбулентного слоя смешения в дальнем поле струи, (см., например, [21]).

В данной работе приведены результаты расчетов эволюции течения вязкой изотермической несжимаемой жидкости в круглой трубе с небольшими случайными возмущениями скорости на входе в трубу. Показано, что для докритических чисел Рейнольдса случайные возмущения входной скорости затухают и приводят к формированию стационарного ламинарного течения. Для сверхкритических чисел Рейнольдса возмущения скорости приводят к формированию турбулентного течения.

Во втором разделе работы приведен вид используемых КГД-уравнений, отмечены особенности численного алгоритма и приведена постановка задачи, в третьем разделе описаны результаты численных экспериментов в трубе для докритических и сверхкритических чисел Рейнольдса.

2. КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

КГД-систему уравнений можно рассматривать в качестве регуляризованной системы уравнений Навье–Стокса. Регуляризация уравнений основана на предположении, что массовая плотность потока газа или жидкости может отличаться от среднего импульса единицы объема на малую величину. Это отличие обусловлено тем, что в КГД-уравнениях газодинамические параметры течения представляют собой не мгновенные пространственные средние, как в системе уравнений Навье–Стокса, а пространственно-временные средние. Соответствующие уравнения газовой динамики можно построить путем сглаживания уравнений Навье–Стокса по малому временному интервалу. Возникающие при этом малые диссипативные добавки пропорциональные коэффициенту τ обеспечивают неубывание термодинамической энтропии системы, а в случае течений вязкой несжимаемой жидкости — невозрастание кинетической энергии в замкнутом адиабатическом объеме в отсутствии внешних сил. При $\tau = 0$ регуляризованная система переходит в систему уравнений Навье–Стокса. Для случая квазистационарных течений возникающие добавки имеют второй порядок малости по коэффициенту τ , и отличия численных реше-

ний КГД-системы и системы уравнений Навье–Стокса пренебрежимо малы. Однако для быстропеременных во времени течений добавки обладают первым порядком малости, и именно для таких течений следует искать преимущества КГД-уравнений. Как показывают теоретические исследования, КГД-система тесно связана с системой уравнений Навье–Стокса, и обе системы имеют ряд общих точных решений [11, 12]. В частности, парабола Пуазейля является общим точным решением обеих систем уравнений для течений вязкой несжимаемой жидкости.

КГД-уравнения для течения вязкой изотермической жидкости в отсутствии внешних сил согласно [11–14] имеют вид:

$$\operatorname{div}(\vec{u} - \vec{w}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \operatorname{div}((\vec{u} - \vec{w}) \otimes \vec{u}) + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = \operatorname{div} \Pi. \quad (2)$$

В системе уравнений (1)–(2) давление определено с точностью до произвольной постоянной, ρ – постоянная плотность жидкости. Вектор поправки к скорости \vec{w} и тензор вязких напряжений Π вычисляются как

$$\vec{w} = \tau \left[(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right], \quad \Pi = \Pi_{NS} + \vec{u} \otimes \vec{w}. \quad (3)$$

$\Pi_{NS} = \nu[(\nabla \otimes \vec{u}) + (\nabla \otimes \vec{u})^T]$, ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости, τ – параметр регуляризации, который имеет размерность времени. В (1)–(3) использованы стандартные обозначения из тензорного анализа [2]. В частности, $\vec{u} \otimes \vec{w}$ обозначает тензор второго ранга, полученный в результате прямого произведения векторов \vec{u} и \vec{w} .

В отличие от системы уравнений Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости в КГД-системе, уравнение Пуассона для давления непосредственно следует из уравнения неразрывности (1) с учетом добавки к скорости из (3) и имеет вид:

$$\frac{1}{\rho} \Delta p = -\operatorname{div} \left[(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right] + \frac{1}{\tau} \operatorname{div} \vec{u}. \quad (4)$$

Граничные условия для давления на границах расчетной области следуют из условия равенства нулю нормальной компоненты добавки к скорости

$$\vec{w}_n = 0. \quad (5)$$

Граничное условие для градиента давления по нормали к твердым стенкам обеспечивается соотношением (5) совместно с условием непротекания для скорости $\vec{u}_n = 0$ и имеет вид:

$$\partial p / \partial n = 0, \quad (6)$$

где n – нормаль к поверхности.

Базовое значение параметра регуляризации τ_0 определим из условия, чтобы в безразмерном виде этот параметр не превосходил коэффициент вязкости. Такая оценка приводит к величине

$$\tau_0 = \frac{\nu}{U^2}, \quad (7)$$

где U – значение характерной скорости. Таким образом, базовое значение параметра регуляризации соответствует характерному гидродинамическому временному масштабу течения. При проведении вычислений параметр τ выбирается близким к величине τ_0 .

Рассматривается цилиндрическая область длины L и диаметром D . Жидкость втекает через левую границу. На входе в трубу задается профиль скорости и нулевой градиент давления, на поверхности трубы заданы условия прилипания для скорости и нулевой градиент давления. На выходе заданы условия сноса для скорости и постоянное давление.

Отметим, что для сокращения вычислений при расчетах развитого турбулентного течения в трубе методами DNS часто применяются так называемые периодические граничные условия, которые позволяют существенно сократить длину расчетной области (см., например, [5–8]). В приведенных выше расчетах периодические граничные условия не использовались. Не использовались и условия симметрии, которые также позволяют сократить время расчета, но могут нарушать процесс распространения случайных возмущений в течении [7].

Пространственная аппроксимация системы уравнений (2)–(4) строится методом конечных объемов с вычислением всех пространственных производных с помощью центральных разностей. Используется явная по времени разностная схема, слагаемые с молекулярной вязкостью аппроксимируются в неявном виде. Условную устойчивость алгоритма обеспечивает диссипация, пропорциональная коэффициенту τ , нелинейная структура которой подстраивает ее

величину в зависимости от градиентов давления и скорости. Шаг интегрирования по времени Δt , обеспечивающий условную устойчивость разностного алгоритма, близок к величине τ . Выбор явного по времени алгоритма решения КГД-уравнений обусловлен необходимостью моделирования существенно нестационарных течений по времени. Уравнение Пуассона (4) решается с помощью включенного в комплекс OpenFOAM стандартного метода сопряженных градиентов с предобуславливателем с точностью вычислений 10^{-9} .

Расчет ведется в рамках открытой платформы OpenFOAM. Пример с рассматриваемой задачей, посчитанный солвером `mulesQHDFoam` и настроенный для расчета течения вязкой несжимаемой изотермической жидкости находится в свободном доступе по ссылке [22]. Описание использования солвера и первые результаты расчетов приведены в [23]. Расчеты выполнены на расположенном в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН вычислительном комплексе K100.

Число Рейнольдса вычисляется как $Re = \frac{UD}{\nu}$. В расчетах Re варьируется путем выбора коэффициента кинематической вязкости ν . Параметр регуляризации τ выбирается в соответствии с оценкой (7).

Согласно требованиям OpenFOAM задача решается в размерных переменных в системе Си. Длина области составляет $L = 50D = 2$ м, диаметр $D = 0.04$ м. Среднее значение скорости на входе задается постоянным, $U = 7$ м/сек. В дальнейшем описании размерности величин опущены.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Течение в трубе имеет следующие характерные особенности [1–4]: при докритических числах Рейнольдса $Re < 2300$ в трубе формируется ламинарное течение Пуазейля. Для этого режима внесенные в поток малые возмущения затухают вдоль трубы, и течение остается ламинарным. Характерная длина L_e установления параболы Пуазейля из некоторого начального профиля скорости на входе в трубу определяется числом Рейнольдса [1–3] и составляет

$$L_e = 0.06 Re D. \quad (8)$$

При сверхкритических значениях $Re > 3000$ течение в трубе может переходить в турбулентный

режим, который характеризуется статистически-стационарными колебаниями скорости. Турбулентный режим течения может быть сформирован из ламинарного течения путем внесения в поток малых возмущений. В отличие от докритического режима, внесенные возмущения не затухают в потоке, что приводит к формированию установившихся во времени колебаний скорости и давления. Осредненный профиль такого течения отличается от параболы Пуазейля и носит логарифмический характер [1]. Длина установления такого течения оказывается меньше, чем для ламинарного течения вследствие большей эффективной турбулентной вязкости. Эту длину можно оценить эмпирическими формулами [2, 3]:

$$L_e = 1.6Re^{1/4}D \quad \text{или} \quad L_e = 4.4Re^{1/6}D. \quad (9)$$

При промежуточных числах Рейнольдса имеет место переходный процесс, при котором в течениях могут формироваться так называемые сгустки, клубки, или пятна турбулентности [4–7]. Эти режимы в данной работе не рассматривались.

Задание различных вариантов возмущения профиля входной скорости в трубе и изучение в численном эксперименте его эволюции проводилось в целом ряде расчетов (см., например, [5]). В данных расчетах нестационарное возмущение начального профиля скорости $u = (7.0, 0, 0)$ задается случайными флуктуациями вокруг него с амплитудами, не превосходящими 15% от средней скорости.

Используется декартова пространственная система координат. Область расчета покрывается сеткой, состоящей из многогранников. В основной части области форма многогранников близка по структуре к кубам, однако вблизи цилиндрической поверхности многогранники имеют более сложную форму, аппроксимирующую цилиндрическую поверхность трубы. Сгущение сетки у стенок минимально. Распределение ячеек пространственной сетки близко к равномерному для минимизации влияния анизотропии сетки на картину течения. Число точек для длины трубы $L = 1$ в базовом варианте составляет 649600, для длины $L = 2$ число точек равно 1299200. В обоих случаях на диаметр трубы приходится около 30 точек сетки.

Для докритических чисел Рейнольдса в численных экспериментах было получено затухание начальных возмущений профиля скорости вдоль

трубы и формирование стационарного течения. В расчетах использовались следующие параметры – $Re = 300$, $\nu = 9.3 \cdot 10^{-4}$ и $\tau_0 = 2 \cdot 10^{-5}$; $Re = 2200$, $\nu = 1.3 \cdot 10^{-4}$ и $\tau_0 = 2.6 \cdot 10^{-6}$.

Для $Re = 300$ длина установления (8) составляет $18D$, ламинарный профиль Пуазейля имеет максимум $U_{\max} = 2 \cdot U = 14$. В расчете максимальное значение скорости на оси вблизи выходной границы составляет 13.91. Для $Re = 2200$ длины трубы недостаточно для установления профиля Пуазейля, но течение оказывается ламинарным, скорость на оси вблизи конца трубы достигает величины 13. Изменение величины τ в два раза не сказывалось на результатах расчета.

Затухание малых возмущений с формированием ламинарного профиля соответствует качественной схеме поведения возмущений для устойчивого ламинарного течения (см., например, обзор [4]).

В расчетах с числами $Re = 3000$ и 4000 наблюдалась потеря устойчивости течения и образование статистически однородных пульсаций.

Рассмотрим вариант для $Re = 3000$. В расчете используются те же граничные условия и возмущения входной скорости, как и для вариантов с установлением ламинарных течений. Для этого варианта $\nu = 9.3 \cdot 10^{-5}$ и $\tau_0 = 2.0 \cdot 10^{-6}$, согласно (7). В расчете использовались значения $\tau = \Delta t = 5 \cdot 10^{-6}$. В качестве начального условия было взято установившееся ламинарное течение с плоским профилем скорости на входе.

Эволюция начальных возмущений для этого варианта представлена на рис. 1 и 2. На рис. 1 приведены примеры профилей скорости u_x вдоль

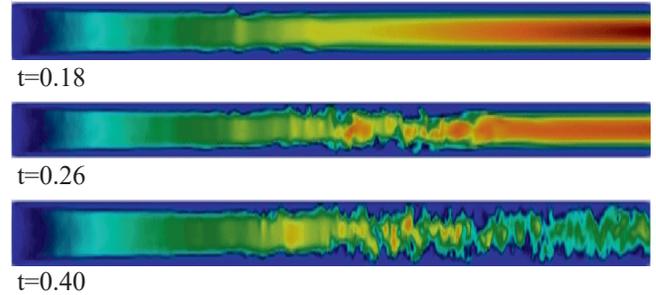


Рис. 2. Развитие начального возмущения во времени. Изолинии модуля скорости в продольном сечении на последовательные моменты времени. Масштаб рисунков сжат вдоль оси.

оси трубы x на последовательные моменты времени от $t = 0$ до 0.4 , на рис. 2 показаны соответствующие поля модуля скорости в продольной плоскости. В отличие от случая ламинарного течения, возмущения распространяются вдоль трубы с небольшим затуханием до расстояния примерно 0.5 и времени 0.05 , затем возмущения начинают нарастать и к моменту времени 0.3 достигают конца трубы. Далее на расстоянии примерно от 0.75 до конца трубы формируется статистически стационарный колебательный режим, амплитуда колебаний в котором выше, чем на отрезке $0-0.75$. Таким образом, начиная со времени порядка 0.3 и длины 0.75 , возникает аналог турбулентного режима. Согласно (9) оценка длины установления турбулентного режима в этом случае $L_e = 13D = 0.52$.

Полученные картины развития возмущений соответствуют качественным схемам развития турбулентного течения в трубе, приведенным в

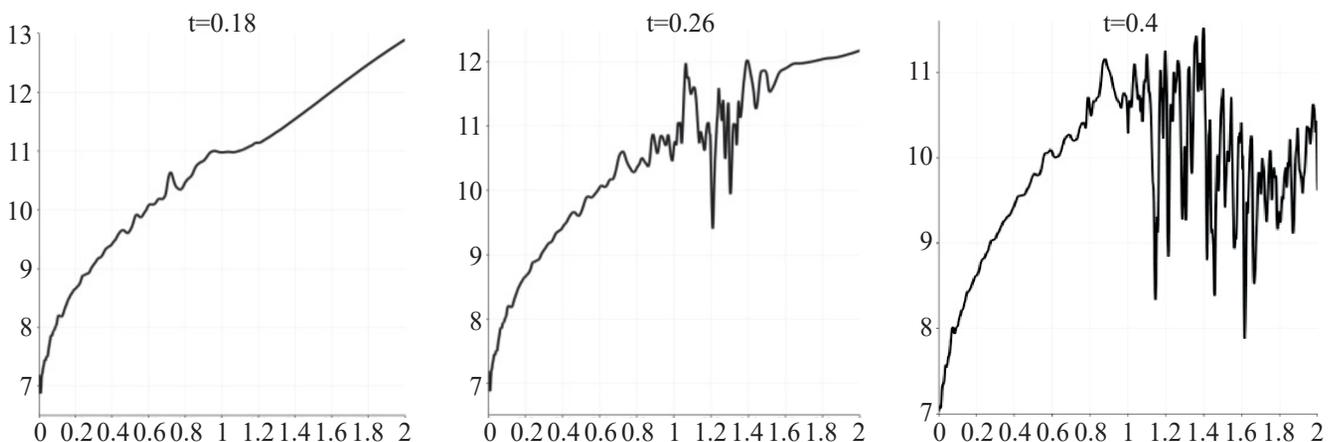


Рис. 1. Примеры эволюции аксиальной скорости u_x вдоль оси трубы на последовательные моменты времени $t = 0.18, 0.26, 0.40$.

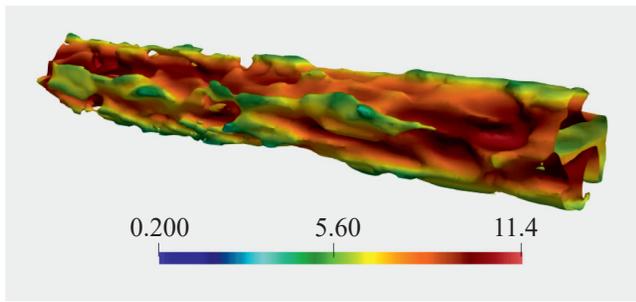


Рис. 3. Мгновенное значение скорости u_x . Изображены изоповерхности, соответствующие значениям 8 и 10. Цвет определяется величиной осредненной скорости.

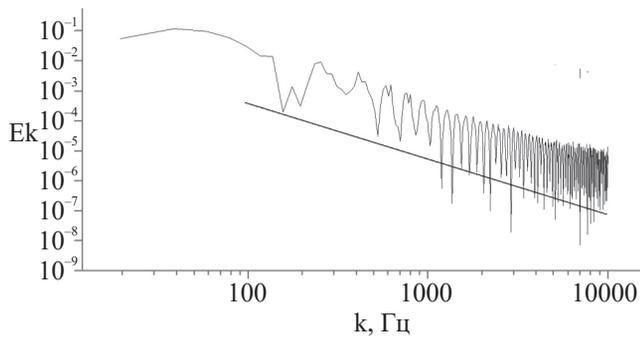


Рис. 4. Распределение спектральной плотности кинетической энергии от частоты в зоне развитого нестационарного течения.

обзоре [4]. Наблюдаемые в расчете мгновенные изолинии компонент скорости u_x, u_y, u_z в поперечном сечении трубы аналогичны по структуре картинам, приведенным для поля скоростей в турбулентной части потока в [8, 9].

На рис. 3 для иллюстрации структуры течения приведен фрагмент пространственного распределения изоповерхностей мгновенного значения скорости u_x на отрезке трубы между сечениями с координатами $x = 1.5, 2.0$.

Зависимость спектральной плотности кинетической энергии $E(k)$ в потоке от частоты k приведена на рис. 4. Для построения спектра использована зависимость от времени кинетической энергии потока в зоне развитого турбулентного течения в точке, расположенной вблизи оси и выходной границы области на интервале времени (0.35–0.45). Дополнительно показана прямая с угловым наклоном $-5/3$, отражающая колмогоровский закон диссипации энергии турбулентных пульсаций от частоты для развитого турбулентного течения [24]. В интервале частот от 100

до 10^4 Гц средний наклон рассчитанного спектра в целом соответствует этому закону.

В практических применениях важной характеристикой является коэффициент сопротивления, величина которого существенно зависит от режима течения. Коэффициент сопротивления в круглой трубе определяется соотношением [1, 2]:

$$C_f = \frac{\Delta p D}{2\rho U^2 L}, \quad (10)$$

где Δp значение градиента давления для осредненного по времени течения на отрезке трубы ΔL .

Для развитого турбулентного течения в круглой трубе асимптотическое значение коэффициента сопротивления выражается законом Блазиуса [1, 2, 6, 7]:

$$C_f = \frac{0.079}{Re^{0.25}}. \quad (11)$$

Для рассматриваемого режима течения формула (11) дает значение 0.01067. Согласно [6], полученное в расчетах значение C_f превосходит теоретические значение (11) и близко к 0.011. Для сравнения, коэффициент трения в трубе для течения Пуазейля составляет $C_f = 16/Re = 0.0053$.

Оценка коэффициента сопротивления согласно (10) получена на основе вычисленного градиента давления на оси трубы, осредненного по времени. При этом $\Delta p = 13$, $\Delta L = 2$ и $C_f = 0.0138$. Данная величина показывает, что полученное значение существенно превосходит коэффициент сопротивления для ламинарного режима и по порядку величины соответствует сопротивлению для турбулентного режима.

Аналогичные результаты по формированию турбулентного течения при развитии случайных возмущений на входе в трубу были получены для $Re = 4000$.

Таким образом, в численном эксперименте для $Re = 3000$ и 4000 получено, что при внесении во входной профиль скорости случайных возмущений течение в трубе теряет устойчивость и с течением времени приобретает нестационарный стохастический вид. Качественный анализ свойств полученного течения указывает на его турбулентный характер. Полученное в расчете поведение возмущений качественно соответствует представлениям теории и эксперимента.

Для моделирования ламинарного и турбулентного течения использовался единообразный численный алгоритм, без изменения его настроек

или введения дополнительной турбулентной вязкости. Настройка алгоритма регулируется величиной коэффициента диссипации и размером пространственной сетки. Для моделирования ламинарных и турбулентных течений вязкого сжимаемого теплопроводного газа может применяться полная квазигазодинамическая система уравнений, алгоритм решения которой также реализован в открытых программных пакетах.

По аналогии с DNS-методами прямого численного моделирования, КГД-алгоритм можно рассматривать как DNS-метод, который в качестве основы использует не уравнения Навье–Стокса, а их регуляризованный вариант. В отличие от LES-методов моделирования на основе крупных вихрей, КГД-алгоритм не требует введения в него специфических моделей подсеточной вязкости и их настройки под конкретный вид течения. Тем самым КГД-алгоритм представляется перспективным для моделирования течений с ламинарными и турбулентными зонами и переходами между ними. В частности, возможно моделирование течений в трубопроводных системах, включая оценки коэффициента сопротивления трубы.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики, соглашение с Министерством науки и высшего образования РФ № 075-15-2025-346.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., 1956. 528 с. Translation: Grenzschicht-Theorie. Von Herman Schlichting. Karlsruhe, 1951.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., 1987.
3. Shaughnessy E.J., Katz I.M., Schaffer J.P. Introduction to Fluid Mechanics, New York, Oxford: university press, 2005.
4. Barkley D. Theoretical perspective on the route to turbulence in a pipe // J. Fluid Mech. 2016. V. 803. P1. <https://doi.org/10.1017/jfm.2016.465>.
5. Никитин Н.В. Проблема перехода и локализованные структуры в трубах // Известия РАН. МЖГ. 2021. № 1. С. 32–46. Translation: Nikitin N.V. Transition problem and localized

- turbulent structures in pipes // Fluid dynamics. 2021. V. 56. No 1. P. 31–44.
6. Priymak V.G. Direct numerical simulation of quasi-equilibrium turbulent puffs in pipe flow // Phys. Fluids. 2018. V. 30. No 6. 064102.
 7. Приймак В.Г. Решения уравнений Навье–Стокса с ограничениями симметрии и их связь с переходными и турбулентными течениями в круглой трубе // ДАН, Технические науки. 2021. Т. 500. С. 53–56. <https://doi.org/10.31857/S2686740021050084> Translation: Priymak V.G. Navier-Stokes solutions with symmetry restrictions and their relation with transitional and turbulent pipe flows // Dokl RAS. 2021. V. 500 P.
 8. Yakhot A., Feldman Y., Moxey D., Sherwin S., Karniadakis G.E. Turbulence in a localized puff in a pipe // Flow, Turbulence and Combustion. 2019. V. 103. P. 1–24. <https://doi.org/10.1007/s10494-018-0002-8>
 9. Gnamode P.S., Orlandi P., Ould-Rouiss M., Nicolas X. Large-Eddy simulation of turbulent pipe flow of power-law fluids // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2015. V. 54. P. 196–210.
 10. Четверушкин Б.Н., Луцкий А.Е., Шильников Е.В. Описание турбулентных течений с помощью кинетической модели // ДАН, Математика, информатика, процессы управления. 2024. Т. 516. С. 51–58. Translation: Chetverushkin B.N., Lutsky A.E., Shilnikov E.V. Description of turbulent flows using a kinetic model. Translation Chetverushkin B.N., Lutsky A.E., Shilnikov E.V. Dokl. RAS. 2024. V. 516.
 11. Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. М.–Ижевск, 2009. 400 с.
 12. Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2016. 222 с.
 13. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета газодинамических течений. М.: Научный мир, 2007. 351 с. Translation: T.G. Elizarova, Quasi-Gas Dynamic equations. Springer, Berlin, 2009. 286 p. <https://doi.org/10/1007/978-3-642-00292-2>
 14. Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В. Теоретическое и численное исследование квазигазодинамических и квазигидродинамических

- уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 2. С. 239–255. Translation: *Elizarova T.G., Sheretov Yu.V.* Theoretical and Numerical Analysis of Quasi-Gasdynamics and Quasi-Fluid-Dynamic Equations // J. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2001. V. 41. No 2. P. 219–234.
15. *Kraposhin M.V., Ryazanov D.A., Elizarova T.G.* Numerical algorithm based on regularized equations for incompressible flow modeling and its implementation in OpenFOAM // Computer Physics Communications. 2022. V. 271. 108216.
 16. *Elizarova T.G., Kalachinskaya I.S., Kluchnikova A.V., Sheretov Yu.V.* Использование квазигидродинамических уравнений для моделирования тепловой конвекции при малых числах Прандтля // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 10. С. 1732–1742. Translation: *Elizarova T.G., Kalachinskaya I.S., Kluchnikova A.V., Sheretov Yu.V.* Application of quasi-hydrodynamic equations in the modeling of low-Prandtl thermal convection // J. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1998. V. 38. No 10. P. 1662–1671.
 17. *Кiryushina M.A., Elizarova T.G., Epikhin A.S.* Верификация численного алгоритма на основе квазигидродинамических уравнений на примере моделирования задач гравитационной конвекции // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2024. Т. 64. № 10. С. 1966–1976. Translation: *Kiryushina M.A., Elizarova T.G., Epikhin A.S.* Verification of a numerical algorithm based on quasi-hydrodynamic equations as applied to thermal convection problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2024. V. 64, No 10. P. 2388–2398.
 18. *Elizarova T.G., Широков И.А.* Регуляризованные уравнения и примеры их использования при моделировании газодинамических течений. М.: МАКС Пресс, 2017. 136 с.
 19. *Shirokov I.A., Elizarova T.G.* Simulation of laminar–turbulent transition in compressible Taylor–Green flow basing on quasi-gas dynamic equations // Journal of Turbulence. 2014. V. 15. No 10. P. 707–730. <https://doi.org/10.1080/14685248.2014.927581>
 20. *Elizarova T.G., Shirokov I.A.* Direct simulation of laminar-turbulent transition in a viscous compressible gas layer // Comut.Math.Model. 2012. V. 25. No 1. P. 27–48.
 21. *Широков И.А., Elizarova T.G.* Моделирование ударно-волновых структур на начальном участке недорасширенной сверхзвуковой струи // Теплофизика и Аэромеханика. 2024. Т. 31. № 2. С. 327–337. https://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=188828&ARTICLE_ID=188837 Translation: *Shirokov I.A., Elizarova T.G.* Modeling shock-wave cells at the initial region of the underexpanded supersonic jet // Thermophysic. Aeromech. 2024. V. 31. P. 301–311. <https://doi.org/10.1134/S0869864324020094>
 22. https://github.com/m-ist/Pipe_turbulence_generation
 23. *Кiryushina M.A.* Численный эксперимент в задаче о распространении малых возмущений в круглой трубе. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2024. № 48. 20 с.
 24. *Ландау Л.Д., Лифшиц В.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.

REGULARIZED HYDRODYNAMIC EQUATIONS IN A PROBLEM OF TURBULENT FLOW MODELING IN A PIPE

T. G. Elizarova^a, M. A. Kiryushina^a

^a*Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Science, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS B. N. Chetverushkin

The problem of the development of hydrodynamic instability in a pipe at moderate Reynolds numbers for the flow of a viscous incompressible fluid is considered. Numerical simulation is performed on the basis of regularized or quasi-hydrodynamic equations. The simulation was carried out by the finite volume method implemented by the authors within the framework of an open source software package using parallel technologies. Within the framework of this approach, it is shown in a direct numerical experiment that random perturbations of the inlet velocity in a pipe attenuate for subcritical Reynolds numbers and lead to the formation of a turbulent regime for supercritical values. This result shows the prospects of using regularized equations of hydrodynamics as a new alternative model in calculations of laminar-turbulent transition in incompressible liquid and gas in pipeline systems, including estimates of the pipe resistance coefficient.

Keywords: regularized equations, quasi-hydrodynamic equations, viscous incompressible fluid, pipe, transition to turbulence