

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С СИСТЕМОЙ ВОЗДУШНЫХ ПУЗЫРЬКОВ В ВОДЕ

© 2026 г. *И.Р. Хайталиев¹, Е.В. Шильников², Т.Г. Елизарова²*

¹ Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)

² Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
ikhaitaliev@gmail.com; shilnikov@imamod.ru; telizar@mail.ru

DOI: 10.20948/mm-2026-03-07

На примере задачи численного моделирования взаимодействия пузырьков с ударной волной представлен и верифицирован численный алгоритм для расчетов пространственных течений смеси разнородных флюидов. Алгоритм построен на основе гетерогенной P-V-T модели и позволяет описывать течение смеси газ-жидкость. Используется система четырех уравнений сохранения, которая замыкается двучленным уравнением состояния. Конечно-разностный алгоритм основан на методе конечных объемов с использованием квазигазодинамической регуляризации уравнений. Расчеты взаимодействия воздушного пузырька и системы пузырьков с ударной волной слабой интенсивности в воде показывают работоспособность предложенного алгоритма. Разностный алгоритм реализован в рамках открытой платформы AMReX.

Ключевые слова: газовая динамика, гетерогенная модель сжимаемой смеси газов, P-V-T приближение, квазигазодинамические уравнения, конечно-разностный алгоритм, воздействие ударной волны на каплю, платформа AMReX.

NUMERICAL SIMULATION OF THE IMPACT WAVE INTERACTION WITH A SYSTEM OF AIR BUBBLES IN WATER

I.R. Khaytaliev¹, E.V. Shilnikov², T.G. Elizarova²

¹Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI)

²Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS

A numerical algorithm for modeling spatial flows of a mixture in a heterogeneous approximation has been constructed and verified on the problem of gas-shock-wave interaction. Algorithm allows the description of gas mixture and gas-liquid mixture flows. The description is based on the P-V-T model of gas mixture with a bimodal state equation. A finite-difference algorithm based on the finite volume method has been applied, using

regularized gas dynamics equations. As an example of application the problem of interaction of an air bubble and a system of bubbles with a weak shock wave in water is given. The calculations show the effectiveness of the proposed algorithm. The numerical algorithm is implemented within the framework of the open-source AMReX platform.

Keywords: gas dynamics, heterogeneous two-fluid mixture model of a compressible mixture of gases, P-V-T model, quasi gas dynamic equations, finite difference algorithm, impact of the shock wave on the air bubble, AMReX platform.

1. Введение

Широкое распространение течений многофазных флюидов требует разработки и использования разнообразных алгоритмов для их численного моделирования. Существенной сложностью при описании гетерогенных двухфазных сред является моделирование межфазной границы между ними. В представленной работе авторы используют подход сквозного счета, относящийся к группе подходов без отслеживания межфазной границы, то есть метод с диффузной границей. В рамках этого подхода применяется модель двухфазного течения в предположении полного равновесия фаз по скорости, давлению и температуре с использованием двучленного уравнения состояния. В литературе эта модель часто именуется P-V-T моделью. Обзор большого числа моделей описания течений смеси в диффузионном приближении, включающим в себя около ста источников, имеется, например, в [1].

Целью работы является усовершенствование и расширение возможностей численных алгоритмов для задач моделирования течений двухфазных смесей с применением квазигазодинамических (КГД), или регуляризованных уравнений. Основой представленного численного алгоритма является КГД версия P-V-T модели. Регуляризация уравнений газовой динамики имеет долгую историю, которая подтвердила целый ряд достоинств этого подхода [2–4]. В частности, это единообразное описание сверхзвуковых и дозвуковых течений, включая трансзвуковые режимы, надежность моделирования нестационарных течений, включая отдельные режимы турбулентных течений с небольшими числами Рейнольдса, эффективность при создании параллельных алгоритмов.

Для расширения использования КГД подхода к описанию газовых смесей ранее выполнено его обобщение в гомогенном P-V-T приближении, см, в частности, [5–7]. Однако в рамках гомогенного описания смеси не удается моделировать течения газ-жидкость, поэтому алгоритм расширен на P-V-T смеси в гетерогенном приближении. Варианты этого описания протестированы в [8] для одномерных и в [9] для двумерных течений. Теоретические

основы для данного подхода были заложены в работах [10–13]. В частности, в [12] выписан энтропийно-согласованный вид указанной системы уравнений.

В нашей работе впервые построен и оттестирован численный алгоритм на основе КГД уравнений для гетерогенной P-V-T модели для трехмерных нестационарных задач. Алгоритм реализован в рамках современного открытого комплекса AMReX, который позволяет применять локальное измельчение пространственной и временной сеток, а также распараллеливание на большое число процессоров, включая графические ускорители. Таким образом, алгоритм адаптирован к применению на современных вычислительных системах и использованию посторонними пользователями. Тем самым работа является естественным продолжением и расширением серии предыдущих исследований по применению КГД подхода для численного моделирования течений флюидов на новые объекты исследования и имплементации алгоритмов на современные вычислительные комплексы с возможностью их использования в открытом доступе. Указанные аспекты обеспечивают новизну и практическую ценность представленной работы.

Процессы взаимодействия пузырьков газа и водной среды важны при изучении теплообмена между поверхностью океана и атмосферой, моделировании погоды, а также в биологии, медицине, технических устройствах, процессах кавитации и многих других. В представленной статье задача о воздействии плоской ударной волны на одиночный пузырек воздуха и его разрушение рассматривается как тестовый пример для верификации нового численного алгоритма. Публикаций по этой задаче достаточно много, см., например, [14–19].

Задача о взаимодействии ударной волны с последовательностью газовых пузырьков более сложна и менее исследована в литературе, чем задача с одним пузырьком. В процессе движения ударной волны происходит последовательное разрушение пузырьков и искажение волны по мере ее распространения, см., например, [20]. Эта задача представляет интерес для более узких специалистов. Численное моделирование этой задачи представлено в последнем разделе работы.

2. Регуляризованные уравнения газовой динамики для описания смеси газ–жидкость

Описание гетерогенной смеси сжимаемых газов, находящихся в термическом и кинетическом равновесии (т.е. с одинаковыми скоростями и температурами компонентов), осуществляется посредством системы из четырех дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих балансы массы компонентов, общего импульса и полной энергии:

$$\frac{\partial(\alpha_k r_k)}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_k r_k \mathbf{u}) = 0, \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \operatorname{div} \Pi^{\text{NS}} + \rho \mathbf{f}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(0.5\rho|\mathbf{u}|^2 + \rho\varepsilon) + \operatorname{div}\left((0.5\rho|\mathbf{u}|^2 + \rho\varepsilon + p)\mathbf{u}\right) = \operatorname{div}(-\mathbf{q}^{\text{F}} + \Pi^{\text{NS}}\mathbf{u}) + \rho\mathbf{u}\mathbf{f} + Q. \quad (3)$$

Здесь использованы стандартные обозначения для газодинамических переменных, $E = \rho(\varepsilon + \mathbf{u}^2/2)$ – полная энергия, Π^{NS} – тензор вязкости Навье-Стокса, \mathbf{q}^{F} – тепловой поток Фурье. Основными искомыми функциями в рамках нашего исследования являются: плотности $r_k > 0$ и объемные доли $0 < \alpha_k < 1$ для гетерогенных компонентов ($k = 1, 2$), а также вектор скорости \mathbf{u} и скаляр температуры $T > 0$ смеси. Применяются стандартные обозначения для всех газодинамических величин. Символом \otimes обозначено тензорное произведение векторов, а тензорная дивергенция определяется относительно первого индекса. Внешним силам и источникам/стокам энергии соответствуют символы \mathbf{f} и Q .

Система уравнений (1)–(3) дополнена следующими соотношениями:

$$\sum_{k=1}^2 \alpha_k = 1, \quad \rho = \sum_{k=1}^2 \alpha_k r_k, \quad (4)$$

$$\rho\varepsilon = \sum_{k=1}^2 \alpha_k r_k \varepsilon_k(r_k T), \quad (4)$$

$$p = p_k(r_k T) > 0. \quad (5)$$

где $p_k(r_k, T)$ и $\varepsilon_k(r_k, T)$ – давление и удельная внутренняя энергия k -го компонента, ρ и ε – плотность и удельная внутренняя энергия смеси, p – общее давление компонентов.

В нашем исследовании для «застывшего» газа используются уравнения состояния, описанные в [17, 18].

$$p_k(r_k T) = R_k r_k T - p_{*k}, \quad \varepsilon_k(r_k T) = c_{V_k} T + p_{*k} / r_k + \varepsilon_{*k}, \quad (6)$$

где $R_k > 0$, $c_{V_k} > 0$, $p_{*k} > 0$ и ε_{*k} – заданные физические константы. Кроме того, $R_k = (\gamma_k - 1)c_{V_k}$, где $\gamma_k > 1$ – показатель адиабаты и $c_{p_k} = \gamma_k c_{V_k}$. Основой для этого приближения служит упрощенное уравнение Ван-дер-Ваальса для жидкого компонента. Напомним, что для идеального политропного случая принимаются значения: $p_{*k} = \varepsilon_{*k} = 0$.

Классический тензор вязкости Навье-Стокса и тепловой поток Фурье задаются формулами:

$$\Pi^{\text{NS}} = \mu \left(\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T \right) + \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) (\text{div } \mathbf{u}) I, \quad (7)$$

$$-\mathbf{q}^{\text{F}} = \kappa \nabla T,$$

где $\mu > 0, \lambda > 0$ и $\kappa > 0$ – коэффициенты вязкости, второй вязкости и теплопроводности, которые могут зависеть от искомым функций; I – единичный тензор n -го порядка.

Устранение зависимостей от α_k и r_k в уравнении (1) достигается путем определения альтернативных плотностей

$$\rho_k = \alpha_k r_k, \quad \rho = \sum_{k=1}^2 \rho_k. \quad (8)$$

Формулы (4)–(6), (8) приводят к соотношениям

$$\sum_{k=1}^2 \frac{R_k \rho_k}{p + p_{*k}} T = 1, \quad (9)$$

$$\rho \cdot (\varepsilon - \varepsilon_*) = \left(\rho c_V + \sum_{k=1}^2 \frac{R_k \rho_k p_{*k}}{p + p_{*k}} \right) T, \quad (10)$$

где

$$\rho \cdot c_V = \sum_{k=1}^2 \rho_k c_{V_k}, \quad \rho \cdot \varepsilon_* = \sum_{k=1}^2 \rho_k \varepsilon_{*k}. \quad (11)$$

Исключив T из (9) и (10), после алгебраических преобразований получим следующие выражения:

$$\sum_{k=1}^2 \frac{\sigma_k (\rho \cdot (\varepsilon - \varepsilon_*) - p_{*k})}{p + p_{*k}} = 1, \quad (12)$$

$$\sigma_k = R_k \rho_k / (c_V \rho), \quad (13)$$

$$\gamma = R / c_V + 1, \quad \rho R = \sum_{k=1}^2 \rho_k R_k. \quad (14)$$

Это рациональное уравнение сводится к квадратному уравнению

$$p^2 - bp - c = 0. \quad (15)$$

Коэффициенты этого уравнения вычисляются следующим образом:

$$b = \sum_{k=1}^2 (\sigma_k (\rho (\varepsilon - \varepsilon_*) - p_{*k}) - p_{*k}), \quad (16)$$

$$c = (\sigma_1 p_{*2} + \sigma_2 p_{*1}) \rho (\varepsilon - \varepsilon_*) - \gamma p_{*1} p_{*2} \quad (17)$$

Если дискриминант

$$d = b^2 + 4c \quad (18)$$

больше нуля (подробнее в [10]), то квадратное уравнение (15) имеет корни

$$p_{\pm} = 0.5(b \pm \sqrt{d}), \quad p_+ > p_- \quad (19)$$

Для случая $p_{*1} \cdot p_{*2} = 0$ (в нашей работе рассматривается только такой случай) корни имеют разные знаки, и отрицательный корень $p_- = 0.5(b - \sqrt{d})$ отбрасывается как нефизичный.

Таким образом, давление задается положительным корнем квадратного уравнения (15) по формуле (19)

$$p_+ = 0.5(b + \sqrt{d}). \quad (20)$$

Значение температуры T можно получить из (9)

$$T = \left(\sum_{k=1}^2 \frac{R_k \rho_k}{p + p_{*k}} \right)^{-1}. \quad (21)$$

Принципиальные физические различия между гомогенной и гетерогенной моделями газовых смесей не препятствуют их унифицированной математической формализации. Расхождения сосредоточены в алгоритмах вычисления давления, температуры и скорости звука: гомогенный подход (например, [18]) использует в качестве давления сумму парциальных давлений компонент, тогда как гетерогенный – соотношение (20). Поскольку эти функции реализованы в одном вычислительном модуле (уравнение состояния), адаптация существующих гомогенных численных алгоритмов к гетерогенным задачам требует лишь изменения данного блока, что свидетельствует о высокой практической ценности предложенного метода.

Пространственно-временное распределение газодинамических параметров смеси определяется через взвешенное усреднение свойств её компонентов, где весовые коэффициенты (доли компонентов) изменяются в каждой точке (x, y, z, t) .

Численный алгоритм решения системы для описания смеси опирается на квазигазодинамическую (КГД), или регуляризованную, систему уравнений газовой динамики, описанную, в частности, в [3, 4]. КГД система отличается от классических уравнений Навье-Стокса присутствием в ней нелинейных регуляризирующих слагаемых диссипативного типа, пропорциональных коэффициенту τ , который имеет размерность времени.

Задача о течении смеси рассматривается в приближении Эйлера, то есть мы пренебрегаем физической вязкостью μ и теплопроводностью κ флюидов. Коэффициент второй вязкости полагается равным нулю. При этом коэффициенты вязкости и теплопроводности смеси рассматриваются как коэффициенты при искусственных регуляризаторах и вычисляются следующим образом:

$$\mu = \tau p Sc, \quad \kappa = \tau p c_p Pr^{-1}, \quad (22)$$

где число Шмидта Sc и число Прандтля Pr также считаются коэффициентами в регуляризаторах, а коэффициент τ пропорционален шагу пространственной сетки и определен согласно [3, 4]:

$$\tau = \alpha h / c_s. \quad (23)$$

Здесь c_s – скорость звука, $h = (h_x^2 + h_y^2 + h_z^2)^{0.5}$, h_x, h_y, h_z – шаги пространственной сетки по соответствующим осям, α – численный коэффициент, который выбирается из соображений точности и устойчивости численного алгоритма. Как показывают теоретические оценки и опыт численных расчетов с применением КГД уравнений, параметр регуляризации обеспечивает условную устойчивость разностного алгоритма для параметра α в окрестности 1 с шагом по времени порядка τ . При увеличении коэффициента α возможно увеличение шага по времени, но при этом растет и диссипация разностного алгоритма. При уменьшении этого коэффициента приходится дробить шаг по времени, что практически не сказывается на точности решения, но приводит к удорожанию расчета. Поэтому в расчетах выбирается некоторое оптимальное с точки зрения точности и устойчивости алгоритма значение α .

Газодинамические переменные локализованы в центрах ячеек; их значения на границах ячеек определяются с помощью линейной интерполяции по значениям в смежных ячейках, а пространственные производные на границах ячеек аппроксимируются центральными разностными производными.

Полученная таким образом разностная схема является условно-устойчивой, максимальный шаг по времени близок к минимальному значению параметра τ . Шаг по времени оценивается в начале расчета по начальным данным задачи и выбирается постоянным. Его значение указано для каждого варианта расчета. Предполагается, что внешняя сила \mathbf{f} и источник тепла Q отсутствуют.

Ранее описанные здесь модель и численный метод были использованы для решения ряда тестовых задач в одномерной [8] и двумерной [9] постановках.

Численный алгоритм для трехмерных нестационарных течений реализован на открытой платформе AMReX, которая предполагает использование пространственных ячеек в форме прямоугольных параллелепипедов с одинаковыми шагами по каждому направлению, а также явный вид аппроксимации по времени.

3. Результаты численного моделирования

Проведено численное моделирование прохождения плоской ударной волны в водной среде с одиночным пузырьком и системой пузырьков, располо-

женных вдоль одной прямой. Расчеты проведены в соответствии с описанием этих задач из [19, 20].

Для решения обеих задач ставятся следующие граничные условия: поток жидкости течет слева направо, на левой границе задаются параметры входящего потока, на правой границе ставятся так называемые мягкие граничные условия, то есть условия сноса, или равенство нулю нормальных производных всех переменных. На верхней и нижней границах также задаются условия сноса.

На границе пузыря воздух-вода задается плавный переход объемной доли в соответствии с соотношением:

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1)_{\text{сглаженный}} &= G(\xi)\delta + (1 - G(\xi))(1 - \delta), \\
 G(\xi) &= -\xi^2(2\xi - 3), \quad \xi = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{0.5} - (r - 2h_x)}{4h_x}, \\
 r - 2h_x &\leq (x^2 + y^2 + z^2)^{0.5} \leq r + 2h_x.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Ширина переходной области составляет два шага пространственной сетки $\pm 2h_x$ [19]. Здесь α_1 – объемная доля воды, $1 - \alpha_1$ – объемная доля воздуха, $\alpha_1 = \delta$ внутри пузыря.

Задача А. Моделируется взаимодействие ударной волны в воде с одиночным воздушным пузырьком, то есть с трехмерной воздушной каплей радиуса $r=3.2$ мм. Центр пузыря располагается в начале координат. Размер расчетной области задается диапазоном $x \in [-15, 20]$ мм, $y \in [-10, 10]$ мм и $z \in [-5, 5]$ мм. Параметры воздуха и воды представлены в табл. 1.

Таблица 1. Параметры воды и воздуха для задачи А согласно [19].

Вещество	γ	c_p , Дж/(кг·К)	p_* , Па	ε_* , Дж/кг
Воздух	1.4	1004.5	0	0
Вода	2.8	4186	$8.5 \cdot 10^8$	0

Начальные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}
 (p, \alpha_1, u_x, u_y, u_z, T)_L &= \\
 &= \left(1.6 \cdot 10^9 \text{ Па}, 1 - \delta, 661.81 \text{ м/с}, 0 \text{ м/с}, 0 \text{ м/с}, 593.13 \text{ К} \right) \text{ для } x \leq -4 \text{ мм}; \\
 (p, \alpha_1, u_x, u_y, u_z, T)_R &= \\
 &= \left(1.01325 \cdot 10^5 \text{ Па}, 1 - \delta, 0 \text{ м/с}, 0 \text{ м/с}, 0 \text{ м/с}, 292.98 \text{ К} \right) \text{ для } x > -4 \text{ мм},
 \end{aligned} \tag{25}$$

за исключением $x^2 + y^2 + z^2 < r^2$, где $\alpha_1 = \delta$ и $\delta = 10^{-3}$ (внутри пузыря).

При задании границы пузыря применяется сглаживание (24).

При расчетах шаг по времени составляет $\Delta t = 5 \cdot 10^{-10}$ с. Конечное время расчета $t_{\text{fin}} = 5$ мкс. Представлены результаты расчетов на сетке $700 \times 400 \times 200$, число Шмидта $Sc = 0.7$, число Прандтля $Pr = 2$. Параметр регуляризации, обеспечивающий устойчивость решения, составляет $\alpha = 0.8$ до момента времени 2.5 мкс и далее $\alpha = 1.37$. Результаты расчета показаны на рис.1–3.

Характер течения очень сложный и динамичный. Примерно к моменту времени 3.75 мкс в районе оси возникает явление, похожее на формирующийся вихрь, сопровождающееся значительным понижением давления в его ядре. Эта особенность создает потенциальные трудности для устойчивости численного моделирования, требуя применения дополнительного сглаживания в этой зоне. Такое дополнительное сглаживание проводится путем увеличения коэффициента α .

На рис.1 показаны изоповерхности концентрации воздуха при значении $\alpha_1 = 0.05$ (слева) и в сечении xu при $z = 0.0$ мм (справа).

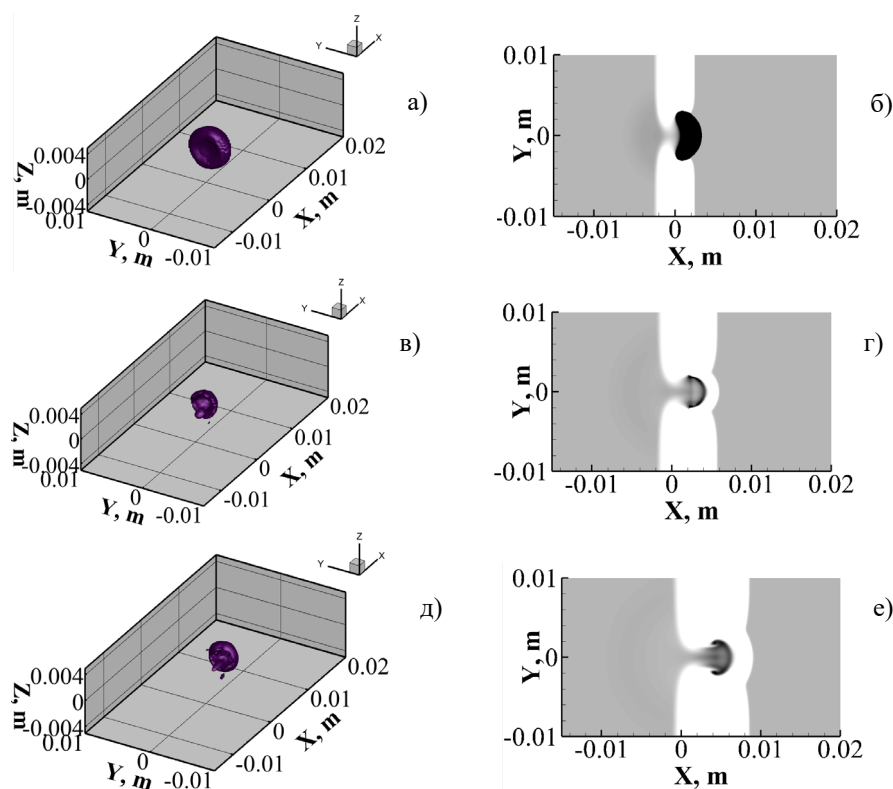


Рис.1. Задача А. Распределения концентрации воздуха в моменты времени: а), б) $t = 2.5$ мкс; в), г) $t = 3.75$ мкс; д), е) $t = 5.0$ мкс.

Рис.2 иллюстрирует результаты численного моделирования, отображая шпирен-изображения и поля давления в сечении xu при $z = 0.0$ мм для различных временных моментов. Диапазон давлений, представленных на цветовой схеме "Grayscale" (8 уровней, непрерывное распределение), покрывает диапазон значений от 10^8 Па до $2 \cdot 10^9$ Па. Представленные на рис.2 контуры хорошо коррелируют с результатами, полученными в работах [9, 19].

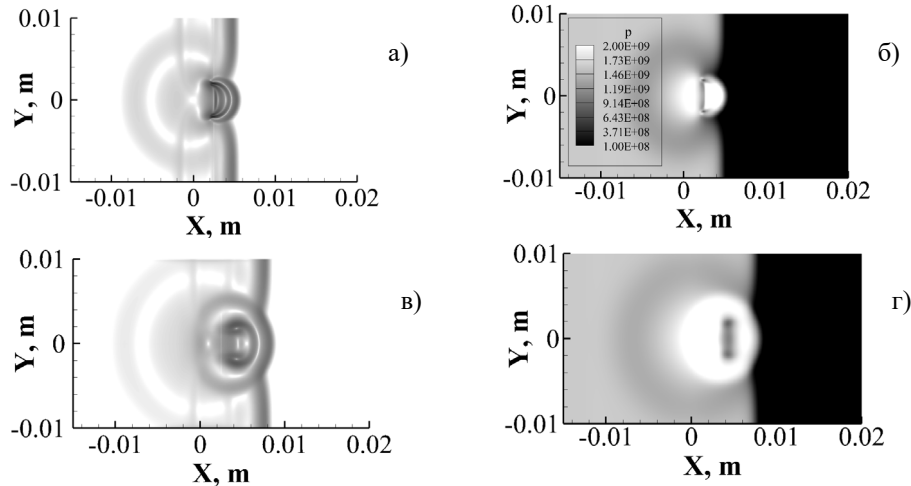


Рис.2. Задача А. Числовые шпирен-образы (слева) и распределения давления (справа) в разные моменты времени в сечении $z=0.0$ мм: а) $t=3.75$ мкс; б) $t=5.0$ мкс.

Рис.3 представляет собой серию срезов xz (при $y = 0.0$ мм), демонстрирующих числовые шпирен-образы плотности в различные моменты времени. Для визуализации градиента плотности используется цветовая схема "Reverse Grayscale" со 100 экспоненциально распределенными уровнями, покрывающими диапазон значений от 10^4 Па до 10^7 Па.

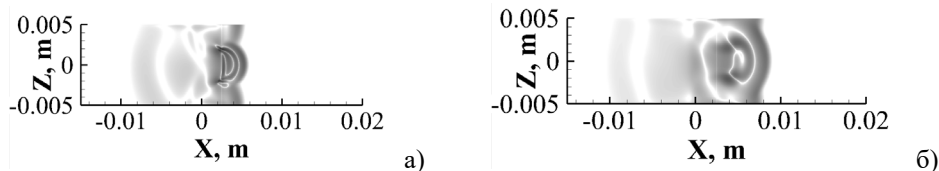


Рис.3. Задача А. Числовые шпирен-образы в разные моменты времени в сечении $y = 0.0$ мм: а) $t = 3.75$ мкс; б) $t = 5.0$ мкс.

Задача В. Моделируется взаимодействие ударной волны с цепочкой из десяти воздушных пузырьков радиуса $r = 0.125$ мм. В начальный момент времени пузырьки расположены по прямой линии, проходящей через центр области, с зазором $r/5$ между границами соседних пузырьков. Задача решается в области $x \in [0, 4]$ мм, $y \in [0, 1]$ мм и $z \in [0, 1]$ мм. Расчеты проводились на сет-

ке $1024 \times 256 \times 258$ ячеек. В (23) выбран параметр $\alpha = 0.8$. Конечное время расчета $t_{\text{fin}} = 3.16$ мкс. Шаг по времени взят $\Delta t = 5 \cdot 10^{-11}$ с. Параметры воды и воздуха для этой задачи представлены в табл.2.

Таблица 2. Параметры воды и воздуха для задачи В согласно [20].

Вещество	γ	ρ , кг/м ³	c_s , м/с	p_* , Па	ε_* , Дж/кг
Воздух	1.4	1.204	343	0	0
Вода	6.12	1000	1450	$3.43 \cdot 10^8$	0

Начальные условия записываются в виде:

$$\begin{aligned} (p, \alpha_1, u_x, u_y, T)_L &= \\ &= (4.0 \cdot 10^7 \text{ Па}, 1 - \delta, 30.0 \text{ м/с}, 0 \text{ м/с}, 327.329 \text{ К}) \text{ для } x \leq 0.25 \text{ мм}; \\ (p, \alpha_1, u_x, u_y, T)_R &= \\ &= (1.01325 \cdot 10^5 \text{ Па}, 1 - \delta, 0 \text{ м/с}, 0 \text{ м/с}, 293.23 \text{ К}) \text{ для } x > 0.25 \text{ мм}, \end{aligned} \quad (26)$$

за исключением $(x - x_{\text{of}})^2 + (y - 0.5)^2 + (z - 0.5)^2 < r^2$,

где $\alpha_1 = \delta$ и $\delta = 10^{-3}$ внутри пузыря, $x_{\text{of}} = i(2r + r/5) + 0.5$, $i = 0.9$.

При задании границы пузырьков с воздухом применяется сглаживание (24).

На рис.4 представлены начальные расположения 10 воздушных пузырей (границы раздела воздуха и воды показаны окружностями) и плоской ударной волны (вертикальная линия) в сечении $z = 0.5$ мм.

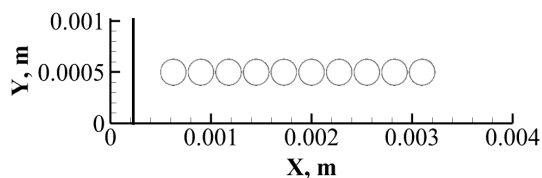


Рис.4.

На рис.5 показаны изоповерхности концентрации воздуха в последовательные моменты времени для концентраций а) 0.94, б) 0.57, в) 0.975. Указанные значения концентраций подобраны из соображений наглядности. Полученные в расчетах положения пузырьков на рис.5б),в) соответствуют результатам работы [20].

При столкновении ударной волны с каплей происходит искажение формы последней и резкое сжатие воздуха в ней. На завершающей стадии схлопывания капля порождает ударную волну почти сферической формы, гораздо

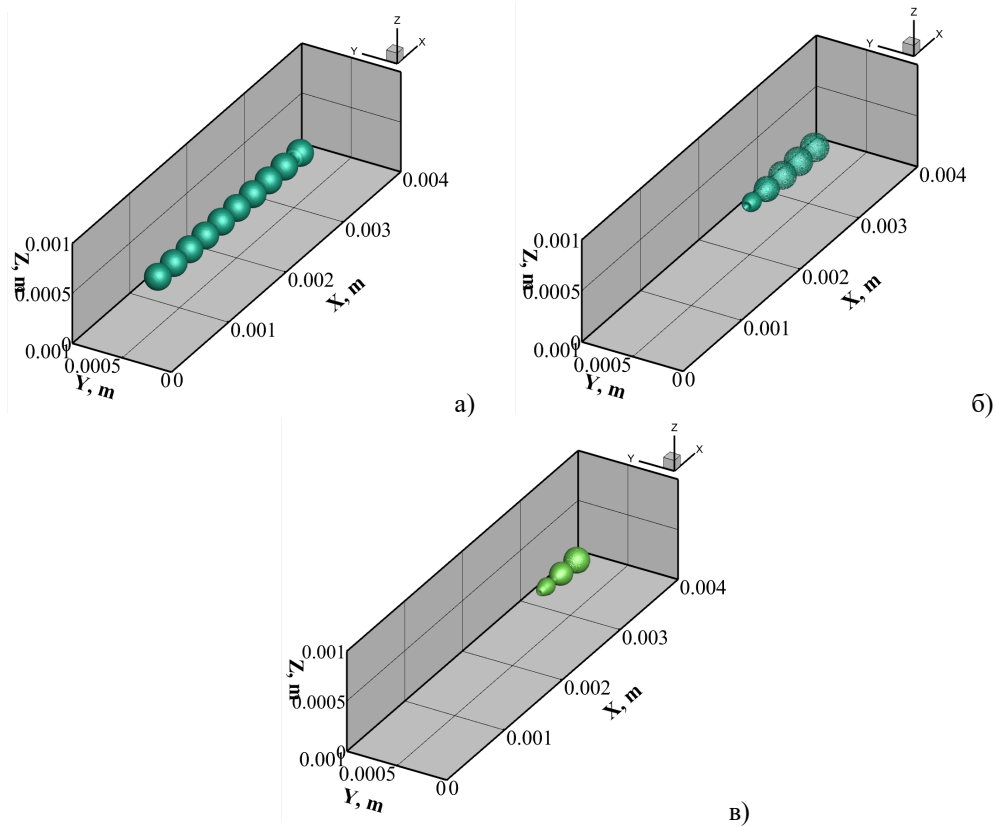


Рис.5. Задача В. Изоповерхности концентрации воздуха в разные моменты времени: а) $t = 0.0$ мкс; б) $t = 1.78$ мкс; в) $t = 2.11$ мкс.

более сильную, чем падающая волна, которая, однако быстро ослабевает по мере распространения в воде. Так в момент схлопывания капли давление в ее центре в десятки раз превышает давление в падающей волне, а уже на небольшом удалении оказывается выше него не более чем на 20%. Вверх по потоку эта волна распространяется практически беспрепятственно. Свободному распространению вниз по потоку мешает взаимодействие со следующими каплями. На рис.6 изображены изоповерхности давления $p=2.3 \cdot 10^7$ Па (поверхность 1) и $p=5 \cdot 10^7$ Па (поверхность 2) на момент $t = 1.78$ мкс. В этот момент падающая ударная волна уже взаимодействует с шестой каплей, а четыре последних еще не деформированы. На месте пятой капли уже образовалась область высокого давления ($> 10^8$ Па, поверхность 3 – $p=2 \cdot 10^8$ Па), а от первых капель остались только ударные волны. На рис.7 представлена изоповерхность $|\nabla p| = 6 \cdot 10^{10}$ Па/м на тот же момент времени.

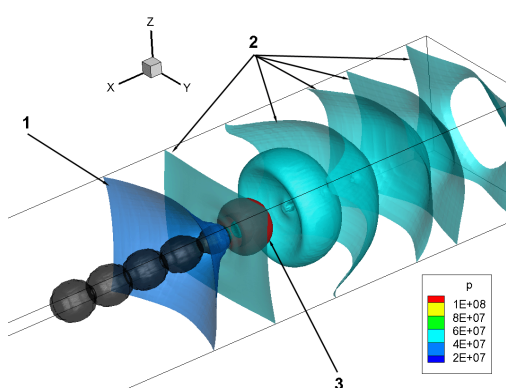


Рис.6.

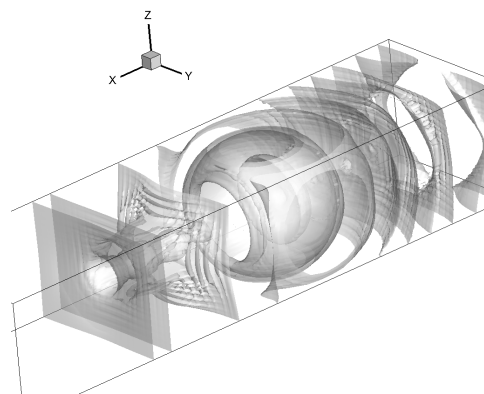


Рис.7.

К моменту $t = 2.11$ мкс падающая ударная волна дошла уже до восьмой капли. На рис.8 на фоне изоповерхностей давления изображены мгновенные линии тока и оставшиеся три капли. Образовавшееся сложное вихревое течение демонстрирует рис.9, на котором изображены изоповерхности X-компоненты завихренности $\Omega_x = \partial u_y / \partial z - \partial u_z / \partial y$. Для наглядности картин на рис.6–9 приведен ракурс, в котором ударная волна распространяется справа налево.

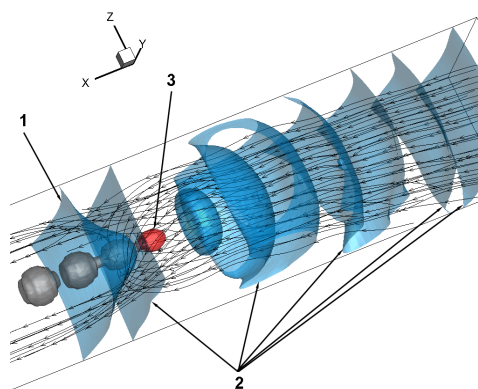


Рис.8. Задача В. Изоповерхности давления: 1) $p=2.2 \cdot 10^7$ Па, 2) $p=5 \cdot 10^7$ Па, 3) $p=2.4 \cdot 10^8$ Па.

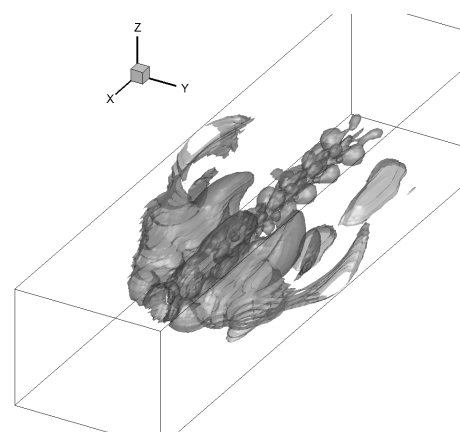


Рис.9. Задача В. Изоповерхности X-компоненты завихренности: $\Omega_x = -50000 \text{ с}^{-1}$ более светлая, $\Omega_x = -200000 \text{ с}^{-1}$ более темная.

На рис.10 показано изображение в области $x \in [1, 3.5]$ мм численного шлирен-образа в сечении $z = 0.5$ мм в моменты времени 1.78 мкс и 2.11 мкс. Здесь изображена волна давления, при этом более темные области указывают на сжатие, а более светлые (серые) области – на расширение вещества.

Для этой задачи численный шлирен-образ вычисляется не по градиенту плотности, как в задаче А, а по градиенту давления, как это сделано в [20]

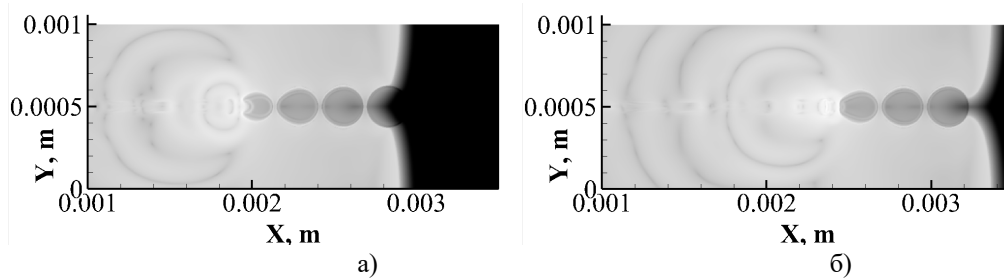


Рис.10.

$$\ln(1 + |\nabla p|). \quad (27)$$

Значения градиента давления, отображенные на графике, покрывают диапазон от 2 до 30 (на цветовой схеме «Grayscale». Применяется экспоненциальное распределение с 100 уровнями). Приведенные здесь контуры удовлетворительно согласуются с результатами из [20].

4. Заключение

Представлен численный алгоритм для моделирования пространственных течений смеси разнородных флюидов. Алгоритм построен на основе гетерогенной P-V-T модели для смеси газов с применением квазигазодинамической регуляризации уравнений. Численный алгоритм реализован на открытой платформе AMReX, которая ограничивается применением только равномерных по каждому направлению пространственных сеток и явных алгоритмов расчета. Однако для ускорения расчетов в этой платформе реализована возможность локального сгущения пространственных и временных сеток и автоматическое распараллеливание алгоритма на большое число процессоров, включая графические ускорители.

Верификация алгоритма выполнена на примере моделирования течения смеси воздух-вода. Приведены результаты расчетов и их анализ для задач о взаимодействии ударной волны в воде с одиночным воздушным пузырем и системой из 10 таких пузырей. Полученные результаты свидетельствуют о надежности представленного подхода при адекватном выборе параметров расчета, а полученные визуальные картины соответствуют двумерным и трехмерным исследованиям, представленным в [19, 20].

Авторы благодарны И.И. Буту за помощь в разработке программы в рамках комплекса AMReX.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. C. Zhang, I. Menshov, L. Wang, Z. Shen. Diffuse interface relaxation model for two-phase compressible flows with diffusion processes // J. Comput. Phys., 2022, 466, 111356, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2022.111356>
2. B.N. Chetverushkin. Kinetic Schemes and Quasi-Gas Dynamic System of Equations, CIMNE. – Barcelona: 2008.
3. Ю.В. Шеретов. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. – М.-Ижевск: 2009, 400 с.;
Yu.V. Sheretov. Dinamika sploshnyh sred pri prostranstvenno-vremennom osrednenii. – М.-Izhevsk: 2009, 400 s.
4. Т.Г. Елизарова. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета газодинамических течений. – М.: Научный мир, 2007, 350 с;
англ. пер.: T.G. Elizarova. Quasi-Gas Dynamic Equations. 2009. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-00292-2>.
5. Т.Г. Елизарова, А.А. Злотник, Е.В. Шильников. Регуляризованные уравнения для численного моделирования течений гомогенных бинарных смесей вязких сжимаемых газов // ЖВМиМФ, 2019, т.59, №11, с.1899-1914;
T.G. Elizarova, A.A. Zlotnik, E.V. Shil'nikov. Regularized equations for numerical simulation of flows of homogeneous binary mixtures of viscous compressible gases // Comput. Math. & Math. Phys., 2019, v.59, №11, p.1832-1847. <https://doi.org/10.1134/S0965542519110058>.
6. Т.Г. Елизарова, Е.В. Шильников. Численное моделирование газовых смесей в рамках квазигазодинамического подхода на примере взаимодействия ударной волны с пузырьком газа // ЖВМ и МФ, 2021, т.61, №1, с.124-135. DOI:10.31857/S004446692101004X
T.G. Elizarova, E.V. Shil'nikov. Numerical simulation of gas mixtures based on the quasi-gasdynamical approach as applied to the interaction of shock wave with a gas bubble. ISSN 0965-5425 // Comput. Math. & Math. Phys., 2021, v.61, №1, p.118–128. DOI: 10.1134/S0965542521010048.
7. Т.Г. Елизарова, Е.В. Шильников. Квазигазодинамическая модель и численный алгоритм для описания смесей разнородных флюидов // ЖВМ и МФ, 2023, т.63, №7, с.1193-1205;
T.G. Elizarova, E.V. Shil'nikov. Quasi-gasdynamical model and numerical algorithm for describing mixtures of different fluids // Comput. Math. & Math. Phys., 2023, v.63, № 7, p.1319–1331. DOI: 10.1134/S0965542523070056.
8. И.Р. Хайталиев, Е.В. Шильников, Т.Г. Елизарова. Квазигазодинамическая гетерогенная модель описания смеси сжимаемых флюидов. Одномерный случай // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2023, №74, с.24. <https://doi.org/10.20948/prepr-2023-74>;
I.R. Khaytaliev, E.V. Shilnikov, T.G. Elizarova. Kvazigazodinamicheskaya geterogennaya model' opisaniya smesi szhimaemyh flyuidov. Odnomernyj sluchaj // Preprinty IPM im. M.V. Keldysha, 2023, №74, s.24.
9. И.Р. Хайталиев. Квазигазодинамическая гетерогенная модель описания смеси сжимаемых флюидов. Двумерный случай // Матем. моделир., 2025, т.37, №4, с.89–104.
I.R. Khaytaliev. Quasi-gasdynamical heterogeneous model for describing a mixture of compressible fluids: Two-dimensional case // Math. Models & Comput. Simul., 2025, v.17, №6, p.702-712.

10. *A.A. Zlotnik, T.A. Lomonosov.* Регуляризованные уравнения динамики гетерогенных бинарных смесей «сжатых» газов Ноубла-Абеля и их применение // Доклады РАН, Математика, информатика, процессы управления, 2023, т.514, №1, с.26–33.
A. Zlotnik, T. Lomonosov. Regularized Equations for Dynamics of the Heterogeneous Binary Mixtures of the Noble-Abel Stiffened-Gases and Their Application // Doklady Math., 2023, v.108, №3, p.443–449. <https://doi.org/10.1134/S1064562423701338>
11. *A.A. Zlotnik, T.A. Lomonosov.* Application of regularized equations for dynamics of heterogeneous binary mixtures for modeling water-vapor phase transitions // Math. Models Comput. Simul., 2025, 17, p.352–364, <http://dx.doi.org/10.1134/S2070048225700097>.
12. *A. Zlotnik.* An entropy-correct regularization of a system of equations for dynamics of heterogeneous multicomponent mixtures // Applied Math. Letters, 2026, v.173, p.109793.
13. *A. Zlotnik, T. Lomonosov.* On a Doubly Reduced Model for Dynamics of Heterogeneous Mixtures of Stiffened Gases, its Regularizations and their Implementations // Chaos, 2023, v.33, №11, 113128. doi: <https://doi.org/10.1063/5.0159201>.
14. *S. Pan, L. Han, X. Hu, N. Adams.* A conservative interface-interaction method for compressible multi-material flows // J. of Computational Physics, 2018, v.371, p.870–895.
15. *S. Galera, P.-H. Maire, J. Breil.* A two-dimensional unstructured cell-centered multi-material ale scheme using VoF interface reconstruction // J. of Computational Physics, 2010, v.229, №16, p.5755–5787.
16. *R.R. Nourgaliev, T.N. Dinh, T.G. Theofanous.* Adaptive characteristics-based matching for compressible multifluid dynamics // J. Comput. Phys., 2006, 213:500–29.
17. *I. Menshov, P. Zakharov, R. Muratov.* Sharp interface capturing Godunov method for multi-material flow simulations // Computers and Fluids, 2025, 299, 106725.
18. *S. Le Martelot, R. Saurel, B. Nkonga.* Towards the direct numerical simulation of nucleate boiling flows // Int. J. Multiphase Flow, 2014, v.66, p.62–78. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2014.06.010>.
19. *K. Kitamura, M.-S. Liou, C.-H. Chang.* Extension and comparative study of AUSM-family schemes for compressible multiphase flow simulations // Communications in Comput. Phys., 2014, v.16, p.632–674. <https://doi.org/10.4208/cicp.020813.190214a>.
20. *F. Wermelinger, B. Hejazialhosseini, P. Hadjidoukas, D. Rossinelli, P. Koumoutsakos.* An Efficient Compressible Multicomponent Flow Solver for Heterogeneous CPU/GPU Architectures // Association for Comput. Machinery, 2016, N8, p.1-10. <https://doi.org/10.1145/2929908.2929914>.

Поступила в редакцию 30.09.2025

После доработки 28.01.2026

Принята к публикации 02.02.2026